

Analisi Matematica 2B

Roberto Monti

MATEMATICA – ANNO ACCADEMICO 2021-22

APPUNTI DEL CORSO – 14 GIUGNO 2022

Indice

Capitolo 1. Estremi vincolati su sottovarietà differenziabili di \mathbb{R}^n	5
1. Introduzione euristica al concetto di “insieme regolare”	5
2. Sottovarietà e parametrizzazioni	6
3. Spazio tangente e spazio normale	9
4. Massimi e minimi vincolati. Moltiplicatori di Lagrange	11
5. Esercizi su sottovarietà	13
6. Esercizi su massimi e minimi vincolati	15
Capitolo 2. Curve e 1-forme differenziali in \mathbb{R}^n	17
1. Curve regolari e curve rettificabili in \mathbb{R}^n	17
2. Integrali curvilinei	21
3. 1-forme differenziali in \mathbb{R}^n : forme chiuse e forme esatte	22
4. Integrazione di 1-forme differenziali lungo curve	24
5. Teorema di Poincaré	26
6. Esercizi su curve e integrali curvilinei	27
7. Esercizi su 1-forme differenziali	30
Capitolo 3. Misura ed integrale di Lebesgue	33
1. Misure esterne e misure	33
2. Costruzione della misura di Lebesgue e proprietà di regolarità	36
3. Proprietà di invarianza per \mathcal{L}^n e misure di Hausdorff	39
4. Funzioni misurabili e boreliane	41
5. Costruzione dell’integrale di Lebesgue e sue proprietà	43
6. Teorema di riduzione e teorema di Fubini-Tonelli	48
7. Cambio di variabile nell’integrale di Lebesgue	49
8. Integrale di Riemann e integrale di Lebesgue	53
9. Esercizi su misura di Lebesgue e funzioni misurabili	55
10. Esercizi sull’integrale di Lebesgue	56
Capitolo 4. Integrazione su volumi e superfici	59
1. Area ed integrali di superficie	59
2. Formula di coarea. Coordinate sferiche e cilindriche	64
3. Teoremi della divergenza e del rotore	67
4. Esercizi	71

Ringraziamenti. Vorrei ringraziare Francesco Mosca per le sue numerose segnalazioni di tante piccole imperfezioni

CAPITOLO 1

Estremi vincolati su sottovarietà differenziabili di \mathbb{R}^n

In questo capitolo formalizziamo l'idea di “insieme regolare” e studiamo il problema di minimizzare una funzione vincolata su un tale insieme.

1. Introduzione euristica al concetto di “insieme regolare”

Le espressioni “insieme regolare” o “insieme liscio” si riferiscono ad un insieme con spazio tangente in tutti i punti che varia in modo regolare al muoversi del punto. Ci sono tre possibili modi di formalizzare questa idea:

- 1) Introdurre la nozione di *sottovarietà differenziabile di \mathbb{R}^n* tramite un'equazione locale.
- 2) Parametrizzare, se possibile, un sottoinsieme di \mathbb{R}^n tramite una *parametrizzazione regolare*.
- 3) Introdurre la nozione astratta di *varietà differenziabile*, senza fare riferimento allo spazio ambiente \mathbb{R}^n .

In questa sezione discuteremo i punti di vista 1) e 2). La definizione astratta di varietà differenziabile è il punto di partenza della Geometria Differenziale.

ESEMPIO 1.1 (Cono). Il sottoinsieme M di \mathbb{R}^3

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}.$$

è un cono circolare retto con asse z . M è “regolare” in tutti i punti all'infuori del vertice $0 = (0, 0, 0) \in M$. L'insieme M è il luogo degli zeri della funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Il gradiente di f , $\nabla f = 2(x, y, -z)$, si annulla (ovvero non ha rango massimo) solo nel punto $0 \in M$:

$$|\nabla f(x, y, z)| \neq 0 \quad \text{per ogni } (x, y, z) \in M \setminus \{0\}.$$

L'insieme $M \setminus \{0\}$ è una superficie 2-dimensionale “liscia”.

ESEMPIO 1.2 (Paraboloide). Il sottoinsieme M di \mathbb{R}^3

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z = 0\}.$$

è un paraboloide di rotazione con asse z e vertice $0 \in \mathbb{R}^3$. L'insieme M è il luogo degli zeri della funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z.$$

Il gradiente di f , $\nabla f = (2x, 2y, -1)$, non si annulla mai. In effetti, la derivata parziale $f_z = -1$ non si annulla mai e coerentemente con il Teorema della funzione implicita, M è il grafico della funzione $z = x^2 + y^2$.

ESEMPIO 1.3 (Parametrizzazione). Sia $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3)$ e indichiamo con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ le variabili del piano. L'insieme $M = \varphi(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ è parametrizzato da φ . Se le derivate parziali di φ

$$\begin{aligned}\varphi_u &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \right) \\ \varphi_v &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \right)\end{aligned}$$

sono vettori di \mathbb{R}^3 *linearmente indipendenti* in tutti i punti, equivalentemente se la matrice Jacobiana

$$J\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

ha rango 2 (massimo), allora M è una superficie di dimensione 2 con piano tangente generato dai vettori φ_u e φ_v .

Questa superficie, tuttavia, potrebbe avere “autointersezioni”. Anche la richiesta su φ di essere iniettiva non esclude la possibilità di “punti singolari”.

ESEMPIO 1.4 (Curva regolare che si richiude). Sia $A = (-\infty, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ e sia $\gamma : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ la funzione (curva)

$$\gamma(t) = \begin{cases} (0, -t) & t \in (-\infty, 0), \\ (1 - \cos t, -\sin t), & t \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

La curva γ verifica le seguenti proprietà:

- i) $\gamma \in C^1(A; \mathbb{R}^2)$. In particolare, nel punto $t = 0$ le derivate si raccordano in modo continuo.
- ii) γ è regolare, ovvero $|\dot{\gamma}(t)| \neq 0$ per ogni $t \in A$. In altri termini, la matrice Jacobiana J_γ ha rango 1 (massimo).
- iii) $\gamma : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ è iniettiva.

L'insieme immagine $X = \gamma(A) \subset \mathbb{R}^2$, il sostegno della curva, presenta tuttavia una “singolarità” nel punto $0 \in X$.

Nella definizione di “parametrizzazione regolare” vogliamo impedire simili fenomeni. Il problema ha origine dalla *non continuità* della funzione inversa $\gamma^{-1} : X \rightarrow A$ nel punto $0 \in X$.

2. Sottovarietà e parametrizzazioni

Iniziamo con la definizione di sottovarietà differenziabile di \mathbb{R}^n .

DEFINIZIONE 1.5 (Sottovarietà). Un insieme $M \subset \mathbb{R}^n$ è una *sottovarietà differenziabile* di \mathbb{R}^n di classe C^k , $k \geq 1$, e di dimensione d , con $1 \leq d \leq n - 1$, se per ogni $\bar{x} \in M$ esistono $\delta > 0$ ed $f \in C^k(B_\delta(\bar{x}); \mathbb{R}^{n-d})$ tali che:

- i) $B_\delta(\bar{x}) \cap M = \{x \in B_\delta(\bar{x}) : f(x) = 0\}$;
- ii) $\text{rango}(J_f(x)) = n - d$ in ogni punto $x \in B_\delta(\bar{x})$ (ipotesi di rango massimo).

L'equazione $f = 0$ si dice *equazione locale* di M in un intorno di \bar{x} . La funzione f si dice *funzione definiente (locale)* per M .

La convenzione di indicare le (sotto)varietà con il simbolo M ha origine dai termini tedesco *Mannigfaltigkeit* e inglese *manifold*. I grafici (di classe C^k) sono sempre sottovarietà differenziabili.

ESEMPIO 1.6 (Grafico). Sia $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ con $1 \leq d \leq n-1$. Siano poi $A \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto e $\varphi \in C^k(A; \mathbb{R}^{n-d})$, con $k \geq 1$. Il grafico

$$M = \text{gr}(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^n : x \in A\}$$

è una sottovarietà differenziabile di \mathbb{R}^n di dimensione d e di classe C^k . Infatti, un'equazione (in effetti globale) per M è $f = 0$ con $f : A \times \mathbb{R}^{n-d} \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$

$$f(x, y) = y - \varphi(x).$$

La matrice Jacobiana di f

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} -J_\varphi(x) & I_{n-d} \end{pmatrix}$$

ha rango massimo $n-d$ in ogni punto.

ESEMPIO 1.7 (Ipersuperfici). Sia $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ una funzione tale che $\text{rango}(J_f(x)) = 1$ per ogni $x \in M = \{f = 0\}$, ovvero $|\nabla f(x)| \neq 0$ per ogni $x \in M$. Allora l'insieme $M = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$ è una sottovarietà differenziabile di \mathbb{R}^n di dimensione $d = n-1$. La sottovarietà M si dice *ipersuperficie* di \mathbb{R}^n .

ESEMPIO 1.8 (Rango massimo e trasversalità). Nel caso di dimensione generale $d \geq 1$, l'equazione $f = 0$ con $f \in C^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n-d})$ è un sistema di $n-d$ equazioni

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ \vdots \\ f_{n-d} = 0. \end{cases}$$

L'ipotesi di rango massimo $\text{rango}(J_f(x)) = n-d$ significa che le righe della matrice Jacobiana $J_f(x)$ sono linearmente indipendenti, ovvero che i vettori $\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_{n-d}(x)$ sono linearmente indipendenti per ogni $x \in M$. In particolare, $\nabla f_i(x) \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n-d$ e dunque l'equazione $f_i = 0$ definisce una ipersuperficie $M_i = \{f_i = 0\} \subset \mathbb{R}^n$. Richiedere che i gradienti siano linearmente indipendenti significa richiedere che le ipersuperfici M_1, \dots, M_{n-d} si intersecano in modo trasversale e definiscono un insieme regolare $M = M_1 \cap \dots \cap M_{n-d}$ di dimensione d .

ESEMPIO 1.9. Sia $M \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme dei punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 0. \end{cases}$$

Verifichiamo che M è una sottovarietà differenziabile di \mathbb{R}^3 di classe C^∞ e di dimensione $d = 1$. In altri termini, M è una curva di classe C^∞ . Infatti, la matrice Jacobiana della funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^3 + y^3 + z^3)$

$$Jf = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{pmatrix}$$

ha rango 2 in tutti i punti di M .

Introduciamo ora la definizione di parametrizzazione regolare di un insieme.

DEFINIZIONE 1.10 (Parametrizzazione regolare). Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un insieme. Una funzione $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $A \subset \mathbb{R}^d$ insieme aperto, è una *parametrizzazione regolare* di X di classe C^k , $k \geq 1$, e di rango $d \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ se:

- i) $\varphi \in C^k(A; \mathbb{R}^n)$;
- ii) $\varphi : A \rightarrow X$ è iniettiva e suriettiva;
- iii) $\text{rango}(J_\varphi(\xi)) = d$ per ogni $\xi \in A$;
- iv) $\varphi^{-1} : X \rightarrow A$ è continua, ovvero $\varphi : A \rightarrow X$ è aperta.

Diremo in questo caso che l'insieme X è parametrizzato da φ in modo regolare.

Nell'Esempio 1.4, dunque, non si ha una parametrizzazione regolare, in quanto non è verificata la condizione iv). Le nozioni di sottovarietà differenziabile e di parametrizzazione (regolare) identificano la stessa classe di oggetti.

TEOREMA 1.11. Siano $M \subset \mathbb{R}^n$, $k \geq 1$ e $1 \leq d \leq n-1$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- A) M è una sottovarietà differenziabile di \mathbb{R}^n di dimensione d e di classe C^k .
- B) Per ogni punto $\bar{x} \in M$ esiste $r > 0$ tale che l'insieme $M \cap B_r(\bar{x})$ ha una parametrizzazione regolare di classe C^k e rango d .

Dim. A) \Rightarrow B). Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ una sottovarietà di classe C^k e dimensione d e fissiamo un punto $\bar{x} \in M$. Per ipotesi esistono $r > 0$ ed $f \in C^k(B_r(\bar{x}); \mathbb{R}^{n-d})$ tali che $M \cap B_r(\bar{x}) = \{f = 0\}$ e la matrice Jacobiana $J_f(x)$ ha rango massimo $n-d$ per ogni $x \in M \cap B_r(\bar{x})$. Con la notazione $x = (\xi, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$, possiamo senza perdere di generalità supporre che su $M \cap B_r(\bar{x})$ si abbia

$$\det \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \neq 0.$$

Sia $\bar{x} = (\bar{\xi}, \bar{y})$. Per il Teorema di Dini esistono $\delta, \eta > 0$ ed una funzione $\psi \in C^k(B_\delta(\bar{\xi}); B_\eta(\bar{y}))$ tali che

$$\{x \in B_\delta(\bar{\xi}) \times B_\eta(\bar{y}) : f(x) = 0\} = \{(\xi, \psi(\xi)) : \xi \in B_\delta(\bar{\xi})\}.$$

La funzione $\varphi : B_\delta(\bar{\xi}) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(\xi) = (\xi, \psi(\xi))$, è di classe C^k e parametrizza $M \cap B_\delta(\bar{\xi}) \times B_\eta(\bar{y})$. Infatti, φ è iniettiva e suriettiva sull'immagine, la matrice Jacobiana $J_\varphi(\xi)$ ha rango massimo d , e la funzione inversa φ^{-1} verifica $\varphi^{-1}(\xi, \psi(\xi)) = \xi$ e dunque è continua.

Abbiamo in effetti dimostrato che M è localmente un grafico di funzione.

B) \Rightarrow A). Sia $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, A aperto di \mathbb{R}^d , una parametrizzazione regolare di classe C^k dell'insieme $M \cap B_r(\bar{x})$, con $\bar{x} \in M$ ed $r > 0$. Per ipotesi, la matrice Jacobiana $J_\varphi(\xi)$ ha rango massimo d per ogni $\xi \in A$. Con la notazione $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, dove $\varphi_1 : A \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $\varphi_2 : A \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$, possiamo senza perdere generalità supporre che su A si abbia

$$\det \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} \right) \neq 0.$$

Sia $\bar{\xi} = \varphi^{-1}(\bar{x})$. Per il Teorema di invertibilità locale esiste $\delta > 0$ tale che $\varphi_1 \in C^k(B_\delta(\bar{\xi}); \mathbb{R}^d)$ è un diffeomorfismo sull'immagine. In particolare, l'insieme $B =$

$\varphi_1(B_\delta(\bar{\xi}))$ è aperto, perchè φ_1 è aperta. Consideriamo la funzione inversa $\varphi_1^{-1} \in C^k(B; \mathbb{R}^d)$. Innanzitutto, per ogni $\xi \in B$ si ha

$$\varphi(\varphi_1^{-1}(\xi)) = (\varphi_1(\varphi_1^{-1}(\xi)), \varphi_2(\varphi_1^{-1}(\xi))) = (\xi, \varphi_2(\varphi_1^{-1}(\xi))).$$

Questo suggerisce di definire la funzione $\psi : B \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$

$$\psi(\xi) = \varphi_2(\varphi_1^{-1}(\xi)), \quad \xi \in B.$$

Risulta $\psi \in C^k(B; \mathbb{R}^{n-d})$. Siccome per ipotesi φ^{-1} è continua, iniettiva e suriettiva, allora φ è aperta e quindi l'insieme $\varphi(\varphi_1^{-1}(B)) \subset M$ è aperto relativamente a M , e contiene il punto \bar{x} . Quindi esiste $\eta > 0$ tale che $M \cap B_\eta(\bar{x}) \subset \varphi(\varphi_1^{-1}(B))$. Si conclude che esiste un aperto $B_0 \subset B$ tale che

$$M \cap B_\eta(\bar{x}) = \{(\xi, \psi(\xi)) \in \mathbb{R}^n : \xi \in B_0\}.$$

Dunque, M è localmente un grafico di funzione e la tesi segue per le considerazioni fatte nell'Esempio 1.6. \square

3. Spazio tangente e spazio normale

Iniziamo con la definizione di spazio tangente.

DEFINIZIONE 1.12 (Spazio tangente). Sia M una sottovarietà differenziabile di \mathbb{R}^n di classe C^k , $k \geq 1$, e di dimensione d . Lo spazio tangente a M in un punto $x \in M$ è l'insieme $T_x M \subset \mathbb{R}^n$ costituito da tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^n$ tali che esista una curva $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow M$, $\delta > 0$, di classe C^1 che verifica $\gamma(0) = x$ e $\dot{\gamma}(0) = v$.

Nelle varietà astratte, lo spazio tangente si introduce come spazio di "derivazioni". Una conseguenza del seguente teorema è che lo spazio tangente è uno spazio vettoriale di dimensione d .

TEOREMA 1.13. Sia M una sottovarietà differenziabile di \mathbb{R}^n di classe C^k e di dimensione d , e sia $T_x M$ lo spazio tangente a M in un punto $x \in M$. Allora:

i) Se $f = 0$ è un'equazione locale per M in un intorno di x , si ha

$$T_x M = \text{Ker } df(x) = \{v \in \mathbb{R}^n : df(x)v = 0\},$$

dove $df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ è il differenziale di f in x .

ii) Se $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una parametrizzazione locale di M , con $A \subset \mathbb{R}^d$ aperto e $x = \varphi(\xi)$ con $\xi \in A$, allora

$$T_x M = \text{Im } d\varphi(\xi) = \{d\varphi(\xi)w \in \mathbb{R}^n : w \in \mathbb{R}^d\},$$

dove $d\varphi(\xi) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ è il differenziale di φ in ξ .

Dim. i) Proviamo che $T_x M \subset \text{Ker } df(x)$. Sia $v \in T_x M$ e consideriamo una curva differenziabile $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ tale che $\gamma(0) = x$ e $\dot{\gamma}(0) = v$. Poichè $f = 0$ è un'equazione locale per M intorno a x , si ha $f(\gamma(t)) = 0$ per ogni $t \in (-\delta, \delta)$. Dalla regola per la derivata della funzione composta si ottiene

$$0 = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = df(\gamma(t))\dot{\gamma}(t),$$

e per $t = 0$ si trova $df(x)v = 0$, ovvero $v \in \text{Ker } df(x)$.

Proviamo l'inclusione $\text{Ker } df(x) \subset T_x M$. Sia $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $df(x)v = 0$. Si deve costruire una curva $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ di classe C^1 tale che $\gamma(0) = x$ e $\dot{\gamma}(0) = v$. Per

ipotesi, il rango di $df(x)$ è $n-d$. Con la notazione $(\xi, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$, non è restrittivo supporre che risulti

$$\det \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \neq 0$$

in un intorno di $x = (\bar{\xi}, \bar{y}) \in M$. Per il Teorema di Dini esiste una funzione $\varphi : B_\delta(\bar{\xi}) \rightarrow B_\eta(\bar{y})$ di classe C^k , con $\delta, \eta > 0$, tale che $\xi \mapsto (\xi, \varphi(\xi))$ parametrizza localmente l'insieme M intorno al punto $x = (\bar{\xi}, \varphi(\bar{\xi}))$ e

$$J_\varphi(\xi) = \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial \xi} = - \left(\frac{\partial f(\xi, \varphi(\xi))}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial f(\xi, \varphi(\xi))}{\partial \xi}.$$

Se $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$, allora $\bar{\xi} + tv_1 \in B_\delta(\bar{\xi})$ per $t \in (-\delta, \delta)$. La curva $\gamma(t) = (\bar{\xi} + tv_1, \varphi(\bar{\xi} + tv_1))$ verifica $\gamma(0) = (\bar{\xi}, \varphi(\bar{\xi})) = x$, e inoltre

$$\dot{\gamma}(0) = \left(v_1, \frac{\partial \varphi(\bar{\xi})}{\partial \xi} v_1 \right).$$

Per ipotesi si ha $df(x)v = 0$ e cioè

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \xi} v_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial y} v_2 = 0,$$

da cui si ricava

$$v_2 = - \left(\frac{\partial f(x)}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial f(x)}{\partial \xi} v_1 = \frac{\partial \varphi(\bar{\xi})}{\partial \xi} v_1.$$

Questo prova che $\dot{\gamma}(0) = v$. La dimostrazione che $T_x M = \text{Ker}(df(x))$ è con ciò terminata.

Siccome $\text{Ker } df(x)$ è uno spazio vettoriale, allora $T_x M$ è uno spazio vettoriale. Per il teorema delle dimensioni, la sua dimensione è $\dim(T_x M) = \dim(\text{Ker } df(x)) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\text{Im } df(x)) = n - (n-d) = d$.

ii) Sia φ una parametrizzazione di M intorno al punto $x = \varphi(\xi)$ e supponiamo che sia $v = d\varphi(\xi)w \in \mathbb{R}^n$ per un certo $w \in \mathbb{R}^d$. La curva $\gamma(t) = \varphi(\xi + tw)$, $t \in (-\delta, \delta)$, verifica $\gamma(0) = \varphi(\xi) = x$ e $\dot{\gamma}(0) = d\varphi(\xi)w = v$. Questo prova che $\text{Im } d\varphi(\xi) \subset T_x M$.

D'altra parte $d\varphi(\xi)$ ha rango d e dunque $\text{Im } d\varphi(\xi)$ è uno spazio vettoriale di dimensione d . Ma $T_x M$ ha dimensione d , e dunque deve necessariamente essere $\text{Im } d\varphi(\xi) = T_x M$. \square

ESEMPIO 1.14. Sia $M = \{f = 0\}$ una ipersuperficie, con $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $\nabla f \neq 0$ su M . Lo spazio tangente in un punto $x \in M$ è

$$T_x M = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla f(x), v \rangle = 0\}.$$

Dunque, il vettore $\nabla f(x) \neq 0$ è ortogonale a $T_x M$. Il vettore normalizzato

$$N(x) = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}, \quad x \in M,$$

si dice *campo normale* alla superficie. Localmente, il campo normale è definito in modo unico a meno del segno.

Una ipersuperficie $M \subset \mathbb{R}^n$ su cui è possibile definire un campo normale continuo globale si dice *orientabile*. Il nastro di Möbius non è orientabile (si veda l'Esercizio 1.7).

DEFINIZIONE 1.15 (Spazio normale). Sia $M = \{f = 0\}$ una sottovarietà di \mathbb{R}^n di dimensione $d \in \{1, \dots, n-1\}$, con funzione definiente $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n-d})$, $f = (f_1, \dots, f_{n-d})$. Lo spazio tangente a M in un punto x è

$$T_x M = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla f_1(x), v \rangle = \dots = \langle \nabla f_{n-d}(x), v \rangle = 0\}.$$

Dunque, i vettori $\nabla f_1, \dots, \nabla f_{n-d}$, ovvero le righe della matrice Jacobiana J_f , sono linearmente indipendenti e sono ortogonali allo spazio tangente. Lo spazio vettoriale $(n-d)$ -dimensionale generato da $\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_{n-d}(x)$ si dice *spazio normale* alla varietà M nel punto $x \in M$.

ESEMPIO 1.16. Sia $\psi \in C^1(A)$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, una funzione con grafico $M = \{(x, \psi(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in A\}$. Una funzione definiente per M è $f(x, x_{n+1}) = x_{n+1} - \psi(x)$. Lo spazio tangente a M nel punto $p = (x_0, f(x_0)) \in M$ è

$$T_p M = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle \nabla f(p), v \rangle = 0\},$$

dove

$$\nabla f(p) = (-\nabla \psi(x_0), 1), \quad x_0 \in A.$$

I vettori in \mathbb{R}^{n+1}

$$v_i = \left(e_i, \frac{\partial \psi(x_0)}{\partial x_i} \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

sono linearmente indipendenti e verificano $v_i \in T_p M$. Dunque formano una base per lo spazio tangente:

$$T_p M = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i v_i : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (x, \langle \nabla \psi(x_0), x \rangle) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Dunque lo spazio tangente è il grafico della funzione $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \langle \nabla \psi(x_0), x \rangle$. Di conseguenza, lo spazio tangente affine passante per il punto p è il grafico della funzione

$$h(x) = \psi(x_0) + \langle \nabla \psi(x_0), x - x_0 \rangle.$$

4. Massimi e minimi vincolati. Moltiplicatori di Lagrange

Nel seguito sarà sempre $n \geq 2$.

DEFINIZIONE 1.17. Siano $M \subset \mathbb{R}^n$ un insieme, $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

- i) Diciamo che un punto $x_0 \in M \cap A$ è un punto di minimo locale di f ristretta (o vincolata) su M se esiste $\delta > 0$ tale che $B_\delta(x_0) \subset A$ e

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in M \cap B_\delta(x_0).$$

- ii) Diciamo che un punto $x_0 \in M \cap A$ è un punto di massimo locale di f ristretta (o vincolata) su M se esiste $\delta > 0$ tale che $B_\delta(x_0) \subset A$ e

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in M \cap B_\delta(x_0).$$

Nei casi i) e ii) diremo che x_0 è un punto di *estremo locale di f su M* .

L'insieme M è talvolta chiamato *vincolo*.

TEOREMA 1.18 (Moltiplicatori di Lagrange). Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $f \in C^1(A)$ ed $M \subset A$ una sottovarietà differenziabile di dimensione $1 \leq d \leq n - 1$ con funzione definiente $h \in C^1(A; \mathbb{R}^{n-d})$. Se $\bar{x} \in A \cap M$ è un punto di estremo locale di f su M , allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d} \in \mathbb{R}$, detti *moltiplicatori di Lagrange*, tali che

$$(1.1) \quad \nabla f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n-d} \lambda_j \nabla h_j(\bar{x}).$$

Dim. Fissiamo la notazione $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$. A meno di una rotazione del sistema di coordinate possiamo supporre che (ipotesi di rango massimo)

$$\det \left(\frac{\partial h(\bar{x})}{\partial x''} \right) \neq 0.$$

Per il Teorema della funzione implicita esistono $\delta, \eta > 0$ ed una funzione $\varphi \in C^1(B_\delta(\bar{x}'); B_\eta(\bar{x}''))$ tali che

$$\begin{aligned} \{(x', \varphi(x')) \in \mathbb{R}^n : x \in B_\delta(\bar{x}')\} &= \{x \in B_\delta(\bar{x}') \times B_\eta(\bar{x}'') : h(x) = 0\} \\ &= M \cap B_\delta(\bar{x}') \times B_\eta(\bar{x}''). \end{aligned}$$

La funzione $g \in C^1(B_\delta(\bar{x}'))$, $g(x') = f(x', \varphi(x'))$, ha in \bar{x}' un punto di estremo locale. Dunque, si ha $\nabla g(\bar{x}') = 0$ e precisamente:

$$\frac{\partial g(\bar{x}')}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x''} \frac{\partial \varphi(\bar{x}')}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, d.$$

D'altra parte, dal fatto che $h(x', \varphi(x')) = 0$ deduciamo che

$$\frac{\partial h(\bar{x})}{\partial x_i} + \frac{\partial h(\bar{x})}{\partial x''} \frac{\partial \varphi(\bar{x}')}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, d.$$

La tesi segue scegliendo il vettore

$$\lambda = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x''} \left(\frac{\partial h(\bar{x})}{\partial x''} \right)^{-1} \in \mathbb{R}^{n-d}.$$

□

Nel caso che M sia una ipersuperficie, ovvero $d = n - 1$, l'equazione (1.1) diventa $\nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla h(\bar{x})$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, il gradiente di f è parallelo al gradiente del vincolo ovvero al campo normale della superficie.

OSSERVAZIONE 1.19. Supponiamo che sia $M = \{x \in A : h(x) = 0\}$ con $h \in C^\infty(A; \mathbb{R}^{n-d})$ che non verifica la condizione di rango massimo nel punto $\bar{x} \in M$ dove f assume un minimo o un massimo. Purtroppo in questo caso non è possibile ottenere la condizione necessaria (1.1) data dal Teorema sui moltiplicatori di Lagrange. Che fare?

ESEMPIO 1.20 (Interpretazione variazionale degli autovalori). Sia $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ una matrice $n \times n$ simmetrica, $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$, e indichiamo con $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ i suoi n autovalori. Proveremo che

$$\min_{|x|=1} \langle Ax, x \rangle = \lambda_1 \quad \text{e} \quad \max_{|x|=1} \langle Ax, x \rangle = \lambda_n.$$

Siano $h(x) = |x|^2 - 1$ la funzione di vincolo ed $f(x) = \langle Ax, x \rangle$. La superficie sferica $M = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$ è compatta e dunque f assume massimo e minimo su M .

Sia $x \in M$ un punto in cui è assunto il minimo. Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x) = \lambda \nabla h(x)$. Calcoliamo le derivate parziali di f . Per $k = 1, \dots, n$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i,j=1}^m a_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} (\delta_{ik} x_j + x_i \delta_{jk}) = \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i = 2 \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j.$$

Abbiamo usato il fatto che la matrice A è simmetrica e il simbolo di Kronecker $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Dunque si ha il sistema di equazioni

$$\begin{cases} Ax = \lambda x \\ |x| = 1. \end{cases}$$

Questo prova che λ è un autovalore di A e che x è un corrispondente autovettore. Proviamo che $\lambda = \lambda_1$. Sia x_i un autovettore relativo all'autovalore λ_i , con $i = 1, \dots, n$ e $|x_i| = 1$. Allora si ha per ogni i

$$\lambda = \langle Ax, x \rangle = f(x) \leq f(x_i) = \langle Ax_i, x_i \rangle = \lambda_i,$$

e quindi λ è il minimo degli autovalori.

In modo analogo si prova l'affermazione sul massimo degli autovalori.

5. Esercizi su sottovarietà

ESERCIZIO 1.1. Si consideri l'insieme

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x + y + z = 0\}$$

- i) Provare che M è una sottovarietà di \mathbb{R}^3 di dimensione 1.
- ii) Parametrizzare M in modo regolare.
- iii) Disegnare M .
- iv) Calcolare i punti di M con coordinata z minima e massima.

ESERCIZIO 1.2 (Coniche di Apollonio). Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$ non tutti nulli, si consideri l'insieme

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 1, x^2 + y^2 = z^2\}.$$

Provare che M è una sottovarietà di \mathbb{R}^3 di dimensione 1 e classificarla al variare dei parametri a, b, c .

ESERCIZIO 1.3. Dato il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri l'insieme

$$M_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3 - x^2 - \alpha x\}.$$

- i) Stabilire per quali α l'insieme M_α è una sottovarietà differenziabile.
- ii) Descrivere i punti singolari di M_α , quando ci sono.
- iii) Quante componenti connesse ha M_α ?

Disegnare M_α nei vari casi.

ESERCIZIO 1.4. Dopo aver disegnato le seguenti tre superfici, calcolare il piano tangente in un generico punto di ciascuna:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\},$$

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\},$$

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 4y^2 + z^2 = 1\}.$$

ESERCIZIO 1.5. Identifichiamo \mathbb{R}^4 con \mathbb{C}^2 e consideriamo l'insieme

$$M = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z^2 = w^3\}.$$

Determinare il più piccolo sottoinsieme chiuso $C \subset M$ tale che $M \setminus C$ sia una sottovarietà differenziabile di \mathbb{R}^4 e determinarne la dimensione.

ESERCIZIO 1.6 (Toro). Siano $0 < r < R$ due parametri fissati e definiamo

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 - r^2 = 0\}.$$

Provare che M è una sottovarietà differenziabile di \mathbb{R}^3 di classe C^∞ e di dimensione 2. Disegnare M .

ESERCIZIO 1.7 (Nastro di Möbius). Siano $0 < r < R$ due parametri fissati e sia $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $A = (R - r, R + r) \times \mathbb{R}$, la funzione

$$\varphi(u, v) = R(\cos v e_1 + \sin v e_2) + (u - R)(\cos(v/2)(\cos v e_1 + \sin v e_2) + \sin(v/2)e_3).$$

Verificare che $M = \varphi(A)$ è una sottovarietà differenziabile di \mathbb{R}^3 di dimensione 2. Disegnare M . Stabilire se M è orientabile, ovvero se esiste un campo normale N globalmente definito in modo continuo.

ESERCIZIO 1.8 (Fibrato tangente). Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ una sottovarietà differenziabile di \mathbb{R}^n dimensione $1 \leq d \leq n - 1$ e di classe C^k , $k \geq 2$. Provare che

$$TM = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : x \in M, y \in T_x M\}$$

è una sottovarietà differenziabile di \mathbb{R}^{2n} di dimensione $2d$ e di classe C^{k-1} .

ESERCIZIO 1.9. Sia $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo. Provare che $N = \Phi(M)$ è una sottovarietà differenziabile di \mathbb{R}^n se lo è M . Verificare che il differenziale $d\Phi$ trasforma lo spazio tangente $T_x M$ in $T_y N$, dove $y = \Phi(x)$.

ESERCIZIO 1.10 (Proiezione stereografica). ★ Siano $\mathbb{S}^n = \{p = (x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |p| = 1\}$ ed $N = (0, 1)$ il polo nord, con $n \geq 1$. Definiamo la proiezione stereografica $S : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ nel seguente modo: $S(p) =$ intersezione del piano $\{x_{n+1} = 0\}$ con la semiretta uscente da N e passante per p .

- i) Calcolare S in forma esplicita.
- ii) Provare che S è conforme, ovvero che per ogni $p \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ esiste $\lambda(p) \neq 0$ – calcolarlo in forma esplicita – tale che il differenziale $T = dS(p) : T_p \mathbb{S}^n \rightarrow T_{S(p)} \mathbb{R}^n$ preserva gli angoli

$$\langle Tv, Tw \rangle = \lambda(p) \langle v, w \rangle, \quad v, w \in T_p \mathbb{S}^n.$$

6. Esercizi su massimi e minimi vincolati

ESERCIZIO 1.11. Tra tutti i triangoli con area fissata, quello equilatero ha perimetro minimo.

ESERCIZIO 1.12. Tra tutti i parallelepipedi rettangoli di volume fissato determinare quello con area di superficie laterale minima.

ESERCIZIO 1.13. Dati $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, provare che

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

con uguaglianza se e solo se $x_1 = \dots = x_n$.

ESERCIZIO 1.14. Dati $x_1, \dots, x_n \geq 0$, provare la disuguaglianza fra media geometrica e media aritmetica

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n},$$

con uguaglianza se e solo se $x_1 = \dots = x_n$.

ESERCIZIO 1.15. Dati $x_1, \dots, x_n \geq 0$, provare che

$$x_1^n + \dots + x_n^n \geq nx_1 \cdot \dots \cdot x_n.$$

ESERCIZIO 1.16. Provare che per ogni $\alpha, \beta > 0$ esiste una costante $0 < C_{\alpha\beta} < \infty$ tale che per ogni $x, y \geq 0$ si abbia

$$x^\alpha y^\beta \leq C_{\alpha\beta} (x^{\alpha+\beta} + y^{\alpha+\beta}).$$

Calcolare la costante $C_{\alpha\beta}$ ottimale (più piccola).

ESERCIZIO 1.17. Tra tutti gli ellissoidi di \mathbb{R}^3 con semiassi $a, b, c > 0$ calcolare quello con volume massimo sotto la condizione $a + 2b + 3c = 7$.

ESERCIZIO 1.18. Calcolare la distanza del punto $0 \in \mathbb{R}^3$ dall'insieme

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Stabilire preliminarmente se M è una sottovarietà di \mathbb{R}^3 .

ESERCIZIO 1.19. Sia $p > 0$ un numero reale fissato, sia $K_p \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme

$$K_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^{2p} + |y|^{2p} \leq 1\},$$

e sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = x^3 y^3$. Provare che f assume su K_p un valore minimo m_p ed un valore massimo M_p e calcolarli.

ESERCIZIO 1.20. Calcolare massimo e minimo della funzione $f(x, y) = e^x + e^y$ vincolata sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.

ESERCIZIO 1.21 (Folium di Cartesio). Calcolare gli estremi locali dell'ordinata dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ appartenenti al sottoinsieme del piano descritto dall'equazione

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

ESERCIZIO 1.22. Calcolare massimo e minimo della funzione $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$ vincolata a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

ESERCIZIO 1.23. Dopo aver provato che esistono, calcolare i valori massimo e minimo della funzione $f(x, y, z) = xyz$ vincolata sull'insieme

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy + xz + yz = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

ESERCIZIO 1.24. Dati tre interi $m, n, p \in \mathbb{N}$, calcolare il massimo ed il minimo della funzione $f(x, y, z) = x^m y^n z^p$ vincolata sulla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Curve e 1-forme differenziali in \mathbb{R}^n

In questo capitolo introduciamo la nozione di lunghezza di una curva rettificabile e quindi gli integrali curvilinei. Poi definiamo le 1-forme differenziali in \mathbb{R}^n , le forme chiuse ed esatte e l'integrale di una 1-forma lungo una curva. La “differenza” fra forme chiuse ed esatte dipende dalla topologia del dominio (Teorema di Poincaré).

1. Curve regolari e curve rettificabili in \mathbb{R}^n

Sia $[0, L] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso di lunghezza $L > 0$ e sia $n \geq 2$ una costante di dimensione.

DEFINIZIONE 2.1 (Curva). Una funzione continua $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice *curva in \mathbb{R}^n* . Se $\gamma(0) = \gamma(L)$ la curva si dice *chiusa*. Se $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ per $s, t \in [0, L)$ distinti, la curva si dice *semplice*. L'insieme di \mathbb{R}^n

$$\text{spt}(\gamma) = \gamma([0, L]) = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^n : t \in [0, L]\}$$

si dice *sostegno (o supporto)* della curva.

L'intervallo $[0, L]$ può essere sostituito con un qualsiasi altro intervallo, aperto o chiuso, limitato o illimitato.

Sia $\varphi : [0, M] \rightarrow [0, L]$ una funzione continua, iniettiva e suriettiva (un omeomorfismo di intervalli). Chiamiamo φ un *cambiamento di parametro*. Allora la curva $\kappa : [0, M] \rightarrow \mathbb{R}^n$ data dalla composizione $\kappa(s) = \gamma(\varphi(s))$, per $s \in [0, M]$, si dice *riparametrizzazione* di γ . Chiaramente si ha

$$\text{spt}(\kappa) = \text{spt}(\gamma).$$

In generale, γ e κ percorrono la traiettoria comune (il sostegno) con “leggi orarie” diverse. Se $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(M) = L$ diremo che γ e κ hanno la stessa orientazione. Se $\varphi(0) = L$ e $\varphi(M) = 0$ diremo che γ e κ hanno orientazioni opposte.

Dunque una curva è un sostegno (luogo geometrico) più una sua parametrizzazione. Ci sono due possibili orientazioni.

DEFINIZIONE 2.2 (Curva regolare). Una curva $\gamma \in C^1([0, L]; \mathbb{R}^n)$ si dice regolare se $|\dot{\gamma}(t)| \neq 0$ per ogni $t \in [0, L]$. Il vettore

$$T(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

si dice *campo tangente unitario* alla curva al tempo t , ovvero nel punto $\gamma(t)$.

La definizione di curva regolare rientra nella Definizione 1.10 con $d = 1$ dove sono state lasciate cadere la ii) e la iv). In particolare, una curva regolare può avere autointersezioni. A meno dell'orientazione, il campo tangente unitario T dipende solo dal supporto della curva γ e non dalla sua parametrizzazione.

Il concetto di “regolarità” dipende dalla parametrizzazione. Se in un punto $t \in [0, L]$ si ha $\dot{\gamma}(t) = 0$ allora il sostegno della curva potrebbe non avere una retta tangente univocamente definita. Si consideri la curva $\gamma \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$

$$\gamma(t) = (t^3, t^2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nel punto $t = 0$ si ha $\dot{\gamma}(0) = (0, 0)$. Il suo sostegno è una cuspidine con la punta nell'origine del piano. In questo punto il sostegno non ha una retta tangente.

D'altra parte, si consideri la curva $\gamma \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ definita da $\gamma(t) = (t^3, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$. Si tratta evidentemente della bisettrice del primo e terzo quadrante. È una retta parametrizzata in modo non regolare nel punto $t = 0$.

Con abuso di notazione, indicheremo una suddivisione σ dell'intervallo $[0, L]$ nel seguente modo $\sigma = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = L\}$, per qualche $k \in \mathbb{N}$. Indichiamo con $\mathcal{S}([0, L])$ l'insieme di tutte le suddivisioni σ di $[0, L]$.

DEFINIZIONE 2.3 (Curva rettificabile). Definiamo la *variazione totale o lunghezza* di una curva $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ come

$$(2.1) \quad L(\gamma) = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}([0, L])} \sum_{t_i \in \sigma} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|.$$

Se $L(\gamma) < \infty$ diremo che γ è rettificabile.

La lunghezza di una curva non dipende dalla parametrizzazione.

OSSERVAZIONE 2.4. Se $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è Lipschitz con costante $L \geq 0$, ovvero

$$|\gamma(s) - \gamma(t)| \leq L|s - t|, \quad s, t \in [0, 1],$$

allora γ è rettificabile ed inoltre $L(\gamma) \leq L$.

Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, una funzione continua e indichiamo con $f = (f_1, \dots, f_n)$ le sue coordinate. Useremo la notazione

$$\int_0^1 f(t) dt = \left(\int_0^1 f_1(t) dt, \dots, \int_0^1 f_n(t) dt \right)$$

per indicare l'integrale della funzione vettoriale. L'integrale vettoriale ha la seguente proprietà di subadditività

$$(2.2) \quad \left| \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)| dt.$$

Calcolare la lunghezza di una curva con la Definizione 2.1 è il più delle volte complicato. Più agevole è usare il teorema seguente, che è un caso particolare della formula (4.4) per il calcolo dell'area di sottovarietà differenziabili.

TEOREMA 2.5 (Formula della lunghezza). Le curve $\gamma \in C^1([0, L]; \mathbb{R}^n)$ sono rettificabili e vale la formula della lunghezza

$$(2.3) \quad L(\gamma) = \int_0^L |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Dim. Possiamo supporre $L = 1$. Sia $\sigma \in \mathcal{S}([0, 1])$ una scomposizione $\sigma = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1\}$. Dal Teorema fondamentale del calcolo per le funzioni vettoriali e per la (2.2) si trova

$$\sum_{i=1}^k |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^k \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(s) ds \right| \leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{\gamma}(s)| ds = \int_0^1 |\dot{\gamma}(s)| ds.$$

La stima vale per ogni σ e passando all'estremo superiore su σ si trova

$$L(\gamma) \leq \int_0^1 |\dot{\gamma}(s)| ds < \infty.$$

Questo prova che γ è rettificabile.

Per dimostrare la disuguaglianza opposta bisogna trovare una suddivisione “quasi ottimale”. Il problema tecnico da superare è che nella (2.2) servirebbe la disuguaglianza che va nella direzione opposta.

Fissiamo un parametro $\varepsilon > 0$. Siccome le componenti della funzione $\dot{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sono continue, allora sono uniformemente continue su $[0, 1]$. Di conseguenza esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $s, t \in [0, 1]$ si ha

$$(2.4) \quad |s - t| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\dot{\gamma}(s) - \dot{\gamma}(t)| < \varepsilon.$$

Sia $\sigma = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1\}$ una scomposizione tale che $0 < t_i - t_{i-1} < \delta$. Usando la subadditività $|x + y| \leq |x| + |y|$ e la (2.2) si trova

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\dot{\gamma}(s)| ds &= \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{\gamma}(s)| ds \\ &= \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{\gamma}(s) - \dot{\gamma}(t_{i-1}) + \dot{\gamma}(t_{i-1})| ds \\ &\leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{\gamma}(s) - \dot{\gamma}(t_{i-1})| ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{\gamma}(t_{i-1})| ds. \end{aligned}$$

Nell'ultimo integrale, la funzione integranda è costante e dunque l'integrale può entrare dentro la norma. Usando ora la uniforme continuità (2.4) si conclude che

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\dot{\gamma}(s)| ds &\leq \varepsilon + \sum_{i=1}^k \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(t_{i-1}) ds \right| \\ &\leq \varepsilon + \sum_{i=1}^k \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(t_{i-1}) - \dot{\gamma}(s) + \dot{\gamma}(s) ds \right| \\ &\leq \varepsilon + \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{\gamma}(t_{i-1}) - \dot{\gamma}(s)| ds + \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(s) ds \right| \\ &\leq 2\varepsilon + \sum_{i=1}^k |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|. \end{aligned}$$

Siccome $\varepsilon > 0$ è arbitrariamente piccolo, la tesi segue. □

OSSERVAZIONE 2.6. La formula della lunghezza (2.3) è valida anche quando γ è solo Lipschitziana. In questo caso $\dot{\gamma}$ è definita solo quasi ovunque, l'integrale deve essere inteso nel senso di Lebesgue e la dimostrazione è più complicata.

OSSERVAZIONE 2.7 (Formula della lunghezza in coordinate polari). Sia $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ un intervallo con $\alpha < \beta$. Data una funzione $\varrho \in C^1([\alpha, \beta]; [0, \infty))$ della variabile angolare $\vartheta \in [\alpha, \beta]$, definiamo la curva piana $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(\vartheta) = (\varrho(\vartheta) \cos(\vartheta), \varrho(\vartheta) \sin(\vartheta)).$$

La curva γ si dice data in coordinate polari e l'equazione $\varrho = \varrho(\vartheta)$ si chiama *equazione polare* della curva. La velocità della curva γ è, in un generico ϑ ,

$$\dot{\gamma} = (\dot{\varrho} \cos \vartheta - \varrho \sin \vartheta, \dot{\varrho} \sin \vartheta + \varrho \cos \vartheta),$$

e quindi $|\dot{\gamma}| = \sqrt{\dot{\varrho}^2 + \varrho^2}$. Dalla (2.3) si trova la formula per la lunghezza in coordinate polari

$$L(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{\varrho}(\vartheta)^2 + \varrho(\vartheta)^2} d\vartheta.$$

Le curve rettificabili hanno una riparametrizzazione canonica, chiamata riparametrizzazione a lunghezza d'arco. Data una curva $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$, indichiamo con $\gamma|_{[t_1, t_2]}$ la sua restrizione all'intervallo $[t_1, t_2] \subset [0, L]$.

DEFINIZIONE 2.8 (Parametrizzazione a lunghezza d'arco). Una curva $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice *parametrizzata a lunghezza d'arco* se $L(\gamma|_{[t_1, t_2]}) = t_2 - t_1$ per ogni $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq L$.

In particolare, l'estremo destro L dell'intervallo $[0, L]$ coincide con la lunghezza della curva. Quando γ è di classe C^1 la parametrizzazione a lunghezza d'arco equivale a dire

$$\int_{t_1}^{t_2} |\dot{\gamma}(t)| dt = L(\gamma|_{[t_1, t_2]}) = t_2 - t_1,$$

e quindi $|\dot{\gamma}| = 1$ identicamente. In altri termini, il supporto della curva viene percorso con velocità costante unitaria.

TEOREMA 2.9. Ogni curva rettificabile $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ possiede una riparametrizzazione a lunghezza d'arco.

Dim. Daremo la dimostrazione solo nel caso che $\gamma \in C^1([0, L]; \mathbb{R}^n)$ sia regolare. Si consideri la funzione $\psi \in C^1([0, L])$ definita nel seguente modo

$$\psi(t) = \int_0^t |\dot{\gamma}(s)| ds, \quad t \in [0, L].$$

Per il teorema di derivazione di funzioni integrali si ha $\psi'(t) = |\dot{\gamma}(t)| > 0$, essendo γ regolare. Dunque ψ è strettamente crescente, si ha $\psi(0) = 0$, si può porre $M = \psi(L)$, ed è definita la funzione inversa $\varphi = \psi^{-1} : [0, M] \rightarrow [0, L]$, che è derivabile e verifica

$$(2.5) \quad \varphi'(s) = \frac{1}{\psi'(\varphi(s))}, \quad \text{se } t = \varphi(s).$$

Consideriamo la riparametrizzazione $\kappa \in C^1([0, M]; \mathbb{R}^n)$

$$\kappa(s) = \gamma(\varphi(s)), \quad s \in [0, M].$$

Per la formula della derivata della funzione composta con $\varphi(s) = t$ si ha

$$\dot{\kappa}(s) = \dot{\gamma}(\varphi(s))\varphi'(s) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|},$$

e dunque $|\dot{\kappa}| = 1$ in ogni punto. In altri termini, κ è parametrizzata a lunghezza d'arco. □

Quando γ è solo rettificabile la dimostrazione precedente non cambia in modo sostanziale. Il cambio di parametro $\psi(t) = L(\gamma|_{[0,t]})$ è monotono crescente (non strettamente, in generale). Con cautela si può costruire la sua “funzione inversa” φ che fa il lavoro dovuto.

2. Integrali curvilinei

Estendiamo l'integrale di Riemann su intervallo ad un integrale lungo il supporto di una curva di classe C^1 .

DEFINIZIONE 2.10 (Integrale curvilineo). Date una curva $\gamma \in C^1([0, L]; \mathbb{R}^n)$ ed una funzione continua $f : \text{spt}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$, si definisce l'integrale curvilineo di f lungo γ come

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_0^L f(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Geometricamente, l'integrale curvilineo rappresenta l'area della “parete verticale curva” contenuta in \mathbb{R}^{n+1} compresa fra il supporto di γ e il grafico di f . Con la scelta $f = 1$ costante, la formula restituisce la lunghezza della curva. Possiamo pensare al simbolo ds come all'elemento di lunghezza curvilinea infinitesimale lungo γ .

PROPOSIZIONE 2.11. L'integrale curvilineo non dipende dalla parametrizzazione della curva, ma solo dal suo supporto.

Dim. Sia $\varphi : [0, M] \rightarrow [0, L]$ un cambiamento di parametro di classe C^1 . Ci sono due casi $\varphi' \leq 0$ in tutti i punti oppure $\varphi' \geq 0$ in tutti i punti. Supponiamo che sia $\varphi' \leq 0$ e quindi $\varphi(0) = L$ e $\varphi(M) = 0$. Consideriamo la riparametrizzazione $\kappa(\tau) = \gamma(\varphi(\tau))$ per $\tau \in [0, M]$. Vogliamo provare che

$$\int_{\kappa} f \, ds = \int_{\gamma} f \, ds.$$

Per la definizione di integrale curvilineo e per il teorema del cambiamento di variabile negli integrali di Riemann (si pone $t = \varphi(\tau)$) si trova

$$\begin{aligned} \int_{\kappa} f ds &= \int_0^M f(\kappa(\tau)) |\dot{\kappa}(\tau)| d\tau \\ &= \int_0^M f(\gamma(\varphi(\tau))) |\varphi'(\tau) \dot{\gamma}(\varphi(\tau))| d\tau \\ &= - \int_0^M f(\gamma(\varphi(\tau))) |\dot{\gamma}(\varphi(\tau))| \varphi'(\tau) d\tau \\ &= \int_0^L f(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_{\gamma} f ds. \end{aligned}$$

□

ESEMPIO 2.12 (Lavoro di un campo di forze lungo una curva). Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto ed $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo. Sia poi $\gamma \in C^1([0, L]; \mathbb{R}^n)$ una curva regolare con supporto contenuto in A ed indichiamo con

$$T = \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|}$$

il campo unitario tangente alla curva. La componente (proiezione) di F lungo la direzione T è data da $\langle F, T \rangle = F_1 T_1 + \dots + F_n T_n$. Il “lavoro” di F lungo γ è dunque

$$L = \int_{\gamma} \langle F, T \rangle ds = \int_0^L \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt.$$

Questo integrale cambia segno se a T si sostituisce $-T$, ovvero è sensibile all’orientazione della curva. L’ultimo integrale è ben definito anche per le curve non regolari.

Talvolta nei libri di fisica l’elemento di integrazione vettoriale $T ds$ viene indicato con \vec{ds} e si usa la notazione $F \cdot \vec{ds} = \langle F, T \rangle ds$.

3. 1-forme differenziali in \mathbb{R}^n : forme chiuse e forme esatte

Indichiamolo con $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^{n*}$ lo spazio vettoriale duale di \mathbb{R}^n , ovvero l’insieme di tutte le trasformazioni lineari da \mathbb{R}^n ad \mathbb{R} . Fissata la base canonica e_1, \dots, e_n , dove $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ con 1 alla posizione j -esima, denotiamo con dx_1, \dots, dx_n la base duale. La trasformazione lineare $dx_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ agisce nel seguente modo: $dx_i(e_j) = 1$ se $i = j$ ed è 0 altrimenti. Ogni trasformazione lineare $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ si rappresenta nella forma

$$T = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n,$$

per costanti $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Sul vettore $v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$, la trasformazione T agisce nel seguente modo:

$$(2.6) \quad T(v) = \left(\sum_{i=1}^n a_i dx_i \right) \left(\sum_{j=1}^n v_j e_j \right) = \sum_{i,j=1}^n a_i v_j dx_i(e_j) = \sum_{i=1}^n a_i v_i = \langle a, v \rangle,$$

dove $a = (a_1, \dots, a_n)$ sono le coordinate di T .

Sia ora $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto.

DEFINIZIONE 2.13 (1-forma differenziale). Una 1-forma differenziale su A è un'applicazione $\omega : A \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) dx_i, \quad x \in A,$$

per funzioni $\omega_i : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se $\omega_i \in C(A)$ sono funzioni continue diremo che ω è una 1-forma a coefficienti continui e scriveremo $\omega \in \Omega(A)$. Se $\omega_i \in C^1(A)$ sono funzioni di classe C^1 diremo che ω è una 1-forma di classe C^1 e scriveremo $\omega \in \Omega^1(A)$.

Ora introduciamo le definizioni di forma chiusa e forma esatta. Ricordiamo che il differenziale di una funzione $f \in C^1(A)$ è la 1-forma differenziale $df : A \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i, \quad x \in A.$$

La notazione dx_i è consistente, in quanto indica il differenziale della funzione coordinata i -esima, $f(x) = x_i$.

DEFINIZIONE 2.14 (Forma esatta). Una 1-forma differenziale $\omega \in \Omega(A)$ si dice esatta in A se esiste una funzione $f \in C^1(A)$ tale che $df = \omega$. La funzione f si dice *potenziale* di ω .

In generale, le 1-forme non hanno potenziale. Se lo hanno non è unico.

DEFINIZIONE 2.15 (Forma chiusa). Una 1-forma differenziale $\omega \in \Omega^1(A)$ si dice chiusa in A se in ogni punto $x \in A$ si ha

$$\frac{\partial \omega_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j(x)}{\partial x_i},$$

per ogni $i, j = 1, \dots, n$.

Tutte le forme esatte di classe C^1 sono chiuse.

PROPOSIZIONE 2.16. Se $\omega \in \Omega^1(A)$ una forma esatta in $A \subset \mathbb{R}^n$, allora è anche chiusa in A .

Dim. Per ipotesi esiste un potenziale $f \in C^2(A)$ di ω , $df = \omega$. Ma allora per il Teorema di Schwarz si ha

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}.$$

□

Le forme chiuse in A sono esatte in A quando A è un insieme aperto con proprietà topologiche speciali, si veda il Teorema 2.26.

OSSERVAZIONE 2.17 (Forme e campi vettoriali). Ad una forma ω su A rimane associato un campo vettoriale $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$F = (\omega_1, \dots, \omega_n),$$

e viceversa ad un campo vettoriale è associata in modo canonico una forma differenziale.

In fisica, un campo vettoriale $F \in C(A; \mathbb{R}^n)$ si dice *conservativo* se possiede un potenziale, cioè se esiste una funzione $f \in C^1(A)$ tale che $F(x) = \nabla f(x)$ per ogni

$x \in A$. Dunque un campo vettoriale è conservativo se e solo se la corrispondente forma è esatta. Capire se una forma è esatta equivale a capire se un campo è il gradiente di una funzione.

4. Integrazione di 1-forme differenziali lungo curve

In questa sezione definiamo l'integrale di 1-forme differenziali lungo curve. La definizione si basa su quella di integrale curvilineo. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto.

DEFINIZIONE 2.18. Si definisce l'integrale di una 1-forma $\omega \in \Omega(A)$ lungo una curva regolare $\gamma \in C^1([0, L]; A)$ come

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega(T) ds,$$

dove T è il campo tangente unitario alla curva.

Vedremo che la definizione si estende anche alle curve non regolari. Con $\omega(T)$ si intende l'azione della forma ω sul vettore T , nel punto $\gamma(t)$ della curva. Esplicitiamo la definizione in termini di integrale di Riemann su intervallo. Per la proprietà di linearità delle forme differenziali e per la formula (2.6) si trova

$$\omega(T) = \omega\left(\frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|}\right) = \frac{1}{|\dot{\gamma}|} \omega(\dot{\gamma}) \quad \text{e} \quad \omega(\dot{\gamma}) = \sum_{i=1}^n \omega_i(\gamma) \dot{\gamma}_i.$$

Dunque, esplicitando la definizione di integrale curvilineo si trova

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega(T) ds = \int_0^L \omega\left(\frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|}\right) |\dot{\gamma}| dt = \int_0^L \omega(\dot{\gamma}) dt = \sum_{i=1}^n \int_0^L \omega_i(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) dt.$$

Possiamo usare l'ultima formula come definizione di integrale di ω lungo γ . Questa formula è ben posta anche per le curve di classe C^1 che non sono regolari.

L'integrale di una 1-forma differenziale lungo una curva dipende dalla orientazione. Se infatti a T sostituiamo $-T$ l'integrale cambia di segno.

DEFINIZIONE 2.19 (Curva inversa). Data una curva $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiamo la *curva inversa* $-\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ponendo $-\gamma(t) = \gamma(L - t)$ per ogni $t \in [0, L]$.

Il sostegno è lo stesso ma lo si percorre in senso contrario.

DEFINIZIONE 2.20 (Concatenazione di curve). Date due curve $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\kappa : [0, M] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tali che $\gamma(L) = \kappa(0)$ definiamo la loro *concatenazione* $\gamma + \kappa : [0, L + M] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ponendo $(\gamma + \kappa)(t) = \gamma(t)$ per $t \in [0, L]$ e $(\gamma + \kappa)(t) = \kappa(t - L)$ per $t \in [L, L + M]$.

PROPOSIZIONE 2.21. Siano γ e κ due curve (concatenabili) di classe C^1 a valori nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ e sia $\omega \in \Omega(A)$. Allora:

$$\int_{-\gamma} \omega = - \int_{\gamma} \omega,$$

e

$$\int_{\gamma + \kappa} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\kappa} \omega.$$

Dim. La dimostrazione è elementare e viene omessa. \square

Nel seguente teorema proviamo che l'integrale di forme esatte non dipende dal percorso della curva ma solo dai punti iniziale e finale.

TEOREMA 2.22. Sia $\omega \in \Omega(A)$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- A) La 1-forma differenziale ω è esatta in A .
 B) Per ogni curva $\gamma \in C^1([0, L]; A)$ l'integrale

$$\int_{\gamma} \omega$$

dipende solo da $\gamma(0)$ e $\gamma(L)$, ed in effetti è uguale a $f(\gamma(L)) - f(\gamma(0))$ dove f è un potenziale di ω .

- C) Per ogni curva $\gamma \in C^1([0, L]; A)$ chiusa si ha

$$\int_{\gamma} \omega = 0.$$

Dim. A) \Rightarrow B) Sia $f \in C^1(A)$ un potenziale di ω , $df = \omega$. Allora si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \sum_{i=1}^n \int_0^L \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial x_i} \dot{\gamma}_i(t) dt = \int_0^L \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt \\ &= \int_0^L \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(L)) - f(\gamma(0)). \end{aligned}$$

B) \Rightarrow C) Immediato.

C) \Rightarrow B) Supponiamo che le curve γ e κ abbiano gli stessi punti iniziale e finale. Allora la concatenazione $\gamma - \kappa = \gamma + (-\kappa)$ è una curva chiusa e dunque dalla Proposizione 2.21 segue che

$$0 = \int_{\gamma - \kappa} \omega = \int_{\gamma} \omega - \int_{\kappa} \omega.$$

B) \Rightarrow A) Vogliamo costruire un potenziale di ω su A . Senza perdere di generalità possiamo supporre che A sia connesso e dunque connesso per archi. Se A è un aperto non connesso allora si costruisce il potenziale in ciascuna componente connessa di A .

Fissiamo a nostro piacere un punto $x_0 \in A$ e prendiamo $x \in A$. Esiste una curva C^1 a tratti che parte da x_0 ed arriva in x , chiamiamola γ_x . Definiamo la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega, \quad x \in A.$$

Per l'ipotesi B), la definizione non dipende dalla particolare curva γ_x scelta, ma solo dal punto x .

Vogliamo provare che per ogni $x \in A$ e per ogni $i = 1, \dots, n$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \omega_i(x).$$

Siccome ω ha coefficienti continui seguirà che $f \in C^1(A)$. Indichiamo con $[x, x + te_i]$ la curva segmento che congiunge i due estremi, dove $t \in \mathbb{R}$ è abbastanza piccolo. La

concatenazione $\gamma_x + [x, x + te_i]$ può essere usata per definire $f(x + te_i)$. Quindi si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + te_i) - f(x)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\int_{\gamma_x + [x, x + te_i]} \omega - \int_{\gamma_x} \omega \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{[x, x + te_i]} \omega \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \omega_i(x + se_i) ds = \omega_i(x), \end{aligned}$$

per il Teorema fondamentale del calcolo integrale. □

OSSERVAZIONE 2.23 (Equazioni differenziali ed 1-forme). Consideriamo un'equazione differenziale in forma normale

$$y' = f(x, y).$$

Se formalmente scriviamo $\frac{dy}{dx} = y'$ e moltiplichiamo per dx , ci accorgiamo che all'equazione differenziale rimane associata la 1-forma differenziale

$$\omega = dy - f(x, y)dx.$$

Diremo che l'equazione differenziale è esatta se ω è esatta. In effetti, se F è un potenziale di ω , allora l'equazione $F(x, y) = c$ descrive in forma implicita la famiglia delle soluzioni dell'equazione differenziale, al variare di $c \in \mathbb{R}$. Dunque, risolvere l'equazione differenziale significa calcolare un potenziale.

Può succedere che $\omega = dy - f(x, y)dx$ non sia esatta ma che $\widehat{\omega} = \varphi(x, y)dy - \varphi(x, y)f(x, y)dx$ diventi esatta per una fortunata funzione φ , che si dice *fattore integrante*. Evidentemente, l'equazione differenziale associata è la stessa. Si può cercare di scoprire φ imponendo la chiusura di $\widehat{\omega}$. È tuttavia raro riuscire a calcolare il fattore integrante in modo esplicito perchè si arriva ad una equazione alle derivate parziali.

5. Teorema di Poincaré

In questa sezione proviamo che le forme chiuse su insiemi aperti contraibili sono esatte.

DEFINIZIONE 2.24 (Insieme contraibile). Un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice *contraibile* se esistono un punto $x_0 \in A$ ed una funzione $H \in C^\infty(A \times [0, 1]; A)$ tali che $H(x, 1) = x$ e $H(x, 0) = x_0$ per ogni $x \in A$.

La funzione H si chiama *omotopia di A ad un punto*. Un insieme contraibile può essere deformato in modo continuo fino a collapsare in un punto.

DEFINIZIONE 2.25 (Insieme stellato). Un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice *stellato* rispetto ad un punto $x_0 \in A$ se per ogni $x \in A$ il segmento $[x_0, x]$ è interamente contenuto in A .

Se ad esempio A è stellato rispetto al punto $0 \in A$, allora la funzione $H(x, t) = tx$ contrae A al punto 0. Quindi gli insiemi stellati sono contraibili. Gli insiemi convessi sono evidentemente stellati rispetto ad ogni loro punto e dunque sono contraibili.

TEOREMA 2.26. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto contraibile e sia $\omega \in C^1(A)$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- A) ω è chiusa in A .
- B) ω è esatta in A .

Dim. Dobbiamo provare che $A) \Rightarrow B)$. Sia $H \in C^\infty(A \times [0, 1]; A)$ una omotopia di A al punto $x_0 \in A$. Per ogni $x \in A$ consideriamo la curva $\gamma_x(t) = H(x, t)$ con $t \in [0, 1]$. Osserviamo che

$$\dot{\gamma}_x(t) = \frac{\partial H(x, t)}{\partial t}.$$

Definiamo la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(H(x, t)) \frac{\partial H_i(x, t)}{\partial t} dt.$$

Vogliamo provare che per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \omega_j(x), \quad x \in A.$$

È lecito derivare dentro il segno di integrale (non proviamo questa affermazione):

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left\{ \omega_i(H) \frac{\partial^2 H_i}{\partial x_j \partial t} + \frac{\partial H_i}{\partial t} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} \frac{\partial H_k}{\partial x_j} \right\} dt.$$

Usando il fatto che la forma ω è chiusa si trova

$$\sum_{i,k=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} \frac{\partial H_i}{\partial t} \frac{\partial H_k}{\partial x_j} = \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} \frac{\partial H_i}{\partial t} \frac{\partial H_k}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial H_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial t} \omega_k(H),$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\omega_i(H) \frac{\partial H_i}{\partial x_j} \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_i(H(x, 1)) \frac{\partial H_i}{\partial x_j}(x, 1) - \omega_i(H(x, 0)) \frac{\partial H_i}{\partial x_j}(x, 0) \\ &= \omega_j(x). \end{aligned}$$

Nell'ultima riga si usa il fatto che $H(x, 1) = x$ e $H(x, 0) = x_0$.

□

6. Esercizi su curve e integrali curvilinei

ESERCIZIO 2.25. Provare la disuguaglianza (2.2). Farlo prima per f costante a tratti e poi per f continua.

ESERCIZIO 2.26 (Spirale logaritmica). Sia $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ la spirale logaritmica data dall'equazione polare $\rho = e^{-\vartheta}$. Calcolare la lunghezza di γ e riparametrizzarla a lunghezza d'arco.

ESERCIZIO 2.27. Sia $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la spirale quadratica data dall'equazione polare $\rho = \vartheta^2$. Calcolare la lunghezza di γ e riparametrizzarla a lunghezza d'arco.

ESERCIZIO 2.28. Sia $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva piana $\gamma(t) = (t^2, 2t^3/3 - t^2)$, con $t \in \mathbb{R}$. Stabilire se γ è semplice e se è regolare. Calcolare, quando possibile, il campo unitario tangente T . Calcolare i limiti destro e sinistro

$$\lim_{t \rightarrow 0^\pm} T(t).$$

Infine, disegnare il supporto della curva γ .

ESERCIZIO 2.29. Sia $\alpha > 0$ un parametro e consideriamo la curva piana $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \left(t^2 \cos\left(\frac{1}{t^\alpha}\right), t^2 \sin\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) \right), \quad \text{se } t \in (0, 1], \quad \text{e } \gamma(0) = (0, 0).$$

- 1) Riparametrizzare γ in coordinate polari e disegnare approx. il sostegno di γ .
- 2) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che la curva γ sia rettificabile.

ESERCIZIO 2.30 (Cardioide). Sia $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva piana data dall'equazione polare $\rho = 1 - \cos \vartheta$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Disegnare il supporto di γ e calcolare la sua lunghezza. Resp. $L = 8$.

ESERCIZIO 2.31. Sia $L(t)$ la lunghezza del tratto della parabola $y = x^2$ contenuto nel rettangolo $[0, t] \times [0, t^2] \subset \mathbb{R}^2$, per $t > 0$. Calcolare $L(t)$ e quindi calcolare il limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(t)}{t^2}.$$

ESERCIZIO 2.32. Siano $L > 0$ ed $\alpha \geq 0$ due parametri fissati. Calcolare la lunghezza della curva $\gamma : [L, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = (\alpha \cosh t \cos t, \alpha \cosh t \sin t, \alpha t), \quad t \in [-L, L].$$

Disegnare il supporto di γ . Resp. $2\sqrt{2}\alpha \sinh L$.

ESERCIZIO 2.33. Si consideri la curva piana $\gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \left(\frac{t^3}{3} - t, (\log t)^2 \right), \quad t > 0.$$

- i) Stabilire se γ è semplice e se è regolare.
- ii) Se possibile, calcolare il campo tangente unitario $T(t)$ e poi calcolare i limiti

$$\lim_{t \rightarrow 1^\pm} T(t).$$

- iii) Disegnare il supporto di γ .

ESERCIZIO 2.34. Sia $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva data dall'equazione polare $\rho = \vartheta$. Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} ds.$$

ESERCIZIO 2.35. Posto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y - 1 \geq 0\}$, si consideri la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y - 1}$. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la curva $\gamma_\alpha : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_\alpha(t) = (t, 1 - \alpha t^2)$, $|t| \leq 1$. Determinare i valori di α per cui l'integrale curvilineo

$$I_\alpha = \int_{\gamma_\alpha} f ds$$

è ben definito e calcolarlo.

ESERCIZIO 2.36. Sia $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$, $t \in [0, \pi]$.

- 1) Verificare che γ è regolare, calcolare il campo tangente unitario T e disegnare il supporto.
- 2) Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \sqrt{|z|}$, calcolare l'integrale $\int_\gamma f ds$.

Risp. $[(1 + 4\pi^2)^{3/2} - 1]/12$.

ESERCIZIO 2.37 (Cicloide). Si consideri il tratto di cicloide $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Posto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, si consideri la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x\sqrt{y}$. Calcolare l'integrale di f lungo γ

$$I = \int_\gamma f ds.$$

ESERCIZIO 2.38 (Semicontinuità inferiore della lunghezza). Sia $\gamma_k \in [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, una successione di curve (rettificabili) tale che per ogni $t \in [0, 1]$ si abbia il limite puntuale

$$\gamma(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k(t),$$

dove $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva. Provare che

$$L(\gamma) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} L(\gamma_k).$$

ESERCIZIO 2.39 (Primo problema di Calcolo delle Variazioni). ★ Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e connesso per curve rettificabili. Provare che per ogni coppia di punti $x, y \in K$ esiste una curva interamente contenuta in K di lunghezza minima che li congiunge.

Suggerimenti: Considerare l'inf, riparametrizzare a lunghezza d'arco, Teorema di Ascoli-Arzelà, Esercizio 2.38.

ESERCIZIO 2.40 (Postulato di Archimede su convessità e lunghezza). ★ Siano $f, F \in C^2([0, 1])$ due funzioni convesse tali che $f \leq F$ in tutti i punti, $f(0) = F(0)$ ed $f(1) = F(1)$. Consideriamo le curve date in forma cartesiana $\gamma(t) = (t, f(t))$ e $\Gamma(t) = (t, F(t))$. Provare che $L(\Gamma) \leq L(\gamma)$.

7. Esercizi su 1-forme differenziali

ESERCIZIO 2.41. Calcolare l'integrale della 1-forma differenziale ω lungo la curva γ assegnata:

- i) $\omega = x^2 dx + xy dy$ in \mathbb{R}^2 , $\gamma(t) = (t^2, t)$ con $t \in [-1, 1]$.
- ii) $\omega = (x - z) dx + (1 - xy) dy + y dz$ in \mathbb{R}^3 , $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ con $t \in [0, 1]$.
- iii) $\omega = 2x(x+y) dx + 2y(x+y) dy$ in \mathbb{R}^2 lungo la curva γ con equazione polare $\varrho = k\vartheta$, dove $\vartheta \in [0, \pi/2]$ e $k \geq 0$ è un parametro fissato (spirale di Archimede).

Risp. i) 0; ii) 29/20; iii) $k^3(\pi^2 + 4\pi - 16)/2$.

ESERCIZIO 2.42. Stabilire se i seguenti insiemi sono contraibili:

- i) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \neq 0\}$ in \mathbb{R}^3 ;
- ii) $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \log(1 + |x|) \geq |x|/2\}$ in \mathbb{R}^n con $n \geq 1$;
- iii) $C = \{(x + y, xy) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ in \mathbb{R}^2 .

Risp. i) No; ii) Si; iii) Si.

ESERCIZIO 2.43. Determinare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\omega = \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} \left((x - y) dx + (x + y) dy \right)$$

sia chiusa. Per tali valori ω è anche esatta su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$?

Risp. $\alpha = 1$; No.

ESERCIZIO 2.44. Determinare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la 1-forma differenziale in \mathbb{R}^3

$$\omega = (\alpha y + z) dx + (\alpha x + z) dy + (\alpha x + y) dz$$

sia chiusa. Per tali valori calcolare un potenziale di ω su \mathbb{R}^3 .

Risp. $\alpha = 1$.

ESERCIZIO 2.45. Si consideri la 1-forma differenziale nel piano

$$\omega = \left(\log(x + y) + \frac{x}{x + y} \right) dx + \frac{x}{x + y} dy.$$

- i) Determinare il più grande insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ su cui ω è ben definita.
- ii) Stabilire se ω è chiusa in A .
- iii) Stabilire se ω è esatta in A ed eventualmente calcolarne un potenziale.

Risp. $f(x, y) = x \log(x + y)$.

ESERCIZIO 2.46. Sia ω la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\omega = \frac{1 - \sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x dx + y dy).$$

Calcolare l'integrale di ω lungo la curva γ di equazione polare $\varrho = e^\vartheta$ con $\vartheta \in [0, \pi/2]$ (spirale logaritmica). Determinare preliminarmente un potenziale della forma.

Risp. iii) $e^{\pi/2} + \cos(e^{\pi/2}) - 1 - \cos 1$.

ESERCIZIO 2.47. Si consideri la forma differenziale su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\omega = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} ((x^2 - y^2)dx - 2xydy).$$

Stabilire se ω è chiusa oppure esatta, ed eventualmente calcolarne un potenziale.

ESERCIZIO 2.48. Sia $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la semicirconferenza $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, \pi]$. Calcolare gli integrali

$$\int_{\gamma} yx^2 dx + xdy, \quad \int_{\gamma} \arcsin(y)dx + ydy.$$

ESERCIZIO 2.49. Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$\varphi(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x}, \quad x \neq 0$$

e $\varphi(0, y) = y$. Stabilire se la 1-forma differenziale $\omega = \varphi(x, y)dx + \varphi(y, x)dy$ è esatta su \mathbb{R}^2 .

ESERCIZIO 2.50. Dati $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ si consideri la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\omega = \frac{\alpha x + \beta y}{x^2 + y^2} dx + \frac{\gamma x + \delta y}{x^2 + y^2} dy.$$

- 1) Calcolare tutti i valori dei parametri tali che ω sia chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
- 2) Determinare tutti i valori dei parametri tali che ω sia esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e calcolarne un potenziale.

ESERCIZIO 2.51. Stabilire se la forma differenziale

$$\omega = \frac{y^2}{x^2 + y^4} dx - \frac{2xy}{x^2 + y^4} dy$$

è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ed eventualmente calcolarne un potenziale.

ESERCIZIO 2.52. Sia $\gamma : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva data dal grafico della funzione $y = \cos x$ con $x \in [-\pi, \pi]$. Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}.$$

ESERCIZIO 2.53. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto e connesso. Provare che se una 1-forma ω ammette potenziale in A allora questo è unico a meno di una costante additiva.

ESERCIZIO 2.54. Trovare tutte le funzioni $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ soluzioni dell'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

ESERCIZIO 2.55 (Equazione della corda vibrante). Calcolare la soluzione $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ del seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x, 0) = \sin x, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Usare l'Esercizio 2.54 con una rotazione delle coordinate.

Misura ed integrale di Lebesgue

In questo capitolo introduciamo la misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n e studiamo le sue proprietà più importanti. Poi definiamo l'integrale di Lebesgue e discutiamo il Teorema di Fubini-Tonelli sullo scambio di ordine di integrazione, il Teorema di Beppo Levi sulla convergenza monotona e il teorema sul cambio di variabile. Il capitolo si chiude con un confronto fra integrale di Riemann ed integrale di Lebesgue.

1. Misure esterne e misure

La misura di Lebesgue si costruisce a partire dalla *misura esterna* di Lebesgue. La teoria generale verrà ripresa nel corso di Analisi Reale.

DEFINIZIONE 3.1 (Misura esterna). Una funzione di insiemi $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ è una misura esterna se:

- i) $\mu(\emptyset) = 0$;
- ii) se $A \subset B$ allora $\mu(A) \leq \mu(B)$ (monotonia);
- iii) per ogni successione di insiemi $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vale la subaddittività numerabile

$$(3.1) \quad \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Quando in (3.1) l'unione è disgiunta vorremmo avere $=$ al posto di \leq . Per avere l'addittività numerabile occorre restringere μ alla σ -algebra degli insiemi μ -*misurabili*.

DEFINIZIONE 3.2 (Insieme misurabile). Sia $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ una misura esterna. Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice μ -*misurabile* se per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ si ha

$$(3.2) \quad \mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A').$$

OSSERVAZIONE 3.3. Ogni insieme $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ con misura esterna nulla, $\mu(A) = 0$, è μ -*misurabile*. Per verificarlo, osserviamo che la disuguaglianza

$$\mu(E) \leq \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A')$$

è vera per qualsiasi E ed A . Questo segue dalla subaddittività della misura esterna e dal fatto che $E = (E \cap A) \cup (E \cap A')$. Dobbiamo verificare la disuguaglianza opposta quando $\mu(A) = 0$. In questo caso, per monotonia, $\mu(E \cap A) = 0$ e dunque

$$\mu(E \cap A) + \mu(E \cap A') = \mu(E \cap A') \leq \mu(E).$$

□

La proprietà (3.2) si chiama proprietà di spezzamento. Gli insiemi con la proprietà di spezzamento formano una σ -algebra.

DEFINIZIONE 3.4 (σ -algebra). Una sottofamiglia di insiemi $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ è una σ -algebra di \mathbb{R}^n se:

- i) $\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$;
- ii) $A \in \mathcal{A}$ se e solo se $A' \in \mathcal{A}$;
- iii) se $A_k \in \mathcal{A}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Da ii) e iii) segue che l'intersezione numerabile di elementi di una σ -algebra è ancora nella σ -algebra. In definitiva, se \mathcal{A} è una σ -algebra e $A, B \in \mathcal{A}$ allora $A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Le σ -algebre sono l'ambiente adatto su cui definire una misura.

DEFINIZIONE 3.5 (Misura). Sia \mathcal{A} una σ -algebra di \mathbb{R}^n . Una funzione $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ è una misura se:

- i) $\mu(\emptyset) = 0$;
- ii) se $A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}$, è una successione di insiemi mutualmente disgiunti, allora vale la additività numerabile

$$(3.3) \quad \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Il seguente teorema permette di passare dalle misure esterne alle misure.

TEOREMA 3.6 (Costruzione di Carathéodory). Sia μ una misura esterna su \mathbb{R}^n e sia \mathcal{A} la famiglia degli insiemi μ -misurabili. Allora \mathcal{A} è una σ -algebra e $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ è una misura. Inoltre, $\mu(A) = 0$ implica $A \in \mathcal{A}$ (μ è una misura completa).

Dim. È immediato vedere che $\mathbb{R}^n, \emptyset \in \mathcal{A}$. Inoltre, la simmetria della condizione in (3.2) implica che $A \in \mathcal{A}$ se e solo se $A' \in \mathcal{A}$.

Supponiamo che $A_k \in \mathcal{A}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e proviamo che

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}.$$

Dal momento che ogni $A_k \in \mathcal{A}$ si ha

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \mu(E \cap A_1) + \mu(E \cap A_1') \\ &= \mu(E \cap A_1) + \mu(E \cap A_1' \cap A_2) + \mu(E \cap A_1' \cap A_2') \\ &= \mu(E \cap A_1) + \mu(E \cap A_1' \cap A_2) + \\ &\quad + \mu(E \cap A_1' \cap A_2' \cap A_3) + \mu(E \cap A_1' \cap A_2' \cap A_3') \\ &= \sum_{i=1}^k \mu\left(E \cap A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right) + \mu\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right)'\right) \\ &\geq \sum_{i=1}^k \mu\left(E \cap A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right) + \mu\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)'\right). \end{aligned}$$

Abbiamo usato la monotonia della misura esterna. Per $k \rightarrow \infty$ ed usando la subadditività della misura esterna si ottiene

$$\begin{aligned} \mu(E) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(E \cap A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right) + \mu\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)'\right) \\ &\geq \mu\left(E \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right) + \mu\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)'\right) \\ &= \mu\left(E \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + \mu\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)'\right) \geq \mu(E). \end{aligned}$$

Se ne deduce che si hanno tutte uguaglianze. In particolare si ottiene

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(E \cap A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right) + \mu\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)'\right).$$

Mostriamo che μ è σ -additiva su \mathcal{A} . Se $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ è un'unione disgiunta, e nell'uguaglianza precedente scegliamo $E = A$ si ottiene

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Rimane da verificare che μ è completa. Se $B \subset A$ e $\mu(A) = 0$, allora $\mu(E) \leq \mu(E \cap B) + \mu(E \cap B') \leq \mu(E \cap A) + \mu(E) = \mu(E)$. Questo termina la dimostrazione del teorema. \square

Per gli insiemi misurabili valgono naturali teoremi di passaggio al limite. Sia $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di insiemi di \mathbb{R}^n . Se $A_k \subset A_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ la successione si dice crescente. Se $A_{k+1} \subset A_k$ la successione si dice decrescente.

TEOREMA 3.7 (Monotonia). Sia μ una misura esterna su \mathbb{R}^n . Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, è una successione crescente di insiemi μ -misurabili, allora

$$(3.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, è una successione decrescente di insiemi μ -misurabili e $\mu(A_1) < \infty$, allora

$$(3.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Dim. Per gli insiemi misurabili vale la proprietà di additività numerabile, e dunque

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \mu\left(A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^m A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(A_m). \end{aligned}$$

Infatti, la successione $B_n = A_1 \setminus A_n$ è crescente, e dunque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_1 \setminus A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_1 \setminus A_n\right) = \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Usando il fatto che $\mu(A_1) < \infty$ si può ottenere per differenza la (3.5). \square

2. Costruzione della misura di Lebesgue e proprietà di regolarità

La costruzione della misura di Lebesgue parte dalla naturale definizione di misura per i pluri-intervalli. Un pluri-intervallo $I \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme del tipo

$$I = [a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n), \quad \text{con } a_i < b_i \text{ per } i = 1, \dots, n,$$

e la sua misura è

$$\text{mis}(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

I pluri-intervalli aperti e chiusi si definiscono in modo analogo e possono essere equivalentemente usati nella costruzione che segue.

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme. Un *ricoprimento Lebesguiano* di A è una successione di pluri-intervalli $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$.

DEFINIZIONE 3.8 (Misura esterna di Lebesgue). Definiamo $\mathcal{L}^n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \text{mis}(I_k) : (I_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ ricoprimento Lebesguiano di } A \right\}.$$

PROPOSIZIONE 3.9. La funzione di insiemi \mathcal{L}^n è una misura esterna.

Dim. Proviamo la (3.1). Se il membro di destra non è finito non c'è nulla da dimostrare. Possiamo supporlo finito. Fissato $\varepsilon > 0$, in corrispondenza di ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un ricoprimento Lebesguiano $\{I_i^k : i \in \mathbb{N}\}$ di A_k tale che $\mathcal{L}^n(A_k) + \varepsilon/2^k \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(I_i^k)$. La famiglia $\{I_i^k : i, k \in \mathbb{N}\}$ è un ricoprimento Lebesguiano di A , e dunque

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(I_i^k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathcal{L}^n(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(A_k).$$

Dalla arbitrarietà di ε si ottiene la tesi. \square

Indicheremo con $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ la σ -algebra degli insiemi \mathcal{L}^n -misurabili. Per il Teorema di Carathéodory, $\mathcal{L}^n : \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ è una misura numerabilmente additiva. Chiamiamo \mathcal{L}^n *misura di Lebesgue*.

Prossimo obiettivo è di provare che gli insiemi aperti sono \mathcal{L}^n -misurabili. Osserviamo che se \mathcal{A}_α sono σ -algebre di \mathbb{R}^n per ogni α , allora $\mathcal{A} = \bigcap_{\alpha} \mathcal{A}_\alpha$ è ancora una σ -algebra. Per ogni $C \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ possiamo dunque definire l'intersezione di tutte le σ -algebre che contengono C

$$\mathcal{A}(C) = \bigcap_{C \subset \mathcal{A}} \mathcal{A}.$$

$\mathcal{A}(C)$ si chiama σ -algebra generata da C .

DEFINIZIONE 3.10 (σ -algebra dei boreliani). Indichiamo con $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ la σ -algebra generata dagli insiemi aperti di \mathbb{R}^n . $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ si chiama σ -algebra dei boreliani di \mathbb{R}^n e una misura definita su $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ si dice misura di Borel.

Il prossimo teorema riassume le proprietà di regolarità più importanti della misura di Lebesgue.

TEOREMA 3.11 (Regolarità da sotto e da sopra). La misura di Lebesgue \mathcal{L}^n è di Borel (gli aperti sono \mathcal{L}^n -misurabili) ed è finita sui compatti. Inoltre:

- i) $\mathcal{L}^n(A) = \sup\{\mathcal{L}^n(K) : K \subset A \text{ compatto}\}$ per ogni aperto $A \subset \mathbb{R}^n$.
- ii) $\mathcal{L}^n(E) = \inf\{\mathcal{L}^n(A) : E \subset A \text{ con } A \text{ aperto}\}$ per ogni insieme $E \subset \mathbb{R}^n$.

Servono alcuni lemmi preliminari.

LEMMA 3.12. Ogni pluri-intervallo $I \subset \mathbb{R}^n$ è \mathcal{L}^n -misurabile e inoltre $\text{mis}(I) = \mathcal{L}^n(I)$.

Nella dimostrazione del lemma useremo il seguente esercizio.

ESERCIZIO 3.13. Se I e J sono pluri-intervalli allora $\mathcal{L}^n(I) = \mathcal{L}^n(I \cap J) + \mathcal{L}^n(I \setminus J)$.

Dim. del Lemma 3.12. Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ si ha sempre $\mathcal{L}^n(E) \leq \mathcal{L}^n(E \cap I) + \mathcal{L}^n(E \setminus I)$. Proviamo la disuguaglianza opposta. Possiamo supporre $\mathcal{L}^n(E) < \infty$ e considerare un ricoprimento Lebesguiano $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di E tale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(I_k) \leq \mathcal{L}^n(E) + \varepsilon,$$

per un $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo. Usando l'Esercizio 3.13, la subaddittività e la monotonia della misura esterna si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(I_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(I_k \cap I) + \mathcal{L}^n(I_k \setminus I) \\ &\geq \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \cap I\right) + \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \setminus I\right) \\ &\geq \mathcal{L}^n(E \cap I) + \mathcal{L}^n(E \setminus I). \end{aligned}$$

Abbiamo provato che $\mathcal{L}^n(E \cap I) + \mathcal{L}^n(E \setminus I) \leq \mathcal{L}^n(E) + \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$. Questo termina la dimostrazione del lemma.

La verifica che $\text{mis}(I) = \mathcal{L}^n(I)$ è lasciata come esercizio. \square

Dim. del Teorema 3.11. Proviamo che \mathcal{L}^n è boreliana. Se mostriamo che gli aperti sono unione numerabile di pluri-intervalli segue che sono misurabili in quanto unione numerabile di misurabili.

Sia \mathcal{F}_0 la famiglia dei cubi unitari in \mathbb{R}^n a coordinate intere, e precisamente

$$\mathcal{F}_0 = \{[i_1, i_1 + 1] \times \dots \times [i_n, i_n + 1] : i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}\}$$

e per $k \in \mathbb{N}$ definiamo la famiglia di cubi riscaldati

$$\mathcal{F}_k = \left\{ \frac{1}{2^k} Q : Q \in \mathcal{F}_0 \right\}.$$

Dato un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, definiamo

$$\mathcal{Q}_k = \{Q \in \mathcal{F}_k : Q \subset A\} \quad \text{e} \quad \mathcal{Q} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{Q}_k.$$

Proviamo che $A = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q := K$.

L'inclusione $K \subset A$ è chiara. Per verificare l'inclusione opposta fissiamo $x \in A$ e sia $\delta = \text{dist}(x, \partial A) > 0$. Il maggiore stretto deriva dal fatto che x è un punto interno di A . Sia $\ell = 2\delta/\sqrt{n}$ il lato del cubo con semidiagonale δ e scegliamo $k \in \mathbb{N}$ tale che $1/2^k < \ell$. Allora esiste $Q \in \mathcal{Q}_k$ tale che $x \in Q \subset K$. Questo prova che $A \subset K$.

Il punto i) segue direttamente dall'argomento precedente. Siccome \mathcal{Q} è numerabile possiamo enumerarlo $\mathcal{Q} = \{Q_i : i \in \mathbb{N}\}$. L'insieme $K_i = \bigcup_{j=1}^i Q_j$ è l'unione finita di cubi chiusi e dunque è compatto. Inoltre $K_i \subset K_{i+1}$ e $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. Dal Teorema 3.7 segue che

$$\mathcal{L}^n(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{L}^n(K_i) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^n(K_i).$$

Rimane da verificare il punto ii). Senza perdere di generalità possiamo supporre che $\mathcal{L}^n(E) < \infty$. Fissato $i \in \mathbb{N}$, esiste un ricoprimento Lebesguiano $\{I_k^i : k \in \mathbb{N}\}$ di E tale che

$$\mathcal{L}^n(E) + \frac{1}{2^i} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(I_k^i).$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un pluri-intervallo aperto J_k^i contenente I_k^i tale che $\mathcal{L}^n(J_k^i \setminus I_k^i) \leq \frac{1}{2^i 2^k}$. L'insieme $A_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k^i$ è aperto in quanto unione di aperti e dunque l'insieme $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ è un boreliano (intersezione numerabile di aperti). Siccome $E \subset B$ si ha $\mathcal{L}^n(E) \leq \mathcal{L}^n(B)$. Inoltre per ogni $i \in \mathbb{N}$ si ha

$$\mathcal{L}^n(B) \leq \mathcal{L}^n(A_i) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(J_k^i) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathcal{L}^n(I_k^i) + \frac{1}{2^i 2^k} \right) \leq \mathcal{L}^n(E) + \frac{1}{2^{i-1}},$$

e quindi $\mathcal{L}^n(B) \leq \mathcal{L}^n(E)$. Dal Teorema 3.7 segue che

$$\mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(B) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{L}^n\left(\bigcap_{j=1}^i A_j\right).$$

□

OSSERVAZIONE 3.14. Nella dimostrazione precedente abbiamo in effetti provato che per ogni insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ – anche non misurabile – esiste un insieme di Borel B (di più, un'intersezione numerabile di aperti) tale che $E \subset B$ e $\mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(B)$.

Usando le idee della dimostrazione precedente si possono risolvere gli Esercizi 3.59 e 3.60.

ESEMPIO 3.15 (Insieme non misurabile di Vitali). Consideriamo l'intervallo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Diciamo che $x \sim y$ se e solo se $x - y \in \mathbb{Q}$. Poiché \sim è una relazione di equivalenza l'intervallo $[0, 1]$ viene suddiviso nell'unione disgiunta di classi di equivalenza che indicheremo con $[x] = \{y \in [0, 1] : y \sim x\}$. Utilizziamo l'assioma di scelta per selezionare da ogni classe di equivalenza un elemento $y \in [x]$ e definiamo l'insieme $K \subset [0, 1]$ come l'unione di questi rappresentanti.

L'insieme K non è \mathcal{L}^1 -misurabile. Per $q \in Q = [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{R}$ scriviamo $\tau_q(x) = q + x$. Osserviamo che $\tau_q(K) \cap \tau_{q'}(K) = \emptyset$ se $q \neq q'$, e inoltre

$$[0, 1] \subset \bigcup_{q \in Q} \tau_q(K) \subset [-1, 2].$$

Supponiamo che K sia \mathcal{L}^1 -misurabile. Dalle inclusioni precedenti segue che

$$(3.6) \quad 1 \leq \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{q \in Q} \tau_q(K)\right) \leq 3.$$

Inoltre, per l'invarianza di \mathcal{L}^1 rispetto alle traslazioni $\mathcal{L}^1(K) = \mathcal{L}^1(\tau_q(K))$. Ora, se fosse $\mathcal{L}^1(K) = 0$, si avrebbe

$$\mathcal{L}^1\left(\bigcup_{q \in Q} \tau_q(K)\right) = \sum_{q \in Q} \mathcal{L}^1(\tau_q(K)) = \sum_{q \in Q} \mathcal{L}^1(K) = 0.$$

Se invece fosse $\mathcal{L}^1(K) > 0$, allora

$$\mathcal{L}^1\left(\bigcup_{q \in Q} \tau_q(K)\right) = \infty.$$

In entrambi i casi si contraddice la (3.6).

Più complicato è provare che esistono insiemi \mathcal{L}^1 -misurabili che non sono di Borel.

3. Proprietà di invarianza per \mathcal{L}^n e misure di Hausdorff

Per ogni vettore $h \in \mathbb{R}^n$ definiamo la traslazione $\tau_h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tau_h(x) = h + x$. Se I è un pluri-intervallo allora $\tau_h(I)$ è ancora un pluri-intervallo, e inoltre $\text{mis}(\tau_h(I)) = \text{mis}(I)$. Dunque, τ_h trasforma un ricoprimento Lebesguiano di A in un ricoprimento Lebesguiano di $\tau_h(A)$, con stessa "misura totale". Si conclude che per ogni $h \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$ si ha

$$(3.7) \quad \mathcal{L}^n(\tau_h(A)) = \mathcal{L}^n(A).$$

Inoltre $\tau_h(A)$ è misurabile se e solo se lo è A , in quanto τ_h conserva la condizione (3.2).

La proprietà (3.7) caratterizza la misura di Lebesgue. Il prossimo teorema trova la sua formulazione generale nei gruppi topologici localmente compatti.

TEOREMA 3.16 (Unicità della misura di Haar). Sia μ una misura di Borel su \mathbb{R}^n tale che:

- 1) $\mu(\tau_h(A)) = \mu(A)$ per ogni $h \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$;
- 2) $\mu([0, 1]^n) = 1$.

Allora $\mu = \mathcal{L}^n$.

Dim. Il cubo $[0, 1]^n$ si decompone nell'unione di 2^{nk} cubi (disgiunti) di lato $1/2^k$, che hanno tutti la stessa misura μ . Dunque, per ogni cubo Q di lato $1/2^k$ si ha $\mu(Q) = 1/2^{nk}$. Siccome un qualsiasi aperto è unione numerabile disgiunta di simili cubi, deduciamo che $\mu(A) = \mathcal{L}^n(A)$ per ogni insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^n$.

Sia ora $B \subset \mathbb{R}^n$ un insieme di Borel. Per il Teorema di regolarità da sopra per la misura di Lebesgue:

$$\mathcal{L}^n(B) = \inf\{\mathcal{L}^n(A) : B \subset A \text{ aperto}\} = \inf\{\mu(A) : B \subset A \text{ aperto}\} \geq \mu(B).$$

Ci rimane da provare che $\mu(B) \geq \mathcal{L}^n(B)$. Senza perdere di generalità possiamo supporre che B sia limitato e considerare un aperto A tale che $B \subset A$. Allora, si ha

$$\mathcal{L}^n(A) - \mathcal{L}^n(B) = \mathcal{L}^n(A \setminus B) \geq \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B) = \mathcal{L}^n(A) - \mu(B),$$

da cui si deduce la disuguaglianza cercata riordinando e semplificando $\mathcal{L}^n(A)$. \square

Dato un vettore di fattori di riscaldamento $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ con $\lambda_i \in \mathbb{R}$, definiamo la trasformazione lineare $\delta_\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\delta_\lambda(x) = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)x,$$

dove $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ è la matrice diagonale con i λ_i sulla diagonale e zero altrimenti, che noi identifichiamo con δ_λ . Per ogni pluri-intervallo $I \subset \mathbb{R}^n$, $\delta_\lambda(I)$ è ancora un pluri-intervallo – eventualmente degenerare se $\lambda_i = 0$ per uno o più i – ed inoltre

$$\text{mis}(\delta_\lambda(I)) = |\det(\delta_\lambda)| \text{mis}(I).$$

Con ragionamenti analoghi a quelli fatti per le traslazioni – che omettiamo – si prova il seguente fatto.

PROPOSIZIONE 3.17. Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ e $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ con $\lambda_i \neq 0$. Allora $\delta_\lambda(A)$ è \mathcal{L}^n -misurabile se e solo se lo è A ed inoltre $\mathcal{L}^n(\delta_\lambda(A)) = |\det(\delta_\lambda)| \mathcal{L}^n(A)$.

Sia ora $T \in O(n)$ una trasformazione ortogonale di \mathbb{R}^n . È naturale pensare che $\mathcal{L}^n(T(A)) = \mathcal{L}^n(A)$. La dimostrazione di questo fatto non è facile perchè se I è un pluri-intervallo purtroppo $T(I)$ non lo è più, in generale. Per ottenere una verifica formale della proprietà di invarianza per rotazioni della misura di Lebesgue serve un punto di vista diverso.

Sia $s \geq 0$ un parametro dimensionale e introduciamo la costante

$$\omega_s = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2 + 1)},$$

dove $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$ è la funzione Gamma di Eulero. Vedremo nell'Esempio 4.13 che quando $s = n \in \mathbb{N}$ si ha $\omega_n = \mathcal{L}^n(B_1)$, la misura della palla di raggio $r = 1$ in \mathbb{R}^n .

DEFINIZIONE 3.18 (Misure di Hausdorff). Per $s \geq 0$ e $\delta > 0$, sia $\mathcal{H}_\delta^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ la funzione di insiemi

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf \left\{ \omega_s \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{\text{diam}(E_k)}{2} \right)^s : E_k \subset \mathbb{R}^n, \text{diam}(E_k) \leq \delta, A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \right\},$$

e definiamo la misura di Hausdorff s -dimensionale $\mathcal{H}^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ passando al limite per $\delta \rightarrow 0^+$

$$\mathcal{H}^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(A).$$

È facile verificare che \mathcal{H}^s è una misura esterna, che dunque possiede la sua σ -algebra di Carathéodory degli insiemi misurabili. In effetti, \mathcal{H}^s è di Borel (prova omessa).

ESERCIZIO 3.19. Se $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un'isometria, allora $\mathcal{H}^s(T(A)) = \mathcal{H}^s(A)$ per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$ e per ogni $s \geq 0$.

La soluzione del precedente esercizio consiste nel notare che le isometrie preservano il diametro degli insiemi. Più in generale con considerazioni analoghe si prova il seguente esercizio:

ESERCIZIO 3.20. Se $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è funzione Lipschitziana con costante di Lipschitz $\text{Lip}(F)$, allora $\mathcal{H}^s(F(A)) \leq \text{Lip}(F)^s \mathcal{H}^s(A)$ per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$.

Useremo questi esercizi nel caso $s = n$ ed $s = n - 1$. Il seguente teorema fornisce un modo alternativo per introdurre la misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n .

TEOREMA 3.21. La misura (esterna) \mathcal{L}^n coincide con la misura (esterna) \mathcal{H}^n .

La dimostrazione segue dal Teorema 3.16, in quanto $\mathcal{H}^n(\tau_h(A)) = \mathcal{H}^n(A)$ e $\mathcal{H}^n([0, 1]^n) = 1$. La dimostrazione di questo secondo fatto non è facile (dipende dalla normalizzazione di \mathcal{H}^n con la costante ω_n , ma non è rilevante e quindi la omettiamo).

TEOREMA 3.22. Sia $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una trasformazione lineare e sia $A \subset \mathbb{R}^n$. Allora si ha

$$(3.8) \quad \mathcal{L}^n(T(A)) = |\det(T)| \mathcal{L}^n(A).$$

Dim. Possiamo supporre T invertibile, altrimenti $T(A)$ è contenuto in un iperpiano e dunque $\mathcal{L}^n(T(A)) = 0$ e la verifica è conclusa.

Per il teorema di classificazione delle matrici per equivalenza ortogonale, esistono trasformazioni ortogonali $T_1, T_2 \in O(n)$ e $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ con $\lambda_i \neq 0$ tali che $T = T_1 \circ \delta_\lambda \circ T_2$ ed in particolare si ha

$$\tau := |\det(T)| = |\det(\delta_\lambda)|.$$

Usando il Teorema 3.21 e l'Esercizio 3.19 si conclude che

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(T(A)) &= \mathcal{H}^n(T_1 \delta_\lambda T_2(A)) = \mathcal{H}^n(\delta_\lambda T_2(A)) = \mathcal{L}^n(\delta_\lambda T_2(A)) \\ &= \tau \mathcal{L}^n(T_2(A)) = \tau \mathcal{H}^n(T_2(A)) = \tau \mathcal{H}^n(A) = \tau \mathcal{L}^n(A). \end{aligned}$$

□

4. Funzioni misurabili e boreliane

D'ora in poi con "misurabile" intendiamo " \mathcal{L}^n -misurabile". Ricordiamo anche che $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ indica la retta reale estesa, dove fissiamo la topologia naturale.

DEFINIZIONE 3.23 (Funzione misurabile). Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ si dice misurabile, e scriveremo $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, se $f^{-1}(A) \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme misurabile per ogni aperto $A \subset \bar{\mathbb{R}}$.

Ricordiamo le seguenti notazioni per gli insiemi di sotto e sopralivello $t \in \bar{\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned} \text{sottolivelli aperti } \{f < t\} &= \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < t\}, \\ \text{sottolivelli chiusi } \{f \leq t\} &= \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq t\}, \\ \text{sopralivelli aperti } \{f > t\} &= \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}, \\ \text{sopralivelli chiusi } \{f \geq t\} &= \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq t\}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 3.24. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ una funzione. Sono equivalenti:

- 1) f è misurabile.
- 2) Gli insiemi $\{f < t\}$ sono misurabili per ogni $t \in \bar{\mathbb{R}}$.

- 3) Gli insiemi $\{f \leq t\}$ sono misurabili per ogni $t \in \bar{\mathbb{R}}$.
 4) Gli insiemi $\{f > t\}$ sono misurabili per ogni $t \in \bar{\mathbb{R}}$.
 5) Gli insiemi $\{f \geq t\}$ sono misurabili per ogni $t \in \bar{\mathbb{R}}$.

Ad esempio, l'implicazione $2) \Rightarrow 3)$ deriva dall'identità

$$\{f \leq t\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f < t + 1/n\}.$$

Dal punto 2) passando per 4) segue che gli insiemi $\{s < f < t\}$ sono misurabili. A sua volta questo implica il punto 1), in quanto ogni aperto di $\bar{\mathbb{R}}$ è unione numerabile di intervalli aperti.

L'insieme delle funzioni misurabili finite (ovvero che non prendono i valori $\pm\infty$) è un'algebra con le usuali operazioni.

PROPOSIZIONE 3.25. Siano $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ funzioni misurabili finite ed $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora $\alpha f + \beta g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $fg \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Se inoltre $f(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, allora anche $1/f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Dim. Ad esempio, dalla identità

$$\{f + g < t\} = \bigcup_{\substack{p, q \in \mathbb{Q} \\ p+q < t}} \{f < p\} \cap \{g < q\}$$

segue la misurabilità di $f + g$. Si noti che l'unione è numerabile. Se poi $f, g > 0$ sono strettamente positive, allora dall'identità

$$\{fg < t\} = \bigcup_{\substack{p, q \in \mathbb{Q} \\ pq < t}} \{f < p\} \cap \{g < q\}$$

segue la misurabilità di fg . La verifica delle altre affermazioni è lasciata al lettore. \square

L'insieme delle funzioni misurabili è anche stabile rispetto alle operazioni di sup, inf e di limite puntuale.

PROPOSIZIONE 3.26. Sia $f_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni misurabili. Allora sono misurabili anche le funzioni

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k \quad \text{e} \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k.$$

Dim. La tesi segue dalle due identità

$$\left\{ \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k < t \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{f_k < t\} \quad \text{e} \quad \left\{ \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k > t \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{f_k > t\}.$$

\square

COROLLARIO 3.27. Sia $f_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni misurabili. Allora sono misurabili anche le funzioni

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \quad \text{e} \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k.$$

In particolare, se il limite puntuale esiste, è misurabile la funzione

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

OSSERVAZIONE 3.28. Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ in insieme misurabile ed $f : A \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ una funzione. Diremo che f è misurabile su A e scriveremo $f \in \mathcal{M}(A)$ se $f\chi_A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Tutti i teoremi precedenti valgono ancora per le funzioni misurabili su A .

Quando la σ -algebra è quella di Borel allora si parla di insiemi e funzioni Boreliane.

DEFINIZIONE 3.29 (Funzione di Borel). Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ si dice di Borel se $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ è un insieme di Borel per ogni aperto $A \subset \bar{\mathbb{R}}$.

Ad esempio, il limite puntuale di funzioni continue è una funzione boreliana, Esercizio 3.63.

5. Costruzione dell'integrale di Lebesgue e sue proprietà

Per definire l'integrale di Lebesgue si parte dall'integrale delle funzioni semplici. La più semplice delle funzioni semplici è la funzione caratteristica di un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

DEFINIZIONE 3.30 (Funzione semplice e suo integrale). Una funzione $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ del tipo

$$(3.9) \quad \varphi(x) = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

con $k \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ ed A_1, \dots, A_k insiemi misurabili di \mathbb{R}^n fra loro disgiunti, si dice funzione semplice. Indichiamo con $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni semplici.

Diremo che la funzione semplice (3.9) è integrabile se verifica la condizione $a_i = 0$ se $\mathcal{L}^n(A_i) = \infty$. In questo caso definiamo il suo integrale come

$$(3.10) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{L}^n(A_i),$$

con la convenzione $0 \cdot \infty = 0$.

La rappresentazione (3.9) di una funzione semplice non è unica. Nonostante questo, la definizione (3.10) di integrale è ben posta, cioè non dipende dalla rappresentazione. Quando $\varphi \geq 0$, ovvero $a_i \geq 0$, l'integrale in (3.10) è ben definito, eventualmente ∞ , anche per funzioni semplici non integrabili.

LEMMA 3.31. Siano $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ due funzioni semplici integrabili. Allora anche $\varphi + \psi$ è una funzione semplice integrabile ed inoltre

$$(3.11) \quad \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi(x) + \psi(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx.$$

Dim. Sia φ come in (3.9) e sia poi

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^h b_j \chi_{B_j}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

con $b_j \in \mathbb{R}$ e B_j misurabili tali che $b_j = 0$ se $\mathcal{L}^n(B_j) = \infty$. Possiamo senza perdere di generalità supporre che $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcup_{j=1}^h B_j$ con unioni disgiunte. Allora si ha

$$\varphi(x) + \psi(x) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^h (a_i + b_j) \chi_{A_i \cap B_j}(x),$$

dove $a_i = b_j = 0$ se $\mathcal{L}^n(A_i \cap B_j) = \infty$. Dunque è ben definito l'integrale

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi(x) + \psi(x)) dx &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^h (a_i + b_j) \mathcal{L}^n(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^h a_i \mathcal{L}^n(A_i \cap B_j) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^h b_j \mathcal{L}^n(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{L}^n\left(A_i \cap \bigcup_{j=1}^h B_j\right) + \sum_{j=1}^h b_j \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{i=1}^k A_i \cap B_j\right). \\ &= \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{L}^n(A_i) + \sum_{j=1}^h b_j \mathcal{L}^n(B_j) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx. \end{aligned}$$

□

Le funzioni misurabili non negative possono essere approssimate da funzioni semplici. Il prossimo lemma e il suo corollario mostrano come.

LEMMA 3.32. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ una funzione misurabile non negativa. Esiste una successione di insiemi misurabili $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tale che

$$(3.12) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dim. Definiamo gli insiemi misurabili $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq 1\}$ e per induzione

$$A_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : f(x) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) \geq \frac{1}{k} \right\}, \quad k \geq 2.$$

Affermiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$(3.13) \quad f(x) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x).$$

Fissato x , sia $\bar{k} = \sup\{k \in \mathbb{N} : x \in A_k\}$. Se $\bar{k} = \infty$, ci sono infiniti k tali che

$$f(x) \geq \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) + \frac{1}{k},$$

e per $k \rightarrow \infty$ si ottiene (3.13). Se $\bar{k} \in \mathbb{N}$ allora

$$f(x) \geq \sum_{j=1}^{\bar{k}-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) + \frac{1}{\bar{k}} \geq \sum_{j=1}^{\bar{k}} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x).$$

Questo termina la prova di (3.13).

Proviamo la disuguaglianza opposta. Se definitivamente in k si ha $x \in A_k$, la (3.13) diventa $\infty = \infty$. Possiamo dunque supporre che per infiniti $k \in \mathbb{N}$ si abbia $x \notin A_k$. Per tali k si ha

$$f(x) < \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) + \frac{1}{k},$$

e con $k \rightarrow \infty$ si ottiene la disuguaglianza desiderata. □

COROLLARIO 3.33 (Approssimazione con funzioni semplici). Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ una funzione misurabile non negativa. Esiste una successione crescente di funzioni semplici $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tali che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Il precedente corollario si può migliorare mostrando che se f è limitata allora la convergenza è uniforme. Siamo pronti per la definizione di integrale di Lebesgue.

DEFINIZIONE 3.34 (Integrale di Lebesgue). Definiamo l'integrale di una funzione misurabile non negativa $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$, come

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \varphi \leq f \right\} \in [0, \infty].$$

Se $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \in [0, \infty)$ diremo che f è integrabile.

Una funzione misurabile $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ si dice integrabile se sono integrabili sia $f^+ = \max\{f, 0\}$ che $f^- = \max\{-f, 0\}$. In questo caso, definiamo il suo integrale come

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} f^+(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(x) dx.$$

OSSERVAZIONE 3.35. Siccome $|f| = f^+ + f^-$, f è integrabile se e solo se lo è $|f|$ ed inoltre

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx.$$

OSSERVAZIONE 3.36 (Formula di restrizione). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e sia $f \in \mathcal{M}(A)$ una funzione misurabile. Possiamo estendere f ad una funzione $\bar{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ ponendo

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

Se \bar{f} è integrabile su \mathbb{R}^n diremo che f è integrabile su A e definiamo il suo integrale come

$$\int_A f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(x)dx.$$

Se $B \subset A$ è un insieme misurabile ed f è integrabile su A , allora lo è anche su B ed è valida la formula di restrizione

$$\int_B f(x)dx = \int_A \chi_B(x)f(x)dx.$$

DEFINIZIONE 3.37 (quasi ovunque). Se una proprietà vale in tutti i punti di \mathbb{R}^n salvo un insieme $N \subset \mathbb{R}^n$ con misura nulla, $\mathcal{L}^n(N) = 0$, diremo che quella proprietà vale quasi ovunque (q.o.).

La proprietà di monotonia per l'integrale di Lebesgue segue facilmente dalla definizione.

PROPOSIZIONE 3.38. Siano f e g due funzioni integrabili su \mathbb{R}^n tali che $f \leq g$ q.o. Allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx.$$

Dim. La tesi segue dal fatto che $f^+ \leq g^+$ ed $f^- \geq g^-$. □

OSSERVAZIONE 3.39. Se $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ è integrabile, allora l'insieme $A_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| = \infty\}$ ha misura nulla. Infatti, posto $A_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq k\}$ si ha per monotonia

$$\mathcal{L}^n(A_k) = \int_{A_k} 1 dx \leq \frac{1}{k} \int_{A_k} |f(x)|dx \leq \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx,$$

e con $k \rightarrow \infty$ si ottiene la tesi.

Nella Definizione 3.34, la proprietà di f di essere “misurabile” non svolge alcun ruolo. È possibile definire l'integrale di funzioni anche non misurabili utilizzando funzioni semplici modellate su insiemi non necessariamente misurabili. Questi insiemi sono misurati dalla misura *esterna* di Lebesgue. Nel prossimo teorema, al contrario, la misurabilità è indispensabile.

TEOREMA 3.40 (Convergenza monotona, Teorema di Beppo Levi). Sia $f_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ una successione crescente di funzioni misurabili non negative e sia $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$. Allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

Dim. La funzione f è misurabile in quanto limite di funzioni misurabili. Inoltre, dal momento che $f_k \leq f_{k+1} \leq f$, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_{k+1} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f dx$$

e dunque esiste il limite

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f dx.$$

Si tratta di provare la disuguaglianza opposta. Se $L = \infty$ non vi è niente da provare. Sia dunque $L < \infty$ e mostriamo che per ogni funzione semplice $\varphi \leq f$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx \leq L.$$

Sia $\varphi = \sum_{i=1}^h a_i \chi_{A_i}$ con $a_i \geq 0$ ed A_i insiemi misurabili fra loro disgiunti tali che $a_i > 0$ implica $\mathcal{L}^n(A_i) < \infty$.

Fissato $\delta \in (0, 1)$ abbassiamo la funzione semplice e consideriamo $\delta\varphi$. Gli insiemi

$$E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \delta\varphi(x) \leq f_k(x)\}$$

sono misurabili ed inoltre $E_k \subset E_{k+1}$, in quanto $f_k \leq f_{k+1}$. Inoltre $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \mathbb{R}^n$ perchè se $f(x) > 0$ allora $f_k(x) \rightarrow f(x) > \delta\varphi(x)$, e dunque $f_k(x) \geq \delta\varphi(x)$ definitivamente in k . Integrando la disuguaglianza $\delta\varphi \chi_{E_k} \leq f_k$, e passando al limite si ottiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \delta\varphi(x) \chi_{E_k}(x) dx \leq L.$$

Tolto δ , l'integrale nel membro di sinistra è

$$\int_{E_k} \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^h a_i \mathcal{L}^n(A_i \cap E_k),$$

dove non è restrittivo supporre $\mathcal{L}^n(A_i \cap E_k) < \infty$ (altrimenti deve essere $a_i = 0$).

Per il Teorema 3.7 abbiamo (è qui che stiamo usando la misurabilità)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}^n(A_i \cap E_k) = \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_i \cap E_k\right) = \mathcal{L}^n\left(A_i \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \mathcal{L}^n(A_i),$$

e dunque

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \delta\varphi \chi_{E_k}(x) dx = \sum_{i=1}^h \delta a_i \mathcal{L}^n(A_i) = \delta \int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx.$$

Per $\delta \rightarrow 1^-$ nella disuguaglianza

$$\delta \int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx \leq L$$

si ottiene la tesi. □

DEFINIZIONE 3.41. (Spazio $L^1(A)$) Dato un insieme misurabile $A \subset \mathbb{R}^n$ indichiamo con $L^1(A)$ l'insieme di tutte le funzioni integrabili su A .

PROPOSIZIONE 3.42. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile. L'insieme $L^1(A)$ è uno spazio vettoriale e l'operatore integrale $I : L^1(A) \rightarrow \mathbb{R}$, $I(f) = \int_A f(x) dx$, è lineare.

Dim. L'omogeneità è facile da provare e la verifica è lasciata al lettore. Siano f, g integrabili su A . Siccome $|f + g| \leq |f| + |g|$, sicuramente $f + g$ è integrabile su A . Proviamo che l'integrale rispetta la somma:

$$\int_A (f(x) + g(x))dx = \int_A f(x)dx + \int_A g(x)dx$$

È sufficiente considerare il caso in cui $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ siano non negative. Siano $\varphi_k, \psi_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ non negative tali che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = f(x), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k(x) = g(x),$$

in modo monotono crescente. Dal Lemma 3.31

$$(3.14) \quad \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_k(x) + \psi_k(x))dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)dx + \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(x)dx,$$

e passando al limite per $k \rightarrow \infty$ col teorema della convergenza monotona si ottiene la tesi. Questo prova che $L^1(A)$ è uno spazio vettoriale e che l'operatore integrale è lineare. □

Possiamo definire su $L^1(A)$ la seminorma

$$\|f\|_{L^1(A)} = \|f\|_1 = \int_A |f(x)|dx.$$

Il "semi" è dovuto al fatto che $\|f\|_1 = 0$ non implica $f = 0$ ma soltanto $f = 0$ q.o. Opportunamente quozientato L^1 diventa uno spazio di Banach (cioè completo), come si vedrà ad Analisi Reale.

6. Teorema di riduzione e teorema di Fubini-Tonelli

Per calcolare integrali di Lebesgue è utile il Teorema di Fubini-Tonelli, che riduce l'integrazione in un blocco di variabili ad una ripetizione di integrazioni in variabili separate.

Siano $p, q, n \in \mathbb{N}$ tali che $p + q = n$ e fattorizziamo $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ con le variabili $x \in \mathbb{R}^p$ ed $y \in \mathbb{R}^q$. Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ definiamo le sue x ed y -sezioni come

$$A^x = \{y \in \mathbb{R}^q : (x, y) \in A\},$$

$$A^y = \{x \in \mathbb{R}^p : (x, y) \in A\}.$$

TEOREMA 3.43 (Teorema di riduzione). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme \mathcal{L}^n -misurabile. Allora:

- (i) l'insieme A^x è \mathcal{L}^q -misurabile per \mathcal{L}^p -quasi ogni $x \in \mathbb{R}^p$;
- (ii) la funzione $x \rightarrow \mathcal{L}^q(A^x)$ è \mathcal{L}^p -misurabile;
- (iii) Vale la formula di riduzione

$$\mathcal{L}^n(A) = \int_{\mathbb{R}^p} \mathcal{L}^q(A^x) dx.$$

La dimostrazione verrà vista nel corso di Analisi Reale. Il Teorema di riduzione formalizza il "Principio di Cavalieri".

OSSERVAZIONE 3.44 (Integrale e sottografico). Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile ed $f \in L^1(A)$ una funzione integrabile non negativa. Il sottografico di f è il sottoinsieme di $A \times \mathbb{R}$

$$G = \{(x, t) \in A \times \mathbb{R} : 0 < t < f(x)\}.$$

Dati $x \in A$ e $t > 0$, le x e t sezioni di G sono rispettivamente

$$G^x = \{t \in (0, \infty) : t < f(x)\} \quad \text{e} \quad G^t = \{x \in A : f(x) > t\}.$$

Usando il Teorema di riduzione ritroviamo l'interpretazione dell'integrale come area del sottografico:

$$\mathcal{L}^{n+1}(G) = \int_A \mathcal{L}^1(G^x) dx = \int_A f(x) dx.$$

In modo analogo, sempre usando il teorema di riduzione nell'altro ordine si arriva alla seguente identità:

$$\mathcal{L}^{n+1}(G) = \int_{(0, \infty)} \mathcal{L}^n(G^t) dt = \int_0^\infty \mathcal{L}^n(\{x \in A : f(x) > t\}) dt.$$

La funzione $t \mapsto \mathcal{L}^n(\{x \in A : f(x) > t\})$ è monotona e dunque l'ultimo integrale è ben definito anche come integrale di Riemann generalizzato.

Una conseguenza del Teorema di riduzione è il Teorema di Fubini-Tonelli.

TEOREMA 3.45 (Fubini-Tonelli). Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ una funzione integrabile. Allora:

- (i) la funzione $y \rightarrow f(x, y)$ è in $L^1(\mathbb{R}^q)$ per \mathcal{L}^p -quasi ogni $x \in \mathbb{R}^p$;
- (ii) la funzione $x \rightarrow \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy$ è in $L^1(\mathbb{R}^p)$;
- (iii) Vale la formula di integrazione ripetuta

$$(3.15) \quad \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx dy,$$

dove $dx dy = d\mathcal{L}^n$ è l'elemento di integrazione in \mathbb{R}^n .

Chiaramente, il Teorema di Fubini-Tonelli vale anche con la fattorizzazione scambiata di ordine, integrando “dentro” in dx e “fuori” in dy . Quando f è una funzione misurabile non negativa, la formula di riduzione (3.15) è valida a prescindere dal fatto che f sia integrabile o no (Teorema di Tonelli). Tuttavia se f cambia segno e non è integrabile, il Teorema di Fubini-Tonelli cessa di valere (Esercizio 3.80). Può anche succedere che una funzione non sia integrabile e cambi segno, e cionondimeno gli integrali ripetuti nei due ordini siano uguali (Esercizio 3.81).

7. Cambio di variabile nell'integrale di Lebesgue

In questa sezione proviamo il Teorema sul cambiamento di variabile negli integrali multipli. Nella dimostrazione si usa in modo essenziale il Lemma di Radon-Nykodim.

LEMMA 3.46 (Radon-Nykodim). Sia μ una misura di Borel su \mathbb{R}^n finita sui compatti che verifica le seguenti due proprietà:

- i) Per ogni insieme di Borel $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, la condizione $\mathcal{L}^n(B) = 0$ implica $\mu(B) = 0$. (In questo caso si scrive $\mu \ll \mathcal{L}^n$ e si dice che μ è assolutamente continuità rispetto a \mathcal{L}^n).

ii) Per \mathcal{L}^n -q.o. $x \in A$ esiste la seguente densità (“derivata di misure”)

$$\delta(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu(B_r(x))}{\mathcal{L}^n(B_r(x))}.$$

Allora la funzione δ è integrabile sui compatti e per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\mu(B) = \int_B \delta(x) dx.$$

Per la dimostrazione di questo teorema si veda ad esempio Evans-Gariepy, *Measure Theory and Fine properties of Functions*, CRC Press.

Passiamo al teorema sul cambio di variabile. Ricordiamo che, dato un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, una funzione $F \in C^1(A; \mathbb{R}^n)$ si dice diffeomorfismo di classe C^1 se F è aperta, è invertibile (sull’immagine) e ha inversa di classe C^1 .

TEOREMA 3.47 (Cambio di variabile). Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $F \in C^1(A; \mathbb{R}^n)$ un diffeomorfismo di classe C^1 ed $f \in L^1(F(A))$. Allora $f \circ F | \det JF| \in L^1(A)$ e vale la formula di cambiamento di variabile

$$(3.16) \quad \int_{F(A)} f(y) dy = \int_A f(F(x)) | \det JF(x) | dx.$$

Formalmente, si pone $y = F(x)$, si sostituisce $dy = | \det JF(x) | dx$ e si trasformano i domini di integrazione in modo corrispondente.

Dim. Senza perdere di generalità possiamo supporre $f = 1$ e $\mathcal{L}^n(F(A)) < \infty$. Il caso generale si ottiene usando la formula (3.12) e il Teorema della convergenza monotona. Dobbiamo dimostrare che

$$(3.17) \quad \mathcal{L}^n(F(A)) = \int_A | \det JF(x) | dx.$$

Indichiamo con $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A)$ la σ -algebra dei boreliani $B \subset A$ e consideriamo la misura $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty)$

$$\mu(B) = \mathcal{L}^n(F(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Si tratta di una misura di Borel finita. Affermiamo che:

- i) $\mu \ll \mathcal{L}^n$;
- ii) per ogni $x \in A$ si ha

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu(B_r(x))}{\omega_n r^n} = | \det JF(x) |,$$

dove $\omega_n r^n = \mathcal{L}^n(B_r)$. La formula (3.17) segue allora dal Lemma di Radon-Nykodim.

Proviamo la i). Per il teorema di regolarità da sotto della misura di Lebesgue possiamo supporre che B sia un sottoinsieme compatto di A . La funzione $F : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ è Lipschitziana. Usando il Teorema 3.21 e l’Esercizio 3.20 deduciamo che

$$\mu(B) = \mathcal{L}^n(F(B)) = \mathcal{H}^n(F(B)) \leq \text{Lip}(F)^n \mathcal{H}^n(B) = \text{Lip}(F)^n \mathcal{L}^n(B) = 0.$$

Proviamo la ii) nel punto $x_0 \in A$. Sia $T = J_{x_0} F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ ed osserviamo che, essendo F un diffeomorfismo, esiste la trasformazione inversa $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Mostriamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $r_0 > 0$ tale che per ogni $0 < r < r_0$ si ha

$$(3.18) \quad F(B_r(x_0)) \subset F(x_0) + T(B_{(1+\varepsilon)r}(0)).$$

Sia infatti $x \in B_r(x_0)$. Dalla differenziabilità di F in x_0 segue che

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x_0) + T(x - x_0) + o(x - x_0) \\ &= F(x_0) + T\left(x - x_0 + T^{-1}o(x - x_0)\right), \end{aligned}$$

dove $o(x - x_0) \in \mathbb{R}^n$ è tale che $o(x - x_0)/|x - x_0| \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$. Scegliamo $r_0 > 0$ tale che per $|x - x_0| < r_0$ si abbia

$$|T^{-1}o(x - x_0)| < \varepsilon|x - x_0|.$$

In questo modo $x - x_0 + T^{-1}o(x - x_0) \in B_{(1+\varepsilon)r}(0)$ se $|x - x_0| < r < r_0$. La (3.18) è provata. Dalla (3.18) segue che

$$\begin{aligned} \mu(B_r(x_0)) &= \mathcal{L}^n(F(B_r(x_0))) \leq \mathcal{L}^n(T(B_{(1+\varepsilon)r}(0))) \\ &= |\det T| \mathcal{L}^n(B_{(1+\varepsilon)r}(0)) = |\det T|(1 + \varepsilon)^n r^n \omega_n. \end{aligned}$$

Dalla arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ concludiamo che

$$(3.19) \quad \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu(B_r(x_0))}{\omega_n r^n} \leq |\det JF(x_0)|.$$

Rimane da verificare la disuguaglianza che va nella direzione opposta. Affermiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $r_0 > 0$ tale che per ogni $0 < r < r_0$ si ha

$$(3.20) \quad F(x_0) + T(B_{(1-\varepsilon)r}(0)) \subset F(B_r(x_0)).$$

Senza perdere di generalità possiamo supporre che qui le palle siano chiuse. La dimostrazione di (3.20) è identica al passaggio centrale nella prova del teorema di invertibilità locale.

Sia $y \in F(x_0) + T(B_{(1-\varepsilon)r}(0))$ ovvero $|T^{-1}(y - F(x_0))| < (1 - \varepsilon)r$. Per trovare $x \in B_r(x_0)$ tale che $F(x) = y$ si considera la trasformazione

$$G(x) = x + T^{-1}(y - F(x)), \quad x \in B_r(x_0).$$

Se $r_0 > 0$ è sufficientemente piccolo ed $r < r_0$ allora:

- 1) G trasforma $B_r(x_0)$ in se stessa;
- 2) G è una contrazione.

Dal Teorema di punto fisso di Banach segue che G ha un punto fisso $x \in B_r(x_0)$, che sarà la soluzione di $F(x) = y$. Questo prova (3.20).

Dalla (3.20) segue che

$$\mu(B_r(x_0)) = \mathcal{L}^n(F(B_r(x_0))) \geq \mathcal{L}^n(T(B_{(1-\varepsilon)r}(0))) = |\det T|(1 - \varepsilon)^n r^n \omega_n,$$

e quindi, per l'arbitrarietà di ε ,

$$(3.21) \quad \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu(B_r(x_0))}{\omega_n r^n} \geq |\det JF(x_0)|.$$

Questo termina la dimostrazione. □

ESEMPIO 3.48 (Coordinate polari nel piano). Un caso importante di cambio di variabile sono le coordinate polari nel piano. La funzione $F : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$F(r, \vartheta) = (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$$

è un diffeomorfismo sull'immagine $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = 0\}$. L'insieme tolto ha misura nulla e non influisce sugli integrali. La matrice Jacobiana di F è

$$JF(r, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{pmatrix},$$

e dunque il determinante Jacobiano è

$$\det(JF(r, \vartheta)) = r.$$

Sia ora $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ una funzione integrabile. Usando il Teorema 3.47 prima e il Teorema di Fubini-Tonelli poi, troviamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi)} f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) |\det JF(r, \vartheta)| d\mathcal{L}^2(r, \vartheta) \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) d\vartheta r dr. \end{aligned}$$

Quando f ha simmetria radiale, ovvero $f(x, y) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$ per una funzione $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, l'integrale in due variabili si riduce ad un integrale in una variabile

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 2\pi \int_0^\infty \varphi(r) r dr.$$

ESEMPIO 3.49 (Coordinate sferiche nello spazio). Detto $A = \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^3$, la funzione $F : A \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$F(r, \vartheta, \varphi) = (r \cos \vartheta \sin \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \varphi)$$

è un diffeomorfismo sulla sua immagine. L'insieme $\mathbb{R}^3 \setminus F(A)$ ha misura nulla e non influisce sugli integrali. La matrice Jacobiana di F è

$$JF(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \sin \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{pmatrix},$$

e dunque il determinante Jacobiano è

$$\det(JF(r, \vartheta, \varphi)) = -r^2 \sin \varphi.$$

Sia ora $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$ una funzione integrabile. Usando il Teorema 3.47 troviamo

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)} f(F(r, \vartheta, \varphi)) r^2 \sin \varphi dr d\vartheta d\varphi.$$

Quando f ha simmetria sferica, ovvero $f(x, y, z) = \psi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ per una funzione $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, l'integrale in tre variabili si riduce ad un integrale in una variabile

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = 4\pi \int_0^\infty \psi(r) r^2 dr.$$

ESEMPIO 3.50 (Integrale della Gaussiana). Vogliamo provare che

$$(3.22) \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

La dimostrazione è interessante perché parte dal corrispondente integrale in due variabili, che si riesce ad integrare in modo esplicito. Per la formula di integrazione in coordinate polari si ha infatti

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \pi.$$

D'altra parte, per il Teorema di Fubini-Tonelli

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2,$$

e mettendo insieme le due formule trovate si ottiene la (3.22).

8. Integrale di Riemann e integrale di Lebesgue

In questa sezione spieghiamo come siano fra loro legati gli integrali di Riemann e di Lebesgue. Come prima cosa mostriamo che una funzione è Riemann-integrabile se e solo se l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha misura di Lebesgue nulla. Dato $A \subset \mathbb{R}$, indicheremo con $|A| = \mathcal{L}^1(A)$ la sua misura di Lebesgue.

DEFINIZIONE 3.51 (Oscillazione locale). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione (localmente) limitata. Definiamo l'oscillazione di f su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ come

$$\omega(f, I) = \sup\{f(y) - f(z) : y, z \in I\}.$$

L'oscillazione locale di f nel punto $x \in \mathbb{R}$ è poi definita come

$$\omega(f, x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f, I(x, \delta)),$$

dove $I(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta\}$,

Chiaramente, f è continua nel punto $x \in \mathbb{R}$ se e solo se $\omega(f, x) = 0$.

LEMMA 3.52. La funzione $x \rightarrow \omega(f, x)$ è semicontinua superiormente, ovvero gli insiemi $E_t = \{x \in \mathbb{R} : \omega(f, x) < t\}$ sono aperti per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Dim. Se $x \in E_t$, esiste $\delta > 0$ tale che $\omega(f, I(x, \delta)) < t$. Se $y \in I(x, \delta)$ è possibile trovare $\delta' > 0$ tale che $I(y, \delta') \subset I(x, \delta)$ e dunque

$$\omega(f, y) \leq \omega(f, I(y, \delta')) \leq \omega(f, I(x, \delta)) < t.$$

Dunque $I(x, \delta) \subset E_t$ e pertanto quest'ultimo insieme è aperto. \square

Sia ora $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo fissato ed indichiamo con $\mathcal{R}([a, b])$ l'insieme (spazio vettoriale) delle funzioni Riemann-integrabili su questo intervallo.

LEMMA 3.53. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Supponiamo che per ogni $x \in [a, b]$ risulti $\omega(f, x) < \varepsilon$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che $\omega(f, I) < \varepsilon$ per ogni intervallo $I \subset [a, b]$ con $|I| < \delta$.

Dim. Per ogni $x \in [a, b]$ esiste $\delta_x > 0$ tale che $\omega(f, I(x, \delta_x)) < \varepsilon$. La famiglia di intorno $\{I(x, \delta_x/2) : x \in [a, b]\}$ è un ricoprimento aperto di $[a, b]$ dal quale è possibile estrarre un sottoricoprimento finito $\{I(x_i, \delta_i/2) : i = 1, \dots, n\}$. Scegliendo $\delta = \min\{\delta_i/2 : i = 1, \dots, n\}$, per ogni $x \in [a, b]$ esiste i tale che $I(x, \delta) \subset I(x_i, \delta_i)$, e pertanto

$$\omega(f, I(x, \delta)) \leq \omega(f, I(x_i, \delta_i)) < \varepsilon.$$

□

TEOREMA 3.54. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora $f \in \mathcal{R}([a, b])$ se e solo se l'insieme $D = \{x \in [a, b] : \omega(f, x) > 0\}$ ha misura di Lebesgue nulla.

Dim. Proviamo che $|D| > 0$ implica $f \notin \mathcal{R}([a, b])$. Siccome

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in [a, b] : \omega(f, x) \geq \frac{1}{k} \right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k,$$

allora esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $|D_k| > 0$.

Sia $\sigma \in \mathcal{S}([a, b])$ una scomposizione di $[a, b]$. Allora

$$\begin{aligned} S(f, \sigma) - s(f, \sigma) &= \sum_{I \in \sigma} \omega(f, I) |I| \geq \sum_{\text{int}(I) \cap D_k \neq \emptyset} \omega(f, I) |I| \\ &\geq \frac{1}{k} \sum_{\text{int}(I) \cap D_k \neq \emptyset} |I| \geq \frac{1}{k} |D_k|. \end{aligned}$$

Infatti, $|D_k| \leq \sum_{\text{int}(I) \cap D_k \neq \emptyset} |I|$ e inoltre $\omega(f, I) \geq \omega(f, x) \geq 1/k$ per qualche $x \in \text{int}(I) \cap D_k$. Questo prova la non integrabilità di f .

Mostriamo che $|D| = 0$ implica $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Fissato $\varepsilon > 0$ si deve trovare una scomposizione $\sigma \in \mathcal{S}([a, b])$ tale che $S(f, \sigma) - s(f, \sigma) \leq \varepsilon$. Sia $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$ come sopra. In particolare $|D_k| = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Esiste una famiglia $F_1 = \{I\}$ di intervalli (chiusi) tali che $D_k \subset \bigcup_{I \in F_1} I$ e $\sum_{I \in F_1} |I| \leq \varepsilon$. Poiché D_k è compatto, non è restrittivo supporre che F_1 sia finita. Avremo

$$[a, b] \setminus \bigcup_{I \in F_1} \text{int}(I) = \bigcup_{I \in F_2} I$$

per una famiglia finita F_2 di intervalli chiusi disgiunti. Poiché $\omega(f, x) < 1/k$ per ogni $x \in I$, con $I \in F_2$, dal Lemma 3.53 segue che $\bigcup_{I \in F_2} I = \bigcup_{I \in F_3} I$ per una famiglia finita F_3 di intervalli chiusi disgiunti tali che $\omega(f, I) < 1/k$ per ogni $I \in F_3$.

Sia $\sigma = F_1 \cup F_3$. Allora, detto $M = \sup_{[a, b]} |f|$, si trova

$$\sum_{I \in \sigma} \omega(f, I) |I| = \sum_{I \in F_1} \omega(f, I) |I| + \sum_{I \in F_3} \omega(f, I) |I| \leq 2M \sum_{I \in F_1} |I| + \frac{b-a}{k} \leq (2M+1)\varepsilon$$

non appena $k > (b-a)/\varepsilon$.

□

Ora proviamo che l'integrale di Riemann, quando esiste, coincide con quello di Lebesgue.

TEOREMA 3.55. Sia $f \in \mathcal{R}([a, b])$ una funzione (limitata) integrabile secondo Riemann. Allora f è integrabile secondo Lebesgue e gli integrali coincidono.

Dim. Mostriamo che f è una funzione misurabile verificando per per ogni $t \in \mathbb{R}$ gli insiemi $E_t = \{x \in [a, b] : f(x) < t\}$ sono misurabili. Sia $D = \{x \in [a, b] : \omega(f, x) > 0\}$ l'insieme dei punti di discontinuità di f . Per il Teorema 3.54 risulta $|D| = 0$. Sia $x \in E_t \setminus D$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $r_x > 0$ tale che $\omega(f, I(x, r_x)) < \varepsilon$, dove

$I(x, r_x) = (x - r_x, x + r_x)$. Se scegliamo $\varepsilon < t - f(x)$ segue che $f(y) \leq f(x) + \varepsilon < t$ per ogni $y \in I(x, r_x)$, ovvero $I(x, r_x) \subset E_t$, e dunque

$$E_t = (D \cap E_t) \cup \bigcup_{x \in E_t \setminus D} I(x, r_x).$$

L'insieme $\bigcup_{x \in E_t \setminus D} I(x, r_x)$ è aperto e dunque misurabile. Anche $D \cap E_t$ è misurabile, perchè $|D \cap E_t| \leq |D| = 0$. Dunque E_t è misurabile essendo unione di due insiemi misurabili.

Sia $f \in \mathcal{R}([a, b])$ e consideriamo la parte positiva e negativa $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ e $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$. Allora $f^+, f^- \in \mathcal{R}([a, b])$. Infatti $\omega(f^\pm, I) \leq \omega(f, I)$ per ogni intervallo I e dunque la integrabilità di f^\pm segue da quella di f (criterio di Riemann).

Non è restrittivo supporre $f \geq 0$. Indichiamo con $\mathcal{S}(f)$ l'insieme delle funzioni semplici minoranti di f . Allora

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}([a, b])} \sum_{I \in \sigma} |I| \inf_I f \leq \sup_{\varphi \in \mathcal{S}(f)} \int_{[a, b]} \varphi(x) dx = \int_{[a, b]} f(x) dx.$$

Infatti, ad ogni scomposizione $\sigma = \{I\}$ corrisponde la funzione semplice $\varphi(x) = \sum_{I \in \sigma} (\inf_I f) \chi_I(x) \in \mathcal{S}(f)$.

Sia $\sigma \in \mathcal{S}([a, b])$ e sia $\varphi \in \mathcal{S}(f)$ con $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \chi_{A_i}$, dove $\varphi_i \in \mathbb{R}$ e $\bigcup_{i=1}^n A_i = [a, b]$ con $A_i \subset [a, b]$ misurabili e unione disgiunta. Allora

$$\begin{aligned} \int_{[a, b]} \varphi(x) dx &= \sum_{i=1}^n \varphi_i \int_{[a, b]} \chi_{A_i} dx = \sum_{i=1}^n \varphi_i \sum_{I \in \sigma} \int_I \chi_{A_i} dx = \sum_{I \in \sigma} \int_I \sum_{i=1}^n \varphi_i \chi_{A_i} dx \\ &\leq \sum_{I \in \sigma} |I| \sup_I f. \end{aligned}$$

Dalla arbitrarietà di $\varphi \in \mathcal{S}(f)$ e di $\sigma \in \mathcal{S}([a, b])$ segue che

$$\int_{[a, b]} \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx.$$

□

9. Esercizi su misura di Lebesgue e funzioni misurabili

ESERCIZIO 3.56. Siano $Q \subset \mathbb{R}^2$ un quadrato e $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una trasformazione lineare. Verificare in modo elementare che l'area di $T(Q)$ è pari a $|\det(T)|$ volte l'area di Q .

ESERCIZIO 3.57. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua con grafico $G = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$. Provare che $\mathcal{L}^2(G) = 0$.

ESERCIZIO 3.58. Dare un esempio di insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ con queste tre proprietà: 1) A è aperto; 2) $\mathcal{L}^2(A) < 1$; 3) $\mathcal{L}^2(\partial A) = \infty$.

ESERCIZIO 3.59. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme \mathcal{L}^n -misurabile. Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un aperto A contenente E e un chiuso C contenuto in E tali che $\mathcal{L}^n(A \setminus C) \leq \varepsilon$.

ESERCIZIO 3.60. Un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile se e solo se esistono $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (ed in effetti B intersezione numerabile di aperti) e un insieme N di misura nulla tali che $E = B \setminus N$.

ESERCIZIO 3.61. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua q.o. allora è misurabile.

ESERCIZIO 3.62. Siano $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile e $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare che $\varphi \circ f$ è misurabile.

ESERCIZIO 3.63. Il limite puntuale di una successione di funzioni continue su \mathbb{R}^n è una funzione di Borel.

ESERCIZIO 3.64. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile e si consideri l'insieme

$$P = \{t \in \mathbb{R} : \mathcal{L}^1(\{x \in \mathbb{R} : f(x) = t\}) > 0\}.$$

Provare che P ha cardinalità al più numerabile.

ESERCIZIO 3.65 (Insieme di Cantor). Sia $K \subset [0, 1]$ l'insieme

$$K = \left\{ x \in [0, 1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, a_n \in \{0, 2\} \right\}.$$

Provare che $\text{Card}(K) = \text{Card}(\mathbb{R})$ e che $\mathcal{L}^1(K) = 0$.

ESERCIZIO 3.66. La σ -algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue in \mathbb{R} ha la cardinalità della potenza del continuo.

10. Esercizi sull'integrale di Lebesgue

ESERCIZIO 3.67. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ la regione delimitata dalla cardioide di equazione polare $\rho = 1 + \cos \vartheta$ con $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Calcolare l'area di A

ESERCIZIO 3.68. Calcolare il volume del cono circolare retto in \mathbb{R}^3 con base di raggio $r > 0$ ed altezza $h > 0$.

ESERCIZIO 3.69 (Cono su un insieme). Sia $B \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ un insieme misurabile e sia $A \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme formato dall'unione dei segmenti che congiungono il vertice $(0, 0, h) \in \mathbb{R}^3$, $h > 0$, con i punti di B . Provare che $\mathcal{L}^3(A) = \frac{h}{3} \mathcal{L}^2(B)$.

ESERCIZIO 3.70. Calcolare il volume del settore sferico

$$A_{r,s} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < r^2, x > s\},$$

dove $r > 0$ ed $s \in (-r, r)$.

ESERCIZIO 3.71. Dopo aver disegnato l'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \min\{\sqrt{x^2 + y^2}, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}\},$$

calcolare – se possibile – l'integrale

$$\int_A (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha dx dy dz,$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro da discutere.

ESERCIZIO 3.72. Dato l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, 0 < y < \sqrt{1-x^2}\}$, calcolare l'integrale

$$\int_A \frac{1}{1+y} dx dy.$$

ESERCIZIO 3.73. Dato l'insieme $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$ calcolare l'integrale

$$\int_A x(y+z) dx dy dz.$$

ESERCIZIO 3.74. Provare che converge e calcolare il seguente integrale

$$\int_{(0,\infty) \times (0,1)} \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy.$$

Dedurre che

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(\sin t)}{\sin t} dt = \frac{\pi}{2} \log(1 + \sqrt{2}).$$

ESERCIZIO 3.75. Calcolare l'integrale

$$\int_A (x^2 - y^2) dx dy,$$

dove $A \subset \mathbb{R}^2$ è l'ellisse di semiassi $a, b > 0$.

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}.$$

ESERCIZIO 3.76. Calcolare l'integrale

$$\int_A \frac{x^2}{y} e^{xy} dx dy,$$

dove $A \subset \mathbb{R}^2$ è l'insieme

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2x} < y < \frac{1}{x}, 2x^2 < y < 3x^2 \right\}.$$

ESERCIZIO 3.77. Siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = (x - y) \log(1 + x + y)$. Stabilire se $f \in L^1(A)$ ed in caso affermativo calcolare l'integrale

$$\int_A (x - y) \log(1 + x + y) dx dy.$$

ESERCIZIO 3.78. Al variare di $\alpha > 0$ si considerino l'insieme

$$A_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y^\alpha < 1\}$$

e la funzione $f : A_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \frac{x+1}{y^2}, \quad (x, y) \in A_\alpha.$$

Dire per quali valori di $\alpha > 0$ la funzione f è integrabile su A_α e – se possibile – calcolarne l'integrale.

ESERCIZIO 3.79. Sia $\alpha \in [1, 2]$ e sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1, x^\alpha + y^\alpha \leq 1\}$. Calcolare l'integrale

$$\int_A \frac{1}{(\log x)^2 + (\log y)^2} \frac{1}{xy} dx dy.$$

ESERCIZIO 3.80. Siano $A = (0, 1) \times (0, 1)$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad x, y \in (0, 1).$$

Verificare che i seguenti integrali ripetuti esistono e risulta

$$\int_{(0,1)} \left(\int_{(0,1)} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy = \frac{\pi}{4} \neq -\frac{\pi}{4} = \int_{(0,1)} \left(\int_{(0,1)} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx.$$

Effettivamente, f è continua e dunque misurabile, tuttavia cambia segno e non è integrabile (verificare in modo diretto).

ESERCIZIO 3.81. Siano $A = (0, \infty) \times (0, \infty)$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x, t) = e^{-tx^2} \sin t$. Verificare che $f \notin L^1(A)$ e tuttavia

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, t) dx dt = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, t) dt dx,$$

dove gli integrali sono intesi come integrali di Riemann generalizzati.

ESERCIZIO 3.82. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si abbia

$$\int_0^a \int_0^b f(x, y) dx dy = ab.$$

Provare che $f = 1$. Riflettere sul caso $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Integrazione su volumi e superfici

In questo capitolo definiamo in vari modi fra loro equivalenti l'area di una superficie e introduciamo i corrispondenti integrali di superficie. La formula di coarea inquadra in un contesto generale l'integrazione per sfere e cilindri. Infine vedremo il teorema della divergenza e del rotore, che sono due casi particolari del Teorema di Stokes, che si studia nel corso di Geometria Differenziale.

1. Area ed integrali di superficie

Una definizione di area di superficie tramite triangolazioni analoga alla Definizione 2.3 per la lunghezza di una curva purtroppo è problematica.

ESEMPIO 4.1 (Triangolazioni di una superficie cilindrica). Consideriamo la superficie laterale del cilindro con base di raggio 1 ed altezza 1:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Facciamo un taglio verticale nella superficie laterale, apriamola, stendiamo ed identifichiamola con il rettangolo (ad es. chiuso) $[0, 2\pi] \times [0, 1]$. L'area è evidentemente 2π .

Suddividiamo la base del rettangolo in $n \in \mathbb{N}$ parti uguali di lunghezza $2\pi/n$ e l'altezza in $k \in \mathbb{N}$ parti uguali di lunghezza $1/k$. Il rettangolo rimane suddiviso in nk rettangoli congruenti. In ciascuno di questi rettangoli consideriamo il punto di intersezione delle due diagonali. Per ciascun rettangolo abbiamo così 5 punti (i vertici e il punto di intersezione) che ora pensiamo come punti su M immersa in \mathbb{R}^3 . Congiungendo questi 5 punti con segmenti formiamo 4 triangoli in \mathbb{R}^3 , congruenti a coppie. In questo modo troviamo una triangolazione di M che, quando $n, k \rightarrow \infty$, diventa sempre più fine e converge ad M .

Calcoliamo l'area totale della triangolazione. Ci sono $2nk$ triangoli "buoni". Ciascuno di loro ha base $1/k$ ed altezza $2 \sin(\pi/2n)$ e quindi la sua area b_{nk} si approssima in questo modo, per $n, k \rightarrow \infty$:

$$b_{nk} = \frac{1}{k} \sin(\pi/2n) \simeq \frac{\pi}{2nk}.$$

Poi ci sono altri $2nk$ triangoli "cattivi" ciascuno con base $2 \sin(\pi/n)$ ed altezza

$$\sqrt{\frac{1}{4k^2} + (1 - \cos(\pi/n))^2}.$$

Quindi l'area c_{nk} di ciascuno di essi si approssima come:

$$c_{nk} = \sin(\pi/n) \sqrt{\frac{1}{4k^2} + (1 - \cos(\pi/n))^2} \simeq \frac{\pi}{2n} \sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{\pi^4}{n^4}}.$$

Quindi, l'area totale della triangolazione è

$$A_{nk} = 2nk(b_{nk} + c_{nk}) \simeq \pi + \pi k \sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{\pi^4}{n^4}}.$$

Se ora scegliamo $k \ll n^2$, ad esempio $k = n$, allora si trova l'approssimazione corretta $A_{nk} \simeq 2\pi$. Se invece scegliamo $k \geq n^2$ si trova un'approssimazione sbagliata per eccesso. Ad esempio con $k = n^2$

$$A_{nk} \simeq \pi(1 + \sqrt{1 + \pi^4}),$$

e con $k = n^3$ addirittura $A_{nk} \simeq \pi^3 n \rightarrow \infty$. Dunque, l'estremo superiore delle aree delle triangolazioni di M è ∞ . Concludiamo che l'area di una superficie non si può definire come l'estremo superiore delle aree delle sue triangolazioni. \square

Sia $M = \varphi(A) \subset \mathbb{R}^n$ una superficie di dimensione $d \in \{1, \dots, n-1\}$ data dalla parametrizzazione regolare $\varphi \in C^1(A; \mathbb{R}^n)$ nel senso della Definizione 1.10, con $A \subset \mathbb{R}^d$ aperto. Vogliamo definire l'area di M .

Ci serve una premessa di algebra lineare. Sia $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$, con $d \leq n$, una trasformazione lineare di rango massimo. Allora $T(\mathbb{R}^d) \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale di dimensione d . Identifichiamo $T(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d$ fissando una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard di \mathbb{R}^n . Ora possiamo identificare T con una matrice $d \times d$ e possiamo definire $\det(T)$ come il determinante di questa matrice. Un modo per calcolarlo (a meno del segno) è il seguente (“norma-volume di una matrice”).

ESERCIZIO 4.83. Data una trasformazione lineare $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$ con $d \leq n$, si ha l'identità

$$|\det T| = \sqrt{\det(T^t T)},$$

dove T^t è la matrice trasposta di T .

Veniamo alla definizione di area. Fissiamo un punto $x \in A$ e sia $Q = x + [0, \delta]^d \subset A$ un cubo d -dimensionale, di lato $\delta > 0$ molto piccolo e con vertice in x . Il pezzo di superficie $\varphi(Q) \subset M$ è approssimato – a meno di una traslazione in $\varphi(x)$ – dal “parallelogramma” $J_x \varphi(Q) \subset T_{\varphi(x)} M \subset \mathbb{R}^n$, dove $J_x \varphi$ è il differenziale (matrice Jacobiana) di φ nel punto x . Dal Teorema 3.22 sappiamo che l'area di questo “parallelogramma” è

$$(4.1) \quad |\det J_x \varphi| \mathcal{L}^d(Q),$$

dove il determinante è calcolato come spiegato sopra. Dalla (4.1) capiamo che l'elemento infinitesimale di area di una superficie data in modo parametrico è $|\det J_x \varphi| dx$. Queste considerazioni giustificano la seguente definizione, che comprende la formula (2.3) per la lunghezza di una curva.

DEFINIZIONE 4.2. Sia $M = \varphi(A) \subset \mathbb{R}^n$ una superficie d -dimensionale data dalla parametrizzazione $\varphi \in C^1(A; \mathbb{R}^n)$. Si definisce l'area di φ come

$$(4.2) \quad A(\varphi) = \int_A |\det J_x \varphi| dx.$$

Se φ è iniettiva, definiamo l'area di $M = \varphi(A)$ come $A(M) = A(\varphi)$.

Quando φ è iniettiva, l'area di M non dipende dalla specifica parametrizzazione φ (esercizio, usare il Teorema 3.47). In casi speciali, la formula (4.2) assume un aspetto più maneggevole.

OSSERVAZIONE 4.3 (Area di un grafico). Data una funzione $f \in C^1(A)$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, la parametrizzazione $\varphi \in C^1(A; \mathbb{R}^{n+1})$ in forma grafico $\varphi(x) = (x, f(x))$, $x \in A$, è regolare ed inoltre

$$J_x \varphi(x)^t J_x \varphi(x) = I_n + \nabla f(x) \otimes \nabla f(x),$$

dove, dati $v, w \in \mathbb{R}^n$, il prodotto tensore $v \otimes w$ indica la matrice $n \times n$ con entrate $(v \otimes w)_{ij} = v_i w_j$. Usando l'Esercizio 4.84 per il calcolo del determinante, si trova

$$\sqrt{\det(J_x \varphi(x)^t J_x \varphi(x))} = \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2},$$

e, dunque, l'area del grafico di f è

$$A(f) = \int_A \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} dx.$$

In Calcolo delle Variazioni, questo funzionale è noto come “funzionale dell'area”.

Ora vogliamo dedurre la formula per calcolare l'area di 2-superfici immerse in \mathbb{R}^3 .

DEFINIZIONE 4.4 (Prodotto esterno). Il prodotto esterno di due vettori $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ e $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ è il vettore $v \wedge w \in \mathbb{R}^3$

$$v \wedge w = \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & i \\ v_2 & w_2 & j \\ v_3 & w_3 & k \end{pmatrix}$$

dove $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ e $k = (0, 0, 1)$ formano la base canonica di \mathbb{R}^3 .

Il prodotto esterno viene talvolta chiamato “prodotto vettoriale” ed indicato col simbolo \times . L'espressione “prodotto esterno” è tuttavia più corretta perchè fa riferimento all'algebra esterna. Il prodotto esterno verifica le seguenti proprietà:

- i) $v \wedge w = -v \wedge w$ (antisimmetria);
- ii) $\langle v \wedge w, v \rangle = \langle v \wedge w, w \rangle = 0$ (ortogonalità);
- iii) $v, w, v \wedge w$ sono orientati come il pollice-indice-medio della mano destra;
- iv) $|v \wedge w| = \sqrt{|v|^2 |w|^2 - \langle v, w \rangle^2}$.

Da ii)–iv) deduciamo che per ogni trasformazione ortogonale $T \in SO(3)$ si ha $T(v \wedge w) = (Tv) \wedge (Tw)$. La iv) significa che $|v \wedge w|$ è l'area del parallelogramma formato da v e w .

OSSERVAZIONE 4.5 (Area di una 2-superficie in \mathbb{R}^3). Sia $\varphi \in C^1(A; \mathbb{R}^3)$ una parametrizzazione regolare della superficie $M = \varphi(A) \subset \mathbb{R}^3$. Usiamo le variabili $(u, v) \in A$. I due campi vettoriali φ_u e φ_v sono tangenti ad M e il vettore $\varphi_u \wedge \varphi_v \neq 0$ è parallelo al campo normale alla superficie. L'elemento di area è dato da

$$\det(J\varphi^t J\varphi) = |\varphi_u|^2 |\varphi_v|^2 - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 = |\varphi_u \wedge \varphi_v|^2,$$

e dunque l'area di φ (l'area di M se φ è iniettiva) è

$$A(\varphi) = \int_A |\varphi_u \wedge \varphi_v| dudv.$$

Possiamo ora definire l'integrale di funzioni su superfici.

DEFINIZIONE 4.6. Sia $M = \varphi(A) \subset \mathbb{R}^n$ una superficie di dimensione $d \in \{1, \dots, n-1\}$ data da una parametrizzazione regolare ed iniettiva $\varphi \in C^1(A; \mathbb{R}^n)$, con $A \subset \mathbb{R}^d$ aperto. Sia poi $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $g \circ \varphi | \det J\varphi | \in L^1(A)$. Definiamo l'integrale di superficie

$$(4.3) \quad \int_M g d\sigma = \int_A g(\varphi(x)) |\det J\varphi(x)| dx,$$

dove $d\sigma$ indica l'elemento di "integrazione superficiale".

ESEMPIO 4.7 (Integrali su sfere). Sia $M = \mathbb{S}_r^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ la sfera di raggio $r > 0$ e sia $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione opportunamente integrabile. La sfera può essere parametrizzata usando le coordinate sferiche

$$F(\vartheta, \varphi; r) = r(\cos \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \varphi), \quad \vartheta \in (0, 2\pi), \varphi \in (0, \pi),$$

e l'elemento di area è $|F_\vartheta \wedge F_\varphi| = r^2 \sin \varphi$ e di conseguenza

$$\int_M g d\sigma = r^2 \int_{(0, 2\pi) \times (0, \pi)} g(F(\vartheta, \varphi; r)) \sin \varphi d\vartheta d\varphi.$$

La formula dell'area dà un significato concreto in termini di teoria della misura all'elemento di integrazione superficiale $d\sigma$ che appare nella formula (4.3).

TEOREMA 4.8 (Formula dell'area). Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ una superficie di dimensione $d \in \{1, \dots, n-1\}$ e sia $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile su M rispetto alla misura \mathcal{H}^d . Allora vale la formula

$$(4.4) \quad \int_M g d\sigma = \int_M g d\mathcal{H}^d.$$

In particolare con $g = 1$ si trova $A(M) = \mathcal{H}^d(M)$.

Dim. Limiteremo la dimostrazione al caso $d = n - 1$ e senza perdere di generalità supporremo che $g = 1$ e che $M = \text{gr}(f)$ sia il grafico di una funzione $f \in C^1(A)$ con $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ insieme aperto, $\mathcal{L}^{n-1}(A) < \infty$. La formula che dobbiamo provare si riduce a

$$(4.5) \quad \int_A \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} dx = \mathcal{H}^{n-1}(\text{gr}(f)),$$

dove indichiamo le coordinate con $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$.

Iniziamo a discutere il caso in cui f sia lineare (o affine), $f(x) = \langle x, v \rangle$ per qualche $v \in \mathbb{R}^{n-1}$. Sia $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-1}; \mathbb{R}^n)$ la mappa lineare grafico $L(x) = (x, f(x))$. La normale al piano $P = L(\mathbb{R}^{n-1}) \subset \mathbb{R}^n$ è il vettore

$$(4.6) \quad N = \frac{(v, -1)}{\sqrt{1 + |v|^2}} \in \mathbb{R}^n.$$

Abbiamo scelto la normale che punta verso il basso. Sia ora $T \in O(n)$ una trasformazione ortogonale tale che $T(N) = (0, -1)$. In modo naturale, possiamo identificare la trasformazione lineare $S = T \circ L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-1}; \mathbb{R}^n)$ con una trasformazione lineare $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-1}; \mathbb{R}^{n-1})$.

Siccome T è un'isometria, usando l'Esercizio 3.19, il Teorema 3.21 e la formula (3.8)

$$\mathcal{H}^{n-1}(L(A)) = \mathcal{H}^{n-1}(TL(A)) = \mathcal{H}^{n-1}(S(A)) = \mathcal{L}^{n-1}(S(A)) = |\det(S)|\mathcal{L}^{n-1}(A).$$

D'altra parte il determinante si può calcolare usando l'Esercizio 4.83:

$$|\det(S)| = |\det(S^t S)|^{1/2} = |\det(L^t T^t T L)|^{1/2} = |\det(L^t L)|^{1/2} = \sqrt{1 + |v|^2},$$

dove l'ultimo determinante si calcola usando l'Esercizio 4.84. Questo termina la dimostrazione nel caso lineare.

Ora passiamo al caso $f \in C^1(A)$ e indichiamo con $F(x) = (x, f(x))$ la mappa grafico, di modo che $M = \{F(x) \in \mathbb{R}^n : x \in A\}$. Senza perdere di generalità possiamo supporre che $\text{Lip}(F) < \infty$. Questo è vero localmente in A , ovvero sui compatti di A .

Indichiamo con $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A)$ la σ -algebra dei Boreliani di A e sia $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty)$ la misura

$$\mu(B) = \mathcal{H}^{n-1}(F(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Affermiamo che:

- i) $\mu \ll \mathcal{L}^{n-1}$;
- ii) Per ogni $x \in A$ si ha

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu(B_r(x))}{\omega_{n-1} r^{n-1}} = \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}.$$

La formula (4.5) segue allora dal Lemma di Radon-Nykodim. La i) deriva dalle seguenti disuguaglianze, basate sull'Esercizio 3.20:

$$\mu(B) = \mathcal{H}^{n-1}(F(B)) \leq \text{Lip}(F)^{n-1} \mathcal{H}^{n-1}(B) = \text{Lip}(F)^{n-1} \mathcal{L}^{n-1}(B).$$

Proviamo la ii) ad esempio nel punto $x = 0 \in A$ e supponiamo senza perdere di generalità che $f(0) = 0$. Sia $v = \nabla f(0)$ e sia $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-1}; \mathbb{R}^n)$ la trasformazione lineare grafico $L(x) = (x, \langle v, x \rangle)$. Siano poi $P = L(\mathbb{R}^{n-1}) \subset \mathbb{R}^n$ e $\pi_P : \mathbb{R}^n \rightarrow P$ la proiezione ortogonale su P .

Esiste un $\delta > 0$ tale che $\pi_P : M \cap B_\delta \rightarrow \pi_P(M \cap B_\delta)$ è invertibile, con B_δ palla centrata in 0 di raggio δ . Indichiamo con $\pi_M : \pi_P(M \cap B_\delta) \rightarrow M \cap B_\delta$ la funzione inversa di π_P ed osserviamo che, dato $\varepsilon > 0$, pur di prendere $\delta > 0$ piccolo si ha

$$(4.7) \quad \text{Lip}(\pi_M) \leq 1 + \varepsilon.$$

La verifica di questa affermazione è lasciata come esercizio.

Affermiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $r_0 > 0$ tale che per ogni $0 < r < r_0$ si ha

$$(4.8) \quad F(B_r) \subset \pi_M(L(B_{(1+\varepsilon)r})).$$

La (4.8) è equivalente a $\pi_P(F(B_r)) \subset L(B_{(1+\varepsilon)r})$, che a sua volta è equivalente a $\text{pr}(\pi_P(F(B_r))) \subset B_{(1+\varepsilon)r}$, dove $\text{pr}(x, x_n) = x \in \mathbb{R}^{n-1}$ è la proiezione standard.

Ora osserviamo che $\pi_P(F(x)) = F(x) - \langle F(x), N \rangle N$ con N come in (4.6) e quindi

$$\text{pr}(\pi_P(F(x))) = x - (\langle x, v \rangle - f(x)) \frac{v}{\sqrt{1 + |v|^2}},$$

con $x \in B_r$ e dove $f(x) = \langle v, x \rangle + o(x)$. Ora è chiaro che fissando $r_0 > 0$ in modo tale che per $|x| < r < r_0$ si abbia $|o(x)| \leq |x|o(1) \leq \varepsilon r$ la tesi (4.8) segue, infatti

$$|\text{pr}(\pi_P(F(x)))| \leq |x| + |o(x)| \leq (1 + \varepsilon)r.$$

Ora dalle (4.7) e (4.8), e dal caso lineare già trattato troviamo

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{n-1}(F(B_r)) &\leq \mathcal{H}^{n-1}(\pi_M(L(B_{(1+\varepsilon)r}))) \\ &\leq (1+\varepsilon)^{n-1} \mathcal{H}^{n-1}(L(B_{(1+\varepsilon)r})) \\ &= (1+\varepsilon)^{n-1} \sqrt{1+|v|^2} \mathcal{L}^{n-1}(B_{(1+\varepsilon)r}) \\ &= (1+\varepsilon)^{2n-2} \sqrt{1+|v|^2} \mathcal{L}^{n-1}(B_r). \end{aligned}$$

Questo prova che

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{H}^{n-1}(F(B_r))}{\mathcal{L}^{n-1}(B_r)} \leq \sqrt{1+|\nabla f(0)|^2}.$$

Per dimostrare la disuguaglianza che va in direzione opposta, osserviamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $r_0 > 0$ tale che per ogni $0 < r < r_0$ si ha

$$(4.9) \quad L(B_r) \subset \pi_P(F(B_{(1+\varepsilon)r})).$$

Per provare la (4.9), dobbiamo verificare che dato $x_0 \in B_r$ esiste $x \in B_{(1+\varepsilon)r}$ tale che $\pi_P(F(x)) = L(x_0)$, ovvero tale che $F(x) - \langle F(x), N \rangle N = L(x_0)$. Questa equazione è equivalente a

$$(4.10) \quad x - \frac{\langle v, x \rangle - f(x)}{1+|v|^2} = x_0.$$

L'equazione (4.10) si risolve con un argomento di punto fisso, pur di avere $r_0 > 0$ piccolo. Abbiamo già visto argomenti analoghi e possiamo omettere i dettagli. Dalla (4.9) si deduce che

$$\sqrt{1+|v|^2} \mathcal{L}^{n-1}(B_r) = \mathcal{H}^{n-1}(L(B_r)) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\pi_P(F(B_{(1+\varepsilon)r}))) \leq \mathcal{H}^{n-1}(F(B_{(1+\varepsilon)r})),$$

da cui si ottiene facilmente la disuguaglianza cercata. □

2. Formula di coarea. Coordinate sferiche e cilindriche

La formula di coarea permette di calcolare integrali “affettando” il dominio di integrazione con superfici che sono insiemi di livello di una funzione data.

TEOREMA 4.9 (Formula di coarea). Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $f \in C^1(A; \mathbb{R})$ una funzione di “affettamento” e $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione boreliana non negativa. Allora vale la formula di coarea:

$$(4.11) \quad \int_A g(x) |\nabla f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\{x \in A : f(x)=t\}} g(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) dt.$$

Dim. Dimostriamo il teorema nella seguente situazione modello: $A = B \times \mathbb{R}$ con $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ aperto, $f \in C^1(B \times \mathbb{R})$ con $\frac{\partial f}{\partial x_n} \neq 0$ su $B \times \mathbb{R}$.

Per il Teorema della funzione implicita, l'insieme di livello $\{f = t\}$ coincide con il grafico di una funzione $\varphi(\cdot; t) \in C^1(B; \mathbb{R})$:

$$\{x = (\xi, x_n) \in B \times \mathbb{R} : f(x) = t\} = \{(\xi, \varphi(\xi; t)) \in B \times \mathbb{R} : \xi \in B\}.$$

Derivando in t l'identità $f(\xi, \varphi(\xi; t)) = t$ deduciamo che

$$(4.12) \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi, \varphi(\xi; t)) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\xi; t) = 1,$$

ed inoltre, derivando nelle variabili ξ ,

$$(4.13) \quad \nabla_{\xi} f(\xi, \varphi(\xi; t)) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi, \varphi(\xi; t)) \nabla_{\xi} \varphi(\xi; t) = 0.$$

Dalla (4.13) deduciamo l'identità

$$(4.14) \quad |\nabla f(\xi, \varphi)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi, \varphi) \right| (1 + |\nabla_{\xi} \varphi|^2)^{1/2}.$$

Il cambio di variabile $x = G(\xi, t) = (\xi, \varphi(\xi; t))$, $\xi \in B$, ha determinante Jacobiano

$$|\det JG(\xi, t)| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\xi; t) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi, \varphi(\xi; t)) \right|^{-1}.$$

Ora useremo il Teorema sul cambio di variabile, il Teorema di Fubini-Tonelli e la Formula dell'area (4.4) per trovare

$$\begin{aligned} \int_{B \times \mathbb{R}} g(x) |\nabla f(x)| dx &= \int_{B \times \mathbb{R}} g(\xi, \varphi(\xi, t)) |\nabla f(\xi, \varphi(\xi; t))| \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi, \varphi(\xi; t)) \right|^{-1} d\xi dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_B g(\xi, \varphi(\xi; t)) \sqrt{1 + |\nabla_{\xi} \varphi(\xi; t)|^2} d\xi dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\{x \in B \times \mathbb{R}: f(x)=t\}} g(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) dt. \end{aligned}$$

Il passaggio al caso generale si ottiene utilizzando una “partizione dell'unità”.

DEFINIZIONE 4.10 (Partizione dell'unità). Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto e sia $\{U_i\}_{i=1, \dots, N}$ un suo ricoprimento aperto, $N \in \mathbb{N}$. Una famiglia di funzioni $\{\gamma_i\}_{i=1, \dots, N}$ si dice una *partizione dell'unità* su K subordinata al ricoprimento dato se:

- i) $\gamma_i \in C_c^{\infty}(U_i)$ per ogni $i = 1, \dots, N$;
- ii) $\sum_{i=1}^N \gamma_i(x) = 1$ per ogni $x \in K$.

Sopra $C_c^{\infty}(U_i)$ indica l'insieme delle funzioni $C^{\infty}(U_i)$ che sono 0 fuori da un compatto contenuto in U_i .

Veniamo al caso generale. Possiamo supporre che $\nabla f(x) \neq 0$ su A e che g abbia supporto contenuto in un compatto $K \subset A$. Per approssimazione di g con convergenza monotona si può togliere questa ultima ipotesi (dettagli omessi). Per ogni $x \in K$ esistono un indice i ed un cubo aperto U_x con facce parallele agli iperpiani coordinati centrato in x tali che $f_{x_i} \neq 0$ su U_x . Su ciascuno di questi cubi la formula di coarea è stata già provata. Dal ricoprimento aperto $\{U_x\}_{x \in K}$ si estrae un sottoricoprimento finito U_1, \dots, U_N e si considera una partizione dell'unità subordinata. Ora si conclude

in questo modo:

$$\begin{aligned} \int_A g(x) |\nabla f(x)| dx &= \sum_{i=1}^N \int_{U_i} \gamma_i(x) g(x) |\nabla f(x)| dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}} \int_{\{x \in A: f(x)=t\}} \gamma_i(x) g(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) dt. \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\{x \in A: f(x)=t\}} g(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) dt. \end{aligned}$$

□

ESEMPIO 4.11 (Coordinate sferiche). La funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = |x|$, verifica $|\nabla f(x)| = 1$ per ogni $x \neq 0$. Si tratta della funzione “distanza da 0” e gli insiemi di livello $\{f = t\}$ sono le sfere centrate in 0 di raggio t .

La formula (4.11) con $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ diventa:

$$(4.15) \quad \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = \int_0^\infty \int_{\{|x|=t\}} g(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) dt.$$

Se g ha simmetria sferica, ovvero è della forma $g(x) = h(|x|)$ per una $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, allora si trova

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^\infty h(t) t^{n-1} dt,$$

dove $\mathbb{S}^{n-1} = \{|x| = 1\}$ è la sfera unitaria. Stiamo usando il fatto che $\mathcal{H}^{n-1}(\{|x| = t\}) = t^{n-1} \mathcal{H}^{n-1}(\{|x| = 1\})$.

ESEMPIO 4.12 (Coordinate cilindriche in \mathbb{R}^3). La funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, verifica $|\nabla f(x)| = 1$ per ogni $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$. Si tratta della funzione distanza dall'asse x_3 e gli insiemi di livello $\{f = t\}$ sono superfici cilindriche con asse x_3 di raggio t .

La formula (4.11) con $g \in L^1(\mathbb{R}^3)$ diventa:

$$(4.16) \quad \int_{\mathbb{R}^3} g(x) dx = \int_0^\infty \int_{\{f(x)=t\}} g(x) d\mathcal{H}^2(x) dt.$$

ESEMPIO 4.13 (Misura di palla e sfera). Indichiamo con $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ la palla unitaria e con $\mathbb{S}^{n-1} = \partial B$ la sfera unitaria. Vogliamo calcolare $\omega_n = \mathcal{L}^n(B)$ e $\mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$.

Con $g = \chi_B$ nella formula (4.15) di integrazione in coordinate sferiche si trova

$$\omega_n = \mathcal{L}^n(B) = \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^1 t^{n-1} dt = \frac{1}{n} \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}).$$

D'altra parte, usando il Teorema di Fubini-Tonelli e la formula (3.22) per l'integrale della Gaussiana in dimensione 1 si trova

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \right)^n = \pi^{n/2}.$$

L'integrale della Gaussiana in dimensione n si può calcolare in termini della funzione Γ di Eulero usando le coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx &= \int_0^\infty \int_{\{|x|=t\}} e^{-|x|^2} d\mathcal{H}^{n-1}(x) dt \\ &= \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{n\omega_n}{2} \int_0^\infty s^{n/2-1} e^{-s} ds \\ &= \frac{n\omega_n}{2} \Gamma(n/2) = \omega_n \Gamma(n/2 + 1). \end{aligned}$$

Abbiamo raggiunto la seguente conclusione

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}.$$

Se si fa un plot della funzione $n \mapsto \omega_n$ si scopre che cresce fino ad $n = 5$ e poi, misteriosamente, inizia a decrescere e $\omega_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

3. Teoremi della divergenza e del rotore

Un campo vettoriale in un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ è una funzione a valori vettoriali $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$. In coordinate avremo $F = (F_1, \dots, F_n)$ come vettore colonna. In effetti, il vettore $F(x) \in \mathbb{R}^n$ andrebbe pensato come un elemento di $T_x \mathbb{R}^n$ e un modo più corretto di scrivere il campo vettoriale sarebbe

$$F(x) = \sum_{i=1}^n F_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Non useremo questa notazione.

DEFINIZIONE 4.14 (Divergenza). Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto ed $F \in C^1(A; \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale. La divergenza di F è

$$\operatorname{div} F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_i}, \quad x \in A.$$

La divergenza di F è la traccia della matrice Jacobiana di F , $\operatorname{div} F = \operatorname{tr}(JF)$. Vogliamo spiegare il significato della divergenza in relazione alla misura di Lebesgue. Per semplicità siano $A = \mathbb{R}^n$, $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ e supponiamo che il flusso $\Phi_t \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ del campo vettoriale F sia definito per ogni tempo $t \in \mathbb{R}$,

$$\dot{\Phi}_t(x) = F(\Phi_t(x)), \quad \Phi_0(x) = x.$$

Dato un insieme misurabile $B \subset \mathbb{R}^n$ consideriamo la funzione $m_B(t) = \mathcal{L}^n(\Phi_t(B))$, $t \in \mathbb{R}$, la misura del trasformato di B lungo il flusso. Vogliamo calcolare la derivata $\dot{m}_B(0)$. Per il Teorema del cambio di variabile

$$m_B(t) = \mathcal{L}^n(\Phi_t(B)) = \int_{\Phi_t(B)} dx = \int_B |\det J\Phi_t(x)| dx = \int_B \det J\Phi_t(x) dx.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che il determinante non si annulla ed è positivo per $t = 0$. Ora ci serve il seguente lemma.

LEMMA 4.15. Sia $t \mapsto A(t) \in M(n; \mathbb{R})$ una curva di matrici di classe C^1 tale che $A(0) = I_n$. Allora

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(A(t)) = \operatorname{tr}(\dot{A}(0)).$$

Dim. Infatti, dall'espansione di Taylor $A(t) = I_n + \dot{A}(0)t + o(t)$ e dalla definizione di determinante segue che $\det(A(t)) = 1 + \operatorname{tr}(\dot{A}(0))t + o(t)$. \square

In effetti, $J\Phi_0(x) = I_n$ è la matrice identità e, scambiando l'ordine delle derivate,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} J\Phi_t(x) = J \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t(x) = JF(x).$$

Portando la derivata dentro l'integrale (supponiamo si possa fare) e usando il Lemma 4.15:

$$\dot{m}_B(0) = \int_B \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det J\Phi_t(x) dx = \int_B \operatorname{tr}(JF)(x) dx = \int_B \operatorname{div} F(x) dx.$$

Usando le proprietà di gruppo del flusso $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$, si deduce che la formula vale per ogni $t \in \mathbb{R}$.

PROPOSIZIONE 4.16. Nella situazione precedente, per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$\dot{m}_B(t) = \int_{\Phi_t(B)} \operatorname{div} F(x) dx.$$

Quindi la divergenza di F descrive come evolve la misura di un insieme lungo il flusso del campo. Ad esempio, se $\operatorname{div} F = 0$ identicamente allora la misura degli insiemi rimane costante lungo il flusso, il flusso è "incomprimibile".

A questo punto capiamo il contenuto del prossimo teorema che lega l'integrale della divergenza con il flusso del campo attraverso una superficie.

DEFINIZIONE 4.17. (Flusso) Sia $M \subset A$ una ipersuperficie di classe C^1 orientata dalla normale unitaria N e sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo. Posto che l'integrale esista, si definisce il flusso di F attraverso M

$$\mathcal{F}(F; M) = \int_M \langle F, N \rangle d\mathcal{H}^{n-1}.$$

DEFINIZIONE 4.18. (Insiemi di classe C^1) Diciamo che un insieme (aperto) $A \subset \mathbb{R}^n$ è di classe C^1 se la sua frontiera ∂A è una ipersuperficie di classe C^1 .

Se A è aperto, ∂A è globalmente orientata: in ogni punto $x \in \partial A$ si può scegliere il campo normale $N(x)$ che punta verso l'esterno (chiamato *normale esterna*) che risulta globalmente continuo.

TEOREMA 4.19 (della divergenza). Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato di classe C^1 ed $F \in C^1(\bar{A}; \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale. Allora si ha l'identità

$$(4.17) \quad \int_A \operatorname{div} F(x) dx = \int_{\partial A} \langle F(x), N(x) \rangle d\mathcal{H}^{n-1},$$

dove $N(x)$ è la normale esterna a ∂A nel punto $x \in \partial A$.

Dim. Supponiamo preliminarmente che esista un cubo aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ con facce parallele agli iperpiani coordinati tale che:

- 1) $\text{spt}(F) = \overline{\{x \in A : F(x) \neq 0\}} \subset U$;
- 2) $\partial A \cap U = \{x = (\xi, \varphi(\xi)) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : \xi \in Q\}$ per una funzione $\varphi \in C^1(Q)$ e $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ cubo aperto $(n-1)$ -dimensionale. Supponiamo anche che $A \cap U$ sia contenuto nell'epigrafico di φ .

Per il Teorema di Fubini-Tonelli, si ha

$$\int_A \text{div} F(x) dx = \int_Q \int_{\varphi(\xi)}^{\infty} \text{div} F(\xi, x_n) dx_n d\xi = \sum_{i=1}^n \int_Q \int_{\varphi(\xi)}^{\infty} \frac{\partial F_i(\xi, x_n)}{\partial x_i} dx_n d\xi,$$

dove, con abuso di notazione $x_i = \xi_i$, per $i = 1, \dots, n-1$.

Integriamo separatamente ciascun contributo della divergenza. Per $i = n$ si trova

$$(4.18) \quad \int_{\varphi(\xi)}^{\infty} \frac{\partial F_n(\xi, x_n)}{\partial x_n} dx_n = -F_n(\xi, \varphi(\xi)).$$

Per $i = 1, 2, \dots, n-1$, con il teorema sulla differenziazione di funzioni integrali si trova la seguente identità

$$(4.19) \quad \int_{\varphi(\xi)}^{\infty} \frac{\partial F_i(\xi, x_n)}{\partial \xi_i} dx_n = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \int_{\varphi(\xi)}^{\infty} F_i(\xi, x_n) dx_n + F_i(\xi, \varphi(\xi)) \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial \xi_i}.$$

Usiamo la notazione $\widehat{\xi}_i = (\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{n-1})$ e consideriamo la sezione $Q^{\widehat{\xi}_i} = \{\xi_i \in \mathbb{R} : \xi \in Q\}$. Al variare di $\widehat{\xi}_i$, risulta $Q^{\widehat{\xi}_i} = \emptyset$ oppure $Q^{\widehat{\xi}_i} = (a, b)$ per numeri fissati $a < b$. In questo secondo caso abbiamo

$$(4.20) \quad \int_a^b \frac{\partial}{\partial \xi_i} \int_{\varphi(\xi)}^{\infty} F_i(\xi, x_n) dx_n d\xi_i = 0,$$

perchè F si annulla sul bordo del cubo U .

La normale esterna N a ∂A nel punto $x = (\xi, \varphi(\xi)) \in U$ è

$$(4.21) \quad N(x) = \frac{(\nabla \varphi(\xi), -1)}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi(\xi)|^2}}.$$

Punta verso il basso perché abbiamo convenuto che l'insieme A si trova sopra il grafico di φ .

Tenuto conto di (4.21), dalle (4.18)–(4.20) ed usando la formula dell'area (4.4) si trova

$$\begin{aligned} \int_A \text{div} F(x) dx &= \int_Q \left(\sum_{i=1}^{n-1} F_i(\xi, \varphi(\xi)) \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial \xi_i} - F_n(\xi, \varphi(\xi)) \right) d\xi \\ &= \int_Q \langle N(\xi, \varphi(\xi)), F(\xi, \varphi(\xi)) \rangle \sqrt{1 + |\nabla \varphi(\xi)|^2} d\xi \\ &= \int_{\partial A} \langle N(x), F(x) \rangle d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Il caso generale segue dal caso modello appena trattato usando un argomento di partizione dell'unità. Possiamo omettere i dettagli. □

OSSERVAZIONE 4.20 (Insiemi di Caccioppoli e De Giorgi). L'ipotesi che l'insieme A abbia frontiera di classe C^1 non è indispensabile nel teorema della divergenza. Ad esempio, il teorema continua a valere quando ∂A è l'unione finita di superfici di classe C^1 , come nel caso di un cubo.

La classe più ampia di insiemi per cui è valido il teorema della divergenza sono gli "insiemi di perimetro finito" individuati da Caccioppoli e De Giorgi. Si tratta degli insiemi $A \subset \mathbb{R}^n$ tali che la funzione caratteristica χ_A è a variazione limitata. Questi argomenti sono trattati nel corso di Teoria delle Funzioni.

OSSERVAZIONE 4.21 (Integrazione per parti). Dal Teorema della divergenza si deducono le formule di integrazione per parti in più variabili. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera di classe C^1 e siano $f, g \in C^1(\bar{A})$. Indichiamo con $N = (N_1, \dots, N_n)$ la normale esterna a ∂A . Dal Teorema della divergenza deduciamo che, per ogni $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} N_i(x) f(x) g(x) d\mathcal{H}^{n-1} &= \int_A \frac{\partial(f(x)g(x))}{\partial x_i} dx \\ &= \int_A \left(f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} + g(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right) dx. \end{aligned}$$

In particolare, se una delle due funzioni f o g si annulla su ∂A , si trova

$$\int_A f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} dx = - \int_A g(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx.$$

Concludiamo questa sezione presentando, senza dimostrazioni il teorema del rotore. La teoria è limitata alla dimensione $n = 3$.

DEFINIZIONE 4.22 (Rotore). Sia $A \subset \mathbb{R}^3$ un insieme aperto. Il rotore di un campo vettoriale $F = (F_1, F_2, F_3) \in C^1(A; \mathbb{R}^3)$ è il campo vettoriale $\text{rot}F \in C(A; \mathbb{R}^3)$

$$\text{rot}F = \nabla \wedge F = \det \begin{pmatrix} \partial_1 & F_1 & i \\ \partial_2 & F_2 & j \\ \partial_3 & F_3 & k \end{pmatrix} = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1).$$

Nei libri di fisica si trova la notazione $\text{rot}F = \nabla \times F$. Talvolta si incontra anche la notazione inglese $\text{rot} = \text{curl}$. Se $F \in C^2(A; \mathbb{R}^3)$, dal Teorema di Schwarz segue che $\text{div}(\text{rot}F) = 0$ identicamente su A .

TEOREMA 4.23 (Rotore). Siano $F \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ ed $M \subset \mathbb{R}^3$ una 2-superficie di classe C^1 , limitata e orientata con frontiera $\partial M \in C^1$. Allora vale l'identità

$$(4.22) \quad \int_{\partial M} \langle F, T \rangle d\mathcal{H}^1 = \int_M \langle \text{rot}F, N \rangle d\mathcal{H}^2,$$

dove N è il campo normale ad M e T è il campo tangente a ∂M , orientati in modo concorde ("se N punta in alto T punta in senso antiorario").

Si tratta di un caso speciale del Teorema di Stokes e qui ne omettiamo la dimostrazione. La frontiera ∂M è una curva chiusa e l'integrale che appare a sinistra in (4.22) si chiama circuitazione di F lungo ∂M .

OSSERVAZIONE 4.24 (Campi irrotazionali). Il campo $F \in C^1(A; \mathbb{R}^3)$ si dice irrotazionale se $\text{rot}F = 0$ su A . In questo caso, dalla (4.22) deduciamo che

$$\int_{\partial M} \langle F, T \rangle d\mathcal{H}^1 = 0,$$

chiunque sia M (ben contenuta in A). Supponiamo che F abbia una curva integrale che si richiude. Prendendo M tale che ∂M sia proprio questa curva integrale, l'identità precedente viene violata. Quindi il flusso di un campo irrotazionale non può avere traiettorie periodiche.

Dal punto di vista geometrico la situazione è ancora più chiara. Al campo $F = (F_1, F_2, F_3)$ possiamo associare la 1-forma differenziale $\omega = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$. Dire che F è irrotazionale equivale a dire che ω è chiusa.

4. Esercizi

ESERCIZIO 4.84. Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$, la matrice reale $n \times n$ prodotto tensoriale $v \otimes w$ è definita come $(v \otimes w)_{ij} = v_i w_j$ con $i, j = 1, \dots, n$. Verificare che $\det(I_n + v \otimes w) = 1 + \langle v, w \rangle$.

ESERCIZIO 4.85. Calcolare l'area del segmento di paraboloidi $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 < 1\}$.

ESERCIZIO 4.86. Dati $A = (0, 1) \times (0, 2\pi)$ e $\varphi \in C^\infty(A; \mathbb{R}^3)$

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, v, \cos v), \quad (u, v) \in A,$$

calcolare l'area della superficie $M = \varphi(A) \subset \mathbb{R}^3$.

ESERCIZIO 4.87. Siano $f, g \in C^1([0, 1])$ due funzioni con $f \geq 0$, $A = [0, 2\pi] \times [0, 1]$ e $\varphi \in C^1(A; \mathbb{R}^3)$ la funzione

$$\varphi(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)), \quad (u, v) \in A.$$

Provare che l'area della superficie di rotazione $M = \varphi(A) \subset \mathbb{R}^3$ è

$$A(M) = 2\pi \int_0^1 f(v) \sqrt{f'(v)^2 + g'(v)^2} dv.$$

ESERCIZIO 4.88. Calcolare l'area della superficie del toro introdotto nell'Esercizio 1.6.

ESERCIZIO 4.89 (Area della sfera). Sia $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ la sfera unitaria in \mathbb{R}^3 . Calcolare l'area della sfera nei seguenti due modi diversi:

1) Usando le coordinate sferiche $(\vartheta, \varphi) \mapsto (\cos \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \varphi)$ con $\vartheta \in [0, 2\pi]$ e $\varphi \in [0, \pi]$ e la definizione parametrica di area.

2) Usando l'integrale cartesiano dell'area per una mezza calotta sferica.

ESERCIZIO 4.90. Calcolare l'area della porzione di iperboloide di rotazione $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1, -1 < z < 1\}$.

ESERCIZIO 4.91. Consideriamo la porzione di superficie sferica

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, (x^2 + y^2)^2 + 4(y^2 - x^2) < 0\}.$$

Calcolare l'area di M . (La curva piana $(x^2 + y^2)^2 + 4(y^2 - x^2) = 0$ è la lemniscata di Bernoulli.)

ESERCIZIO 4.92. Calcolare l'area di un ellissoide con due semi-assi della stessa lunghezza.

ESERCIZIO 4.93. Sia $\mathbb{S}_r^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ la sfera di raggio $r > 0$ e per $\varrho \geq 0$ si consideri l'integrale di superficie

$$I(r, \varrho) = \int_{\mathbb{S}_r^2} \frac{\varrho - z}{(x^2 + y^2 + (\varrho - z)^2)^{3/2}} d\mathcal{H}^2.$$

Provare che

$$I(r, \varrho) = \begin{cases} 0 & \text{per } \varrho < r \\ 4\pi r^2 / \varrho^2 & \text{per } \varrho > r \\ 2\pi & \text{per } \varrho = r. \end{cases}$$

ESERCIZIO 4.94 (Teorema di Gauss-Green). Dedurre dal teorema generale la seguente variante del teorema della divergenza nel piano. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto limitato con frontiera di classe C^1 parametrizzata in senso antiorario da una curva γ e sia $\omega \in \Omega^1(\bar{A})$ la 1-forma differenziale

$$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad P, Q \in C^1(\bar{A}).$$

Provare che

$$\int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\gamma} \omega.$$

ESERCIZIO 4.95. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto delimitato da una curva chiusa di equazione polare $\varrho = \varrho(\vartheta)$, con $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Verificare che

$$\mathcal{L}^2(A) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varrho(\vartheta)^2 d\vartheta.$$

ESERCIZIO 4.96. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme aperto delimitato dalla curva $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (4 \cos t - \cos(4t), 4 \sin t - \sin(4t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Calcolare $\mathcal{L}^2(A)$.

ESERCIZIO 4.97. Calcolare il flusso del campo vettoriale $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, $F(x, y, z) = (0, 0, z)$, attraverso la superficie $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, z > x^2 + y^2\}$.

ESERCIZIO 4.98. Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x^4, y, z)$ attraverso la superficie in \mathbb{R}^3 data dalla parametrizzazione $\varphi(u, v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$ con $u^2 + v^2 < 1$.

ESERCIZIO 4.99. Sia γ una parametrizzazione antioraria della frontiera del quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$. Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\gamma} \frac{x}{1+y} dx - (\sin y + x^2 y) dy.$$

ESERCIZIO 4.100. Siano $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : 1/2 < |x| < 2\}$ ed $F \in C^1(A; \mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale, e consideriamo la sfera $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$. Provare che il flusso del rotore di F attraverso \mathbb{S}^2 è zero, $\mathcal{F}(\text{rot}(F); \mathbb{S}^2) = 0$.

ESERCIZIO 4.101. Sia $\{\Phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ il flusso del campo vettoriale $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$

$$F(x, y, z) = (x - y, x + y - z, z + y).$$

Provare che per ogni 2-superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ di area finita si ha $\mathcal{H}^2(\Phi_t(M)) > \mathcal{H}^2(M)$ per ogni $t > 0$.