Esercizio Si consideri l'insieme

$$M = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2+y^2, \ x+y+z = 0 \}.$$

i) Provare che M è una sottovarietà di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1.

ii) Parametrizzare M in modo regolare.

iii) Disegnare M.

iv) Calcolare i punti di M con coordinate minime e massime.

Risoluzione. M è l'intersezione di un paraboloide e di un piano. Consideriamo $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^2)$

$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} x^2+y^2-z \\ x+y+z \end{bmatrix}$$

Allora $M = \{ f = 0 \}$. La matrice Jacobiana di f

$$Jf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice ha rango 2 tranne che nei punti in cui $x = y = -\frac{1}{2}$. Tuttavia $f(x,y,z) = 0$ non ha in questo caso nessuna soluzione $z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - z = 0 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = \frac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases} \qquad \text{impossibile.}$$

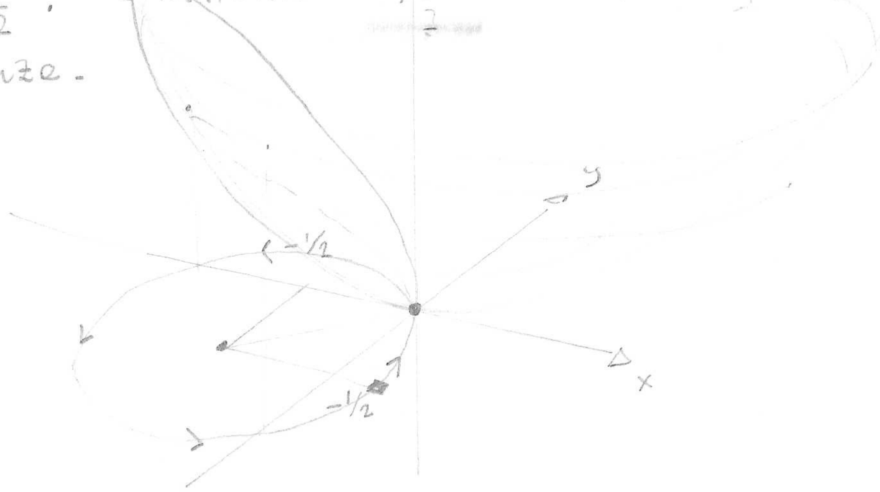
Dunque $\operatorname{rg}(Jf(x,y,z)) = 2 \quad \forall (x,y,z) \in M$.

Questo prova il punto i).

ii) Inserendo $z = -x-y$ nell'equazione $z = x^2+y^2$ si trova

$$0 = x^2+y^2+x+y = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

É l'equazione di una circonferenza con centro $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e raggio $\frac{1}{\sqrt{2}}$. L'insieme M "vive" sopra questa circonferenza.



Parametrizziamo la circonferenza

$$\gamma(t) = \Big(\underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t}_{x(t)}, \underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t}_{y(t)}\Big), \quad t \in [0, 2\pi) \quad \left(t \in \mathbb{R}, \text{ senza 1-1}\right)$$

e quindi

$$z(t) = -x(t) - y(t) = +1 - \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t + \sin t)$$

La curva $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \mathbb{R}$, parametrizza in modo regolare ($\dot{\gamma} \neq 0$, non 1-1).

iv) Si risolve $0 = \dot{z}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t + \cos t)$ da cui $\sin t = \cos t$ ovvero $t = \frac{\pi}{4}$ e $t = \frac{5}{4}\pi$ limitatamente a $[0, 2\pi)$. Quando $t = \pi/4$ si trova $z = 0$; quando $t = \frac{5}{4}\pi$ si trova

$$z = +1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = +1 + 1 = 2$$

Dunque $z_{min} = 0$ e $z_{max} = 2$ su M.

$\square$

<u>Esercizio</u> (Fibrato Tangente) Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ una sottovarietà differenziabile di classe C^k, $k \geq 2$, e di dimensione d.

Provare che

$$TM = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^{2n} \; : \; x \in M, \; y \in T_x M \}$$

è una sottovarietà di $\mathbb{R}^{2n}$ di classe C^1 e di dimensione $2d$.

Risoluzione. Fissiamo un punto $\bar{x} \in M$. Esistono $r > 0$ ed $f \in C^2(B_r(\bar{x}); \mathbb{R}^{n-d})$ tali che

$$M \cap B_r(\bar{x}) = \{ x \in B_r(\bar{x}) \, ; \, f(x) = 0 \}$$

ed inoltre $\operatorname{rg} df(x) = n-d$.

Sappiamo che $y \in T_x M$ $(\subset \mathbb{R}^n)$ se e solo se $df(x)\, y = 0$

Definiamo allora la funzione $F \in C^1(B_r(\bar{x}) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{2n-2d})$

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} f(x) \\ \\ df(x)\, y \end{pmatrix}.$$

Allora si ha

$$TM \cap \left(B_r(\bar{x}) \times \mathbb{R}^n \right) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \; ; \; F(x,y) = 0 \}.$$

Rimane da verificare l'ipotesi di rango massimo

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x) & 0 \\ \\ * & \frac{\partial f}{\partial x}(x) \end{pmatrix}$$ ha rango $2(n-d)$ per $x \in B_r(\bar{x})$.

$\square$

Esercizio Dati $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ provare che

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 ,$$

con uguaglianza se e solo se $x_1 = \dots = x_n$.

Risoluzione. É una disuguaglianza fra due polinomi omogenei di grado 2. Basta stabilirla quando $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. Siano dunque $f, h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \quad \text{ed} \quad h(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

L'insieme $M = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ h(x) = 1\}$ è la sfera unitaria e per il Teorema di Weierstrass f assume massimo e minimo su M.

Sia $\bar{x} \in M$ un punto di estremo. Per il Teorema sui moltiplicatori di Lagrange esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla h(\bar{x})$$

dove

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 2 \sum_{i=1}^{n} x_i , \qquad j = 1 \dots n$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(x) = 2 x_j , \qquad j = 1 \dots n.$$

Dunque il sistema precedente diventa

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i = \lambda \bar{x}_j \qquad j = 1 \dots n.$$

Quando $\lambda = 0$ si trova $f(\bar{x}) = 0$ che è il valore minimo di f. Possiamo supporre che $\lambda \neq 0$

e dedurre che $\bar{x}_1 = \dots = \bar{x}_n = \mu \in \mathbb{R}$.

Il sistema (*) diventa $n\mu = \lambda\mu$. In effetti $\mu \neq 0$, altrimenti $f(\bar{x}) = 0$ di nuovo. Deduciamo che $\lambda = n$.

Imponendo $1 = h(\bar{x}) = n\mu^2$ si scopre che $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$. Abbiamo scoperto che ci sono due punti di massimo (coerente con la simmetria):

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad e \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, -\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

In entrambi i casi $f(\bar{x}) = \left(n\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = n$.

Dunque

$$\max_{|x|=1} f(x) = n$$

e viene raggiunto nei due punti della sfera in cui tutte le coordinate sono uguali.

$\square$

Esercizio Dati numeri $x_1, \dots, x_n \geq 0$ provare la disuguaglianza fra media geometrica e media aritmetica

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

con uguaglianza se e solo se $x_1 = \dots = x_n$.

Risoluzione. Definiamo le funzioni per $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ con $x_i \geq 0$:

$$f(x) = (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{1/n}$$

$$h(x) = x_1 + \dots + x_n .$$

Sia $M = \{ x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 1, \; x_1, \dots, x_n \geq 0 \}$.
È un insieme chiuso e limitato (compatto). Quindi f ha massimo su M. Tuttavia M non è una varietà dove $x_i = 0$ per qualche $i = 1, \dots, n$. Ma in questi punti si ha $f(x) = 0$ e non sono rilevanti.

Nei punti di massimo $\bar{x} \in M$ per f possiamo usare il Teorema sui moltiplicatori di Lagrange in quanto $\nabla h \neq 0$. Si deve in effetti avere

$$(*) \qquad \nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla h(\bar{x})$$

per un $\lambda \in \mathbb{R}$. Conti:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \frac{1}{n} (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n} - 1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_j ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} h(x) = 1 , \qquad i = 1, \dots, n .$$

Dunque il sistema $(*)$ è equivalente a

$$\frac{1}{n} (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n} - 1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_j = \lambda \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

che in effetti si riscrive in questo modo

$$\frac{1}{n}\,(x_1\cdot\ldots\cdot x_n)^{\frac{1}{n}}\,\frac{1}{x_i} = \lambda \qquad \forall\, i=1,\ldots,n.$$

Questo implica che $x_1=\ldots=x_n$. La condizione $h(x)=1$ implica a sua volta:

$$x_1=\ldots=x_n=\frac{1}{n}.$$

In questo punto $f(x)=\left(\frac{1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \frac{1}{n}$, ovvero

$$\max_{x\in M} f(x) = \frac{1}{n}.$$

Per omogeneità deduciamo che $f(x)\leq \frac{1}{n}h(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$ con $x_1,\ldots,x_n\geq 0$. Si ha $f(x)=\frac{1}{n}h(x)$ se e solo se $x_1=\ldots=x_n$.

$\square$

ESERCIZIO Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^3 - t^5, 1 - t^2)$ con $t \in \mathbb{R}$.

1) Stabilire se γ è iniettiva.

2) Nei punti regolari calcolare il vettore tangente unitario $T(t)$

3) Calcolare i limiti $T(0^\pm) = \lim_{t \to 0^\pm} T(t)$ e $T(\pm\infty) = \lim_{t \to \pm\infty} T(t)$

4) Disegnare il supporto di γ.

Risoluzione 1) Abbiamo $\gamma(t) = (t^3(1-t^2), 1-t^2)$ e quindi $\gamma(\pm 1) = (0,0)$. γ non è iniettiva.

2) Derivata: $\dot{\gamma}(t) = (3t^2 - 5t^4, -2t)$ e quindi $\dot{\gamma}(t) = (0,0) \iff t = 0$. Il punto $t=0$ non è regolare. Per $t \neq 0$:

$$T(t) = \frac{(3t^2 - 5t^4, -2t)}{\sqrt{(3t^2 - 5t^4)^2 + 4t^2}} = \frac{t}{|t|} \frac{(3t - 5t^3, -2)}{\sqrt{t^2(3-5t^2)^2 + 4}}$$

3) Limiti

$$T(0^\pm) = \lim_{t \to 0^\pm} \frac{t}{|t|} \frac{(3t - 5t^3, -2)}{\sqrt{t^2(3-5t^2)^2 + 4}} = \pm(0, -1)$$

$$= (0, \mp 1)$$

$$T(\pm\infty) = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{\cancel{t^4}\left(\frac{3}{t^2} - 5, \frac{-2}{t^3}\right)}{\cancel{t^4}\sqrt{\left(\frac{3}{t^2} - 5\right)^2 + \frac{4}{t^6}}} = (-1, 0)$$

4) Poniamo $y = 1 - t^2 \iff t^2 = 1 - y$

e quindi $1 - y \geq 0$ ovvero $y \leq 1$. Ci sono due soluzione $t = \pm\sqrt{1-y}$.

Studio il caso $t = \sqrt{1-y}$:

$$\gamma(t) = \left(t^3 (1-t^2), 1-t^2 \right) = \left((1-y)^{\frac{3}{2}} \cdot y, y \right)$$

Studio il grafico di $f(y) = (1-y)^{\frac{3}{2}} y$, $y \leq 1$.

Derivata:

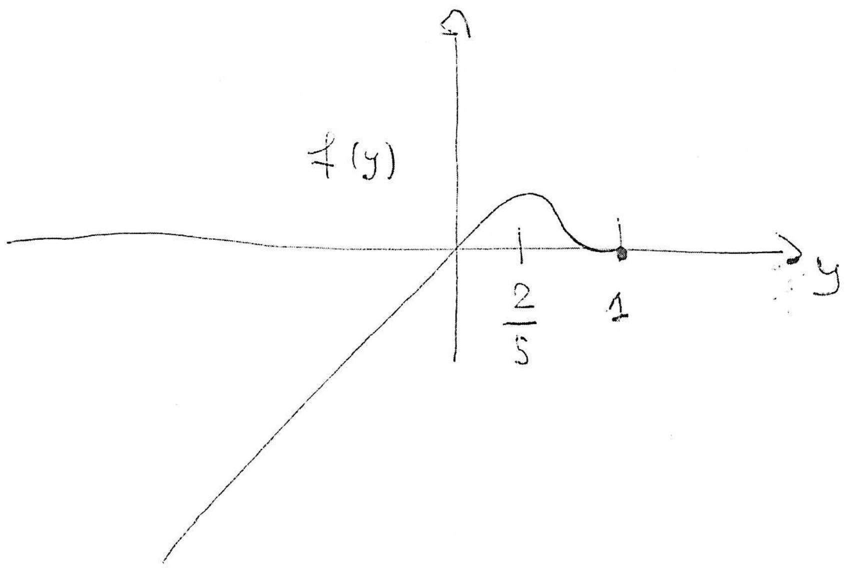
$$f'(y) = (1-y)^{\frac{3}{2}} + y \frac{3}{2} (1-y)^{\frac{1}{2}} (-1)$$

$$= (1-y)^{\frac{1}{2}} \left[1 - y - \frac{3}{2} y \right]$$

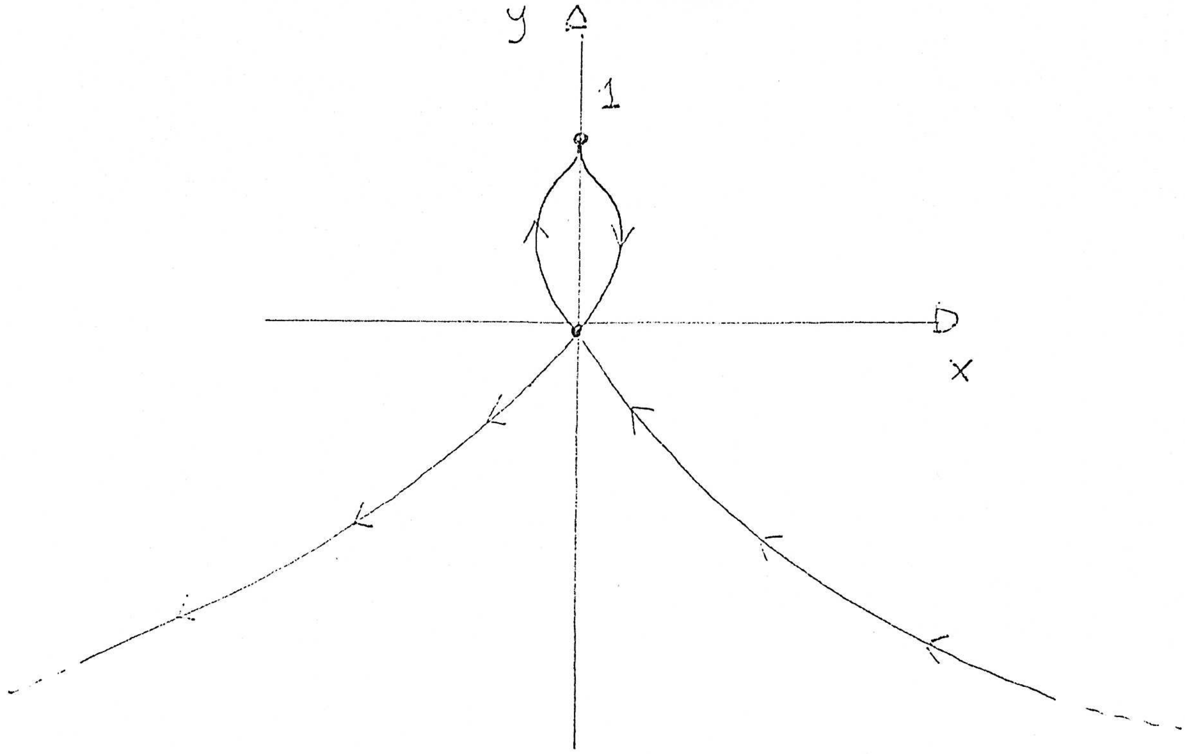
$$= (1-y)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{5}{2} y \right)$$

Dunque in $y = 1$ e $y = \frac{2}{5}$ si ha $f' = 0$.

Grafico approssimativo



Dunque il supporto di γ è fatto così:



$\square$

ESERCIZIO Su $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 0 \}$ si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{xy^2}{x^4+y^4}\, dx - \frac{yx^2}{x^4+y^4}\, dy .$$

(i) Verificare che ω è chiusa in A.

(ii) ~~Verifica~~ Provare che ω è esatta esibendo un potenziale f di ω in A. (Il potenziale deve essere definito in ogni punto di A)

Risoluzione. (i) Verifichiamo che ω è chiusa:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy^2}{x^4+y^4}\right) = \frac{2xy(x^4+y^4) - xy^2 \cdot 4y^3}{(x^4+y^4)^2} = \frac{2yx^5 - 2xy^5}{(x^4+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-yx^2}{x^4+y^4}\right) = - \frac{2xy(x^4+y^4) - yx^2 \cdot 4x^3}{(x^4+y^4)^2} = \frac{2yx^5 - 2xy^5}{(x^4+y^4)^2}$$

Le due espressioni sono identiche su A.

(ii) Cerchiamo $f \in C^1(A)$ tale che

$$(*) \qquad f_x = \frac{xy^2}{x^4+y^4}, \qquad f_y = - \frac{yx^2}{x^4+y^4} .$$

Integriamo la prima equazione in x (integr. indefiniti)

$$f(x,y) = \int \frac{xy^2}{x^4+y^4}\, dx \underset{2x\,dx = d\xi}{\overset{x^2=\xi}{=}} \frac{1}{2}\int \frac{y^2}{\xi^2+y^4}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2y^2}\int \frac{1}{\left(\frac{\xi}{y^2}\right)^2+1}\, d\xi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{y^2}\right) + C(y)$$

È dunque $f(x,y) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y^2}\right) + c(y)$,

Deriviamo in y:

$$f_y = \frac{1}{2} \frac{x^2(-2)y^{-3}}{1+\frac{x^4}{y^4}} + c'(y)$$

$$= \frac{yx^2}{x^4+y^4} + c'(y)$$

Confrontando con la seconda equazione in ⊛ si trova $c'(y) = 0$ e quindi c = costante.

Abbiamo trovato (con $c=0$) il potenziale

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y^2}\right).$$

Questo ancora non basta perché f è definita solo per $y \neq 0$. Tuttavia: per $x_0 \neq 0$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y^2}\right) = +\frac{\pi}{2}.$$

Quindi possiamo definire

$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y^2}\right) & \text{se } y \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } y = 0 \text{ e } x \neq 0 \end{cases}$$

Risulta $f \in C(A)$ e per le ⊛ in effetti $f \in C^1(A)$.

ESERCIZIO Costruire un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ con queste tre proprietà:

1) A aperto;
2) $\mathcal{L}^2(A) < 1$;
3) $\mathcal{L}^2(\partial A) = +\infty$.

Risoluzione. Per numerabilità

$$Q = \mathbb{Q}^2 = \{ q_n \in \mathbb{Q}^2 : n \in \mathbb{N} \}.$$

Siano $r_n > 0$ raggi ed $A_n = \{ x \in \mathbb{R}^2 : |x - q_n| < r_n \}$, $n \in \mathbb{N}$.
L'insieme

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

è aperto in quanto unione di aperti.
Per subadditività:

$$\mathcal{L}^2(A) = \mathcal{L}^2\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^2(A_n) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 .$$

Fissato $\varepsilon > 0$ scegliamo i raggi $r_n = \frac{\varepsilon}{n}$. In questo modo:

$$\mathcal{L}^2(A) \leq \pi \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 \quad \text{su scelta di } \varepsilon > 0.$$

Proviamo che $\partial A = \mathbb{R}^2 \setminus A$. Siccome A è aperto vale l'inclusione $\partial A \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$. Proviamo l'inclusione opposta. Dato $x \in \mathbb{R}^2 \setminus A$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k \in \mathbb{N}$ tale che $|x - q_{n_k}| < \frac{1}{k}$, in quanto $\overline{\mathbb{Q}^2} = \mathbb{R}^2$.
Quindi

$$\lim_{k \to \infty} q_{n_k} = x \qquad \text{con } q_{n_k} \in A$$

e per la caratterizzazione sequenziale della chiusura $x \in \overline{A}$. Siccome $\mathrm{ext}(A) = \emptyset$ deve essere $x \in \partial A$.
Si conclude che $\mathcal{L}^2(\partial A) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2 \setminus A) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2) - \mathcal{L}^2(A) = +\infty$.

$\square$

<u>ESERCIZIO</u> Sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra su $\mathbb{R}^n$ e sia $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Provare che

$$\mathcal{B} = \{ B \subset \mathbb{R} \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \}$$

è una σ-algebra su $\mathbb{R}$.

Risoluzione. 1) $\emptyset \in \mathcal{B}$ vero in quanto $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$.
$\mathbb{R} \in \mathcal{B}$ vero in quanto $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$.

2) Sia $B \in \mathcal{B}$, ovvero $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Ma allora

$$f^{-1}(B') = f^{-1}(B)' \in \mathcal{A}$$

e quindi $B' \in \mathcal{B}$.

3) Siano $B_K \in \mathcal{B}$, $K \in \mathbb{N}$. Allora

$$f^{-1}\left(\bigcup_{K=1}^{\infty} B_K\right) = \bigcup_{K=1}^{\infty} \underbrace{f^{-1}(B_K)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

e quindi $\bigcup_{K=1}^{\infty} B_K \in \mathcal{A}$. $\square$

ESERCIZIO. Costruire una misura esterna su $\mathbb{R}$ che non sia σ-additiva su insiemi disgiunti.

Risoluzione. Partiamo dall'insieme $X = \{0,1\} \subset \mathbb{R}$.

Abbiamo
$$\mathcal{P}(X) = \{\phi, \{0\}, \{1\}, X\}$$
e definiamo $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty)$ così:
$$\mu(\phi) = 0, \quad \mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = 1 \quad e \quad \mu(X) = \frac{3}{2}.$$

Verifica:

1) $\mu(\phi) = 0$ Vero

2) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ Vero

3) $\underset{3/2}{\underset{\parallel}{\mu(X)}} = \mu(\{0\} \cup \{1\}) \leq \mu(\{0\}) + \mu(\{1\}) = 1+1=2$ Vero

È una misura esterna. Ma in 3) l'unione è disgiunta e non vale "=".

Vediamo se $A = \{0\}$ è μ-misurabile:
$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \setminus A) \qquad \forall E \subset X.$$
Con la scelta $E = X$ si trova
$$\frac{3}{2} = \mu(X) \overset{?}{=} \mu(\{0\}) + \mu(\{1\}) = 2$$
Falso. Dunque $\{0\}$ non è μ-misurabile e neppure $\{1\}$.
Gli unici misurabili sono ϕ e X.

Per passare da X ad $\mathbb{R}$ possiamo estendere μ a zero fuori da X. Precisamente, definiamo $\mu : P(\mathbb{R}) \to [0, \infty)$ ponendo

$$\mu(A) = \begin{cases} 3/2 & \text{se } 0, 1 \in A \\ 1 & \text{se } 0 \in A \text{ e } 1 \notin A \\ 1 & \text{se } 0 \notin A \text{ e } 1 \in A \\ 0 & \text{negli altri casi, se } 0 \notin A \text{ e } 1 \notin A. \end{cases}$$

La subadditività numerabile è verificata

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

I ragionamenti sono analoghi a sopra.

$\square$

ESERCIZIO Siano $A = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ ed $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad (x,y) \in A.$$

1) Provare che $f \notin L^1(A)$

2) Provare che esistono i seguenti integrali ripetuti ma sono diversi:

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx.$$

Risoluzione. Consideriamo

$$A^+ = \{ (x,y) \in A : f(x,y) > 0 \}$$
$$= \{ (x,y) \in A : x > y \}.$$

Per il Teorema di Tonelli:

$$\int_{A^+} f(x,y)\, dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \right) dx$$

$$\overset{y=xt}{=} \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2(1-t^2)}{x^4(1+t^2)^2}\, x\, dt \right) dx$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx \right)}_{\text{diverge}} \underbrace{\left(\int_0^1 \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} dt \right)}_{\text{converge}} = +\infty$$

Quindi $f^+ = \max\{0, f\} \notin L^1(A)$ e dunque $f \notin L^1(A)$.

Per $x \in (0,1)$ fissato calcoliamo l'integrale

$$I(x) = \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy \overset{y=xt}{=} \frac{1}{x}\int_0^{1/x} \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\, dt \overset{t=tg(s)}{=} \ldots$$

Integrali indefiniti

$$\int \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\, dt = \int \frac{1-tg^2 s}{1+tg^2 s}\, ds = \int \cos^2 s - \sin^2 s \; ds =$$

$$s = arctg(t)$$

$$ds = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \int \cos 2s \; ds = \frac{1}{2}\sin(2s) = \sin(s)\cos(s) = \frac{t}{(1+t^2)}.$$

Dunque

$$I(x) = \frac{1}{x}\,\frac{1/x}{(1+1/x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

e infine

$$\int_0^1 I(x)\, dx = \Big[\, arctg(x)\Big]_{x=0}^{x=1} = \pi/4.$$

Per simmetria concludiamo che

$$\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx\right) dy = -\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4} = \int_0^1\left(\int_0^1 \ldots\, dy\right) dx,$$

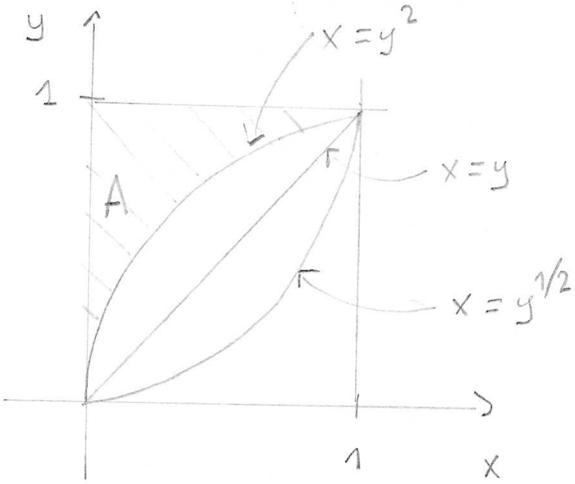
$\square$

ESERCIZIO Fissato $\alpha > 0$ siano $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ 0 < x < y^\alpha < 1 \}$ ed $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{x+1}{y^2} .$$

Stabilire per quali $\alpha > 0$ risulta $f \in L^1(A)$ e in questo caso calcolarne l'integrale.

Risoluzione. L'insieme A è fatto così



Ci aspettiamo che f sia integrabile quando α è "grande".

Osserviamo che f è misurabile e positiva.
Possiamo usare il Teorema di Tonelli:

$$I_\alpha = \int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{y^\alpha} \frac{x+1}{y^2}\,dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{y^2} \left(\int_0^{y^\alpha} (x+1)\,dx \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{y^2} \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{x=0}^{x=y^\alpha} dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{y^2} \left(\frac{1}{2} y^{2\alpha} + y^\alpha \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} y^{2\alpha-2} + y^{\alpha-2} \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{y^{2-2\alpha}} + \frac{1}{y^{2-\alpha}} \right) dy$$

L'integrale converge se e solo se $2-2\alpha<1$ e $2-\alpha<1$ (entrambe) ovvero se e solo se $\alpha>\frac{1}{2}$ e $\alpha>1$.

Dunque l'integrale converge se e solo se $\alpha>1$.

In questo caso si trova

$$I_\alpha = \frac{1}{2}\left[\frac{y^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} + \frac{y^{\alpha-1}}{\alpha-1}\right]_{y=0}^{y=1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\alpha-1} + \frac{1}{\alpha-1}\right).$$

ESERCIZIO Per $\varepsilon > 0$ si consideri il dominio

$$A_\varepsilon = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ \frac{1}{2} x^2 < y < 2x^2 , \ \varepsilon < \sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{\varepsilon} \right\}.$$

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{A_\varepsilon} \frac{|x|}{y(1+y^2)} \, dx dy .$$

Risoluzione. Sia $\varepsilon_k \downarrow 0$ ed

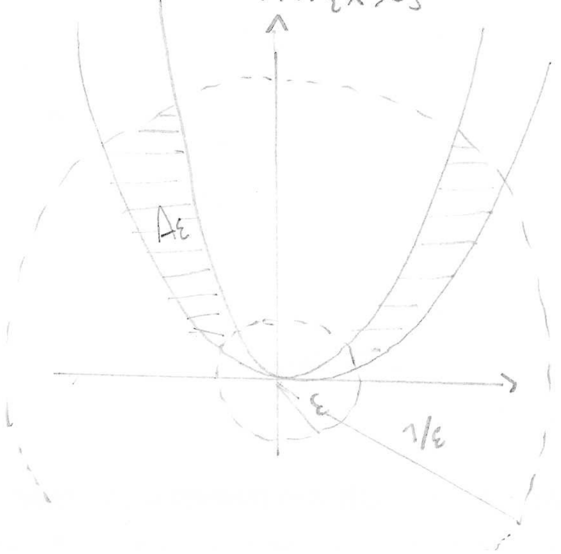
$$f_k(x,y) = \frac{|x|}{y(1+y^2)} \chi_{A_{\varepsilon_k}}(x,y) \geq 0 , \qquad k \in \mathbb{N},$$

le funzioni sono misurabili ed $f_k \leq f_{k+1}$.
Per convergenza monotona:

$$\lim_{k \to \infty} \int_{A_{\varepsilon_k}} \frac{|x|}{y(1+y^2)} \, dx dy = \int_A \frac{|x|}{y(1+y^2)} \, dx dy = I$$

dove $A = \left\{ \frac{1}{2} x^2 < y < 2x^2 \right\}$. Per simmetria

$$I = 2 \int_{A \cap \{x>0\}} \frac{x}{y(1+y^2)} \, dx dy \left(= 2 \int_0^\infty \int_{x^2/2}^{2x^2} \frac{x}{y(1+y^2)} \, dy dx \right)$$



$$= 2 \int_0^\infty \int_{\sqrt{y/2}}^{\sqrt{2y}} \frac{x}{y(1+y^2)} \, dx dy$$

$$= 2 \int_0^\infty \frac{1}{y(1+y^2)} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x^2=y/2}^{x^2=2y} dy =$$

Dunque

$$I = \int_0^\infty \frac{2y - y/2}{y(1+y^2)}\,dy = \frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{3}{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

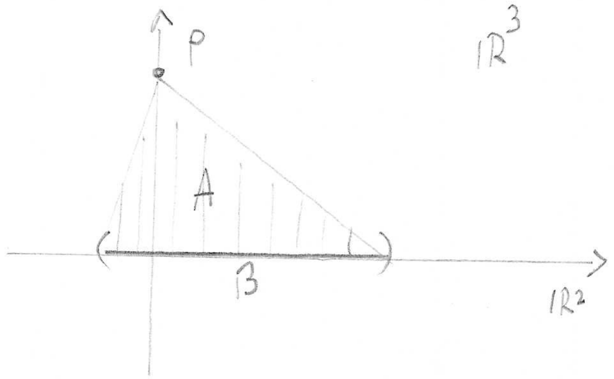
$\square$

ESERCIZIO Sia $B \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ un insieme h^2-misurabile (o anche aperto in $\mathbb{R}^2$) tale che $\mathcal{L}^2(B) = 1$. Fissato il vertice $p = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ si consideri il "cono"

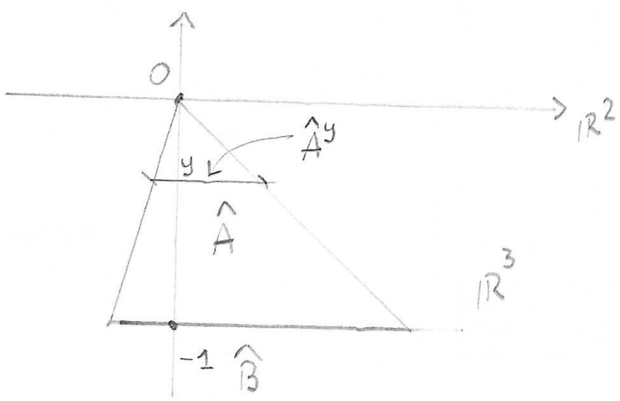
$$A = \{ tx + (1-t)p \in \mathbb{R}^3 : x \in B \text{ e } t \in (0,1) \}.$$

Calcolare $\mathcal{L}^3(A)$.

Risoluzione. Il disegno è questo:



Trasliamo A del vettore $-p$: $\hat{A} = \tau_{-p}(A)$



Con le coordinate $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Per il Teorema di Riduzione:

$$\mathcal{L}^3(A) = \mathcal{L}^3(\hat{A}) = \int_{-1}^{0} \mathcal{L}^2(\hat{A}^y)\,dy \quad \text{dove} \quad \hat{A}^y = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in \hat{A}\}.$$

Osserviamo che $\hat{A} = \{ tx - tp \in \mathbb{R}^3 \,;\, x \in B \,,\, t \in (0,1) \}$

$$= \{ \underbrace{t(x-p)}_{\substack{\shortparallel \\ (tx,\, -t)}} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \in B \,,\, t \in (0,1) \}$$

$$(tx,\, -t) \in \mathbb{R}^3$$

Dunque per $y \in (-1,0)$

$$\hat{A}^y = \{ -yX \in \mathbb{R}^2 \,;\, x \in B \}$$

omotetie di fattore $-y$ di B

Quindi

$$\mathcal{L}^2(\hat{A}^y) = y^2 \, \mathcal{L}^2(B) \,,$$

Concludiamo che

$$\mathcal{L}^3(A) = \mathcal{L}^2(B) \int_{-1}^{0} y^2 \, dy = \frac{1}{3} \mathcal{L}^2(B) .$$

$\square$

Esercizio Detta $B_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < r^2\}$, calcolare il limite

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{e^r} \int_{B_r} e^{|x|+|y|} \, dx\,dy .$$

Risoluzione, Con il cambio di variabile $x = r\xi$ ed $y = r\eta$ si trova

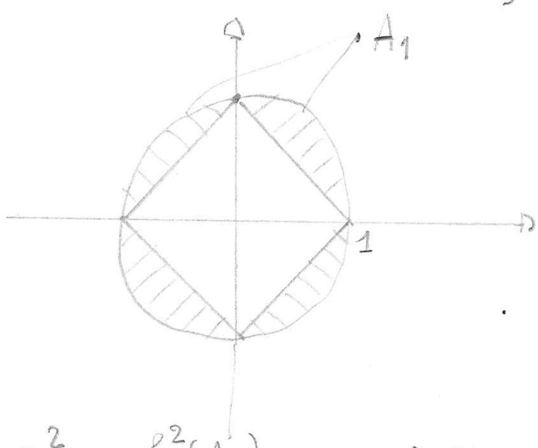
$$\int_{B_r} e^{|x|+|y|} \, dx\,dy = \int_{B_1} e^{r(|x|+|y|)} \, r^2 dx\,dy$$

e quindi

$$\frac{1}{e^r} \int_{B_r} e^{|x|+|y|} \, dx\,dy = r^2 \int_{B_1} \frac{e^{r(|x|+|y|)}}{e^r} \, dx\,dy \geq$$

$$\geq r^2 \int_{A_1} \frac{e^{r(|x|+|y|)}}{e^r} \, dx\,dy = ⊛$$

dove $A_1 = \{(x,y) \in B_1 : |x|+|y| > 1\}$



Dunque $⊛ \geq r^2 \cdot \underset{>0}{\mathcal{L}^2(A_1)} \xrightarrow[r\to\infty]{} \infty .$

□

Esercizio. Dati $a,b>0$ sia $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1\right\}$

Calcolare l'integrale

$$I = \int_A (x^2-y^2)\,dx\,dy.$$

Risoluzione. Per trasformare l'ellisse in un cerchio conviene fare la sostituzione $x=a\xi$ e $y=b\eta$, ovvero poniamo $(x,y)=F(\xi,\eta)$ con $F(\xi,\eta)=(a\xi,b\eta)$.

Osserviamo che

$$(x,y)\in A \iff (\xi,\eta)\in B=\{\xi^2+\eta^2<1\}$$

Inoltre $|\det JF(\xi,\eta)| = ab$ è costante. Dunque

$$I = \int_B (a^2\xi^2-b^2\eta^2)\,ab\,d\xi\,d\eta$$

$$= ab\left\{a^2\int_B \xi^2\,d\xi d\eta - b^2\int_B \eta^2\,d\xi d\eta\right\}.$$

Per simmetria (invarianza rispetto alla rotazione di $\pi/2$) si vede che

$$\int_B \xi^2\,d\xi d\eta = \int_B \eta^2\,d\xi d\xi$$

e quindi

$$\int_B \xi^2\,d\xi d\eta = \frac{1}{2}\int_B (\xi^2+\eta^2)\,d\xi d\eta \quad = \quad \text{Coordinate Polari}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\, r\,dr\,d\theta$$

$$\int_B \xi^2 \, d\xi \, d\eta = \pi \int_0^1 r^3 \, dr = \frac{\pi}{4} .$$

Concludiamo che

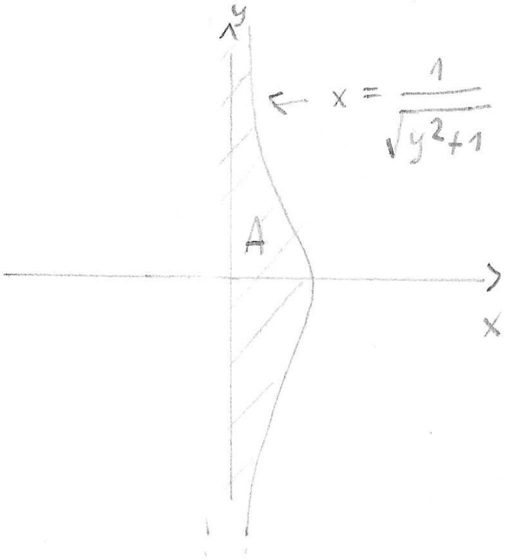
$$I = \frac{\pi}{4} ab \left(a^2 - b^2 \right) .$$

$\square$

Esercizio Detto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2(1+y^2) < 1, x>0\}$ calcolare l'integrale

$$\int_A x^3(1+y^2) \cdot e^{x^2(1+y^2)}\, dx\,dy .$$

Risoluzione. Il dominio di integrazione è



L'~~equazione~~ disequazione che definisce A è: $x^2(1+y^2) < 1 \iff x^2 + x^2y^2 < 1$.

Proviamo a trasformare A in una mezza palla:

$$\begin{cases} x = \xi \\ xy = \eta \end{cases} \iff \begin{cases} x = \xi \\ y = \dfrac{\eta}{\xi} \end{cases} \quad \text{per } \xi \neq 0$$

Definiamo $F(\xi,\eta) = (\xi, \eta/\xi)$, $\xi > 0$

É 1-1 per $\xi>0$. Matrice Jacobiana:

$$JF(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\eta}{\xi^2} & \dfrac{1}{\xi} \end{pmatrix},$$

$$|\det JF(\xi,\eta)| = \frac{1}{|\xi|} = \frac{1}{\xi}.$$

É un diffeomorfismo per $\xi > 0$.

Dunque, con $B = \{ \xi^2+\eta^2 < 1,\ \xi > 0 \}$

$$\int_A x^3(1+y^2)\, e^{x^2(1+y^2)}\, dx\, dy = \int_B \xi^3\left(1+\eta^2/\xi^2\right) e^{\xi^2(1+\eta^2/\xi^2)}\, \frac{1}{\xi}\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \int_B (\xi^2+\eta^2)\, e^{\xi^2+\eta^2}\, d\xi\, d\eta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 r^2 e^{r^2}\, r\, dr\, d\vartheta = \pi \int_0^1 r^3 e^{r^2}\, dr$$

$$= \pi \int_0^1 r^2 \frac{1}{2} \left(e^{r^2}\right)'\, dr = \frac{\pi}{2}\left\{ r^2 e^{r^2}\Big|_{r=0}^{r=1} - \int_0^1 2r\, e^{r^2}\, dr \right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{ e - \left[e^{r^2} \right]_{r=0}^{r=1} \right\} = \frac{\pi}{2}\,.$$

$\square$

Esercizio Dire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ converge il seguente integrale e quindi calcolarlo

$$I_\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\left(1+(|x|+|y|)^2\right)^\alpha}\, dx\,dy .$$

Risoluzione. La funzione integrande è continue (misurabile) e positiva, l'integrale è ben definito. Tuttavia la sua simmetria non si adatta bene alle coordinate polari.
Sia

$$f(x,y) = \frac{1}{\left(1+(|x|+|y|)^2\right)^\alpha} .$$

Noi sappiamo che (Formula di integrazione per sopralivelli)

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^\infty \mathcal{L}^2(\underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y) > t\}}_{= E_t})\,dt$$

$$= \int_0^1 \mathcal{L}^2(E_t)\,dt ,$$

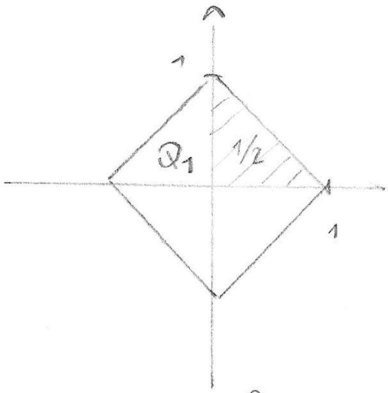
perché $E_t = \emptyset$ per $t \geq 1$.
Osserviamo che

$$(x,y) \in E_t \iff \frac{1}{\left(1+(|x|+|y|)^2\right)^\alpha} > t$$

$$\iff 1 + (|x|+|y|)^2 < \frac{1}{t^{1/\alpha}}$$

$$\iff |x| + |y| < \sqrt{\frac{1}{t^{1/\alpha}} - 1} .$$

L'insieme $Q_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1 \}$ è fatto così:



Quindi $\mathcal{L}^2(Q_1) = 2$. Posto $Q_s = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < s \}$

deduciamo che $\mathcal{L}^2(Q_s) = 2s^2$.

Nel nostro caso: $E_t = Q_{\sqrt{\frac{1}{t^{1/\alpha}} - 1}}$ e dunque:

$$I_\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = \int_0^1 \mathcal{L}^2\left(Q_{\sqrt{\frac{1}{t^{1/\alpha}} - 1}} \right) dt$$

$$= 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{t^{1/\alpha}} - 1 \right) dt.$$

Questo integrale converge se e solo se $\alpha > 1$.

In questo caso si trova:

$$I_\alpha = 2 \left[\frac{t^{-\frac{1}{\alpha}+1}}{-\frac{1}{\alpha}+1} - t \right]_{t=0}^{t=1} = 2 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha}} - 1 \right)$$

$$= 2 \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} - 1 \right) = 2 \frac{1}{\alpha - 1}.$$