Università degli Studi di Padova

Segnali e Sistemi

(canale 2)

Laurea in Ing. Biomedica

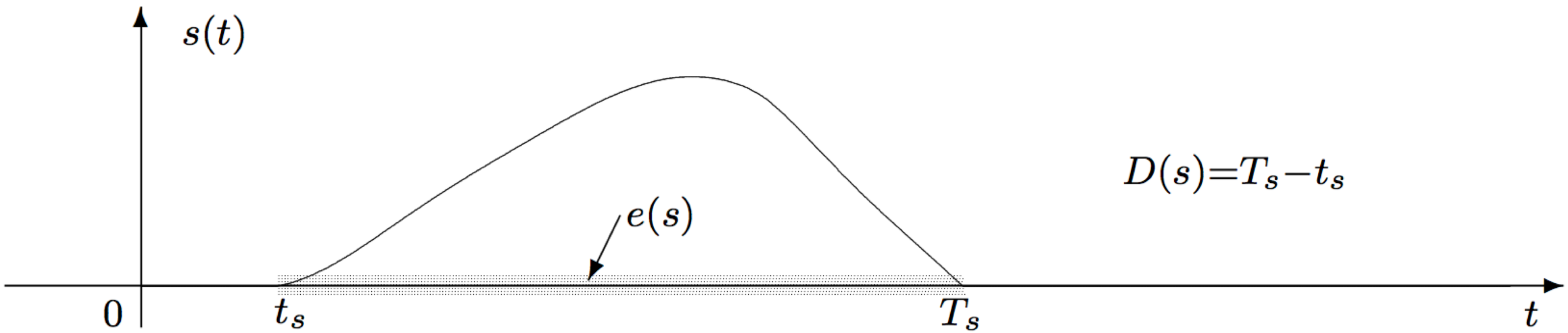
Anno II, secondo semestre, A.A. 21/22

Segnali continui

estensione, durata, area, valore medio, energia potenza

Estensione e durata
di un segnale continuo

attenzione: $\{t|s(t)\neq 0\} \subseteq e(s)$



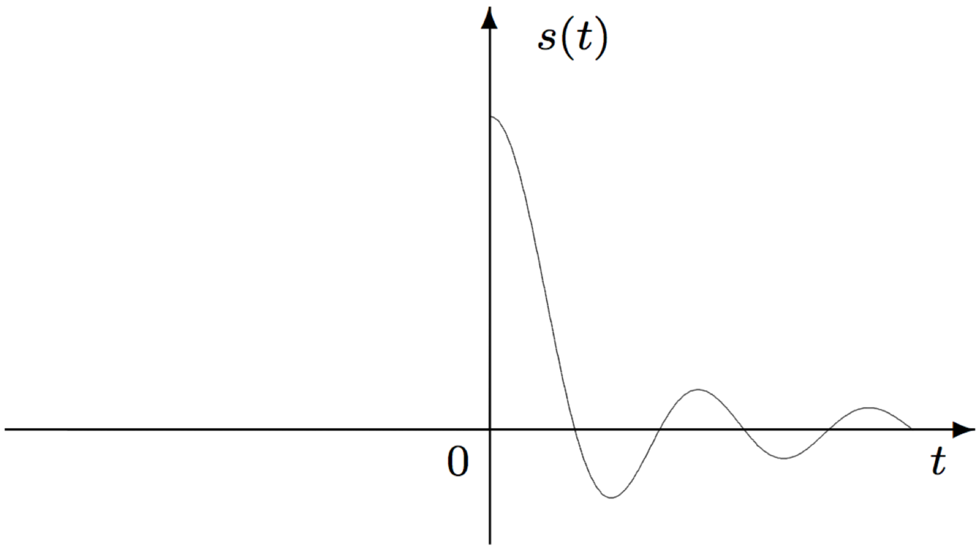
estensione = **intervallo** in cui il segnale è attivo $e(s) = [t_s, T_s]$

durata = **misura** dell' intervallo $D(s) = T_s - t_s$

estensione e durata possono essere finite o infinite

Segnali causali

proprietà di causalità - la ragione del nome sarà chiara in seguito



segnale causale = attivo solo a tempi positivi

$$e(s) \subseteq [0,+\infty)$$

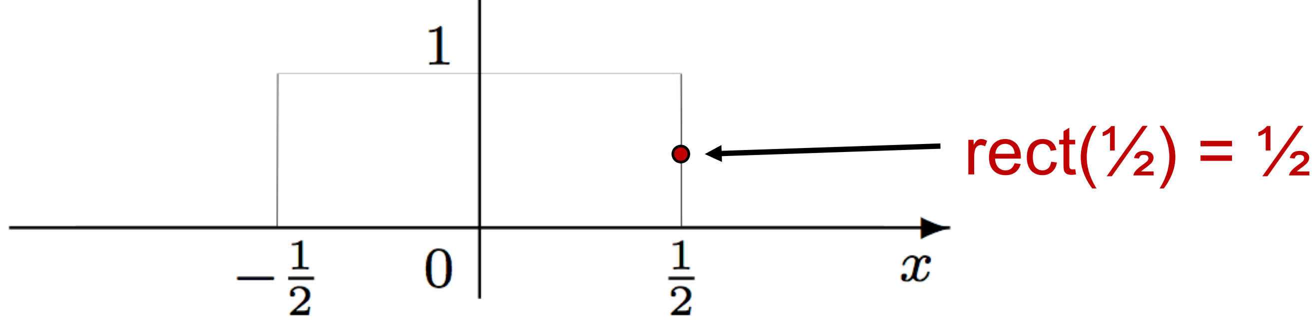
$$s(t) = 0 \text{ per } t < 0$$

Continuità e discontinuità

convenzione dell'emi-valore

rectangle

$$\mathrm{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{for} \quad |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$



convenzione dell'emivalore

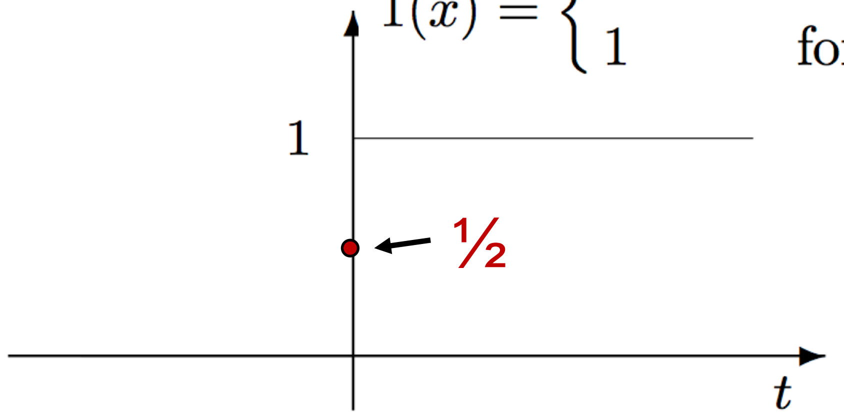
nei punti di discontinuità t_i i segnali assumono il valore medio tra limite destro e limite sinistro

$$s(t_i) \triangleq \frac{1}{2}\left[s(t_i+) + s(t_i-)\right]$$

Altri segnali notevoli

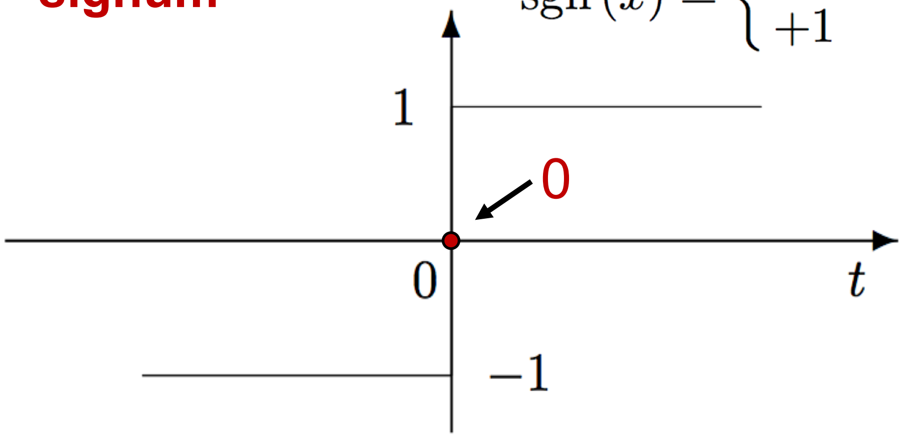
unit step

$$1(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x < 0 \\ 1 & \text{for} \quad x > 0 \end{cases}$$



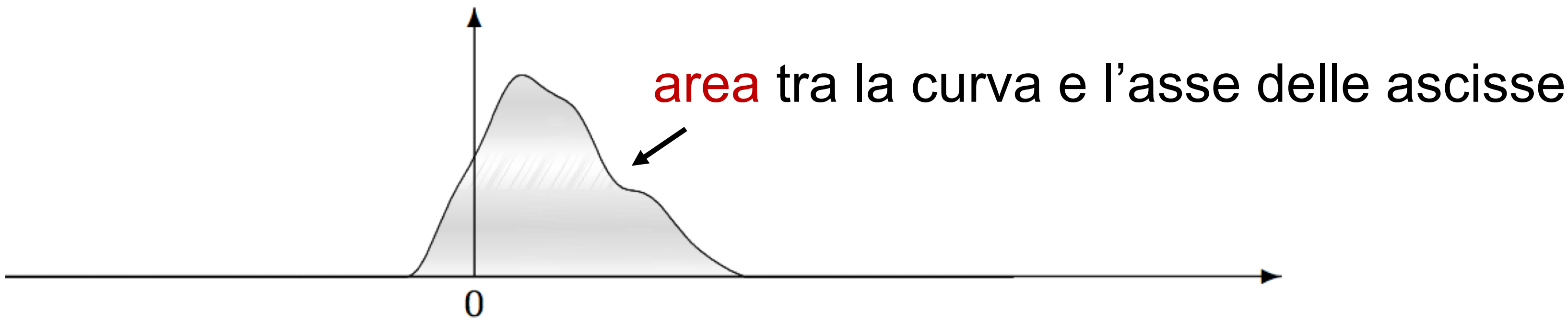
signum

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases}$$



Area
di un segnale continuo

$$\text{area}\,(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} s(t)\,dt$$



se s(t) è positivo/**negativo** l'area può assumere anche valori **negativi**

se s(t) è **complesso** l'area è **complessa**

Area e valore medio
di un segnale continuo

$$\text{area}\,(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\,dt \qquad m_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} s(t)\,dt$$

Entrambi sono **funzionali lineari**

$s(t) = a\,x(t) + b\,y(t)$ → $A_s = a\,A_x + b\,A_y$
$m_s = a\,m_x + b\,m_y$

Sono **invarianti** alle traslazioni, ovvero s(t) e $s(t-t_0)$ hanno stessa area e valor medio

Proprietà generale
di area e valor medio

$$\mathrm{area}\,(s) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} s(t)\, dt$$

$$m_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} s(t)\, dt$$

Proprietà generale

area **finita** → valore medio **nullo**

valore medio **finito** (ma non nullo) → area **infinita**

Energia e potenza
di un segnale continuo

$$E_s = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |s(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 \, dt$$

$$P_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |s(t)|^2 \, dt$$

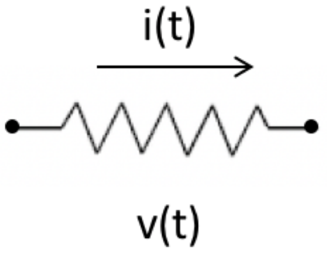
Proprietà:

1. assumono valori **reali positivi**
2. **non** sono funzionali lineari
3. invarianti alle traslazioni

energia **finita** → potenza **nulla**

potenza **finita** (ma non nulla) → energia **infinita**

Esempio – resistore v(t) = R i(t)



la cui potenza istantanea è $v(t)i(t) = \frac{1}{R}v^2(t)$

la cui potenza media dissipata in un intervallo di tempo $[t_1,t_2]$ è

$$P_{[t_1,t_2]} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R}v^2(t)dt$$

e l'energia dissipata nello stesso intervallo di tempo è

$$E_{[t_1,t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R}v^2(t)dt$$

Es 1
Disegnare i seguenti segnali, quindi calcolarne area, valore medio, energia e potenza:

1. rettangolo s(t) = rect(t)
2. **gradino** s(t) = 1(t)
3. rampa s(t) = t · 1(t)
4. **esponenziale** bilatero reale s(t) = $e^{-a|t|}$ con a>0
5. esponenziale reale s(t) = e^{-at} con a>0, e poi con a<0
6. segnale complesso s(t) = (1+j) · rect(t)

Es 2

Sia x(t) = s(t/a) una versione **scalata** del segnale s(t), con a>0.

1. Si esprimano A_x e m_x in funzione di A_s, m_s e della costante a.
2. Si esprimano E_x e P_x in funzione di E_s, P_s e della costante a.

Es 3 (invarianza alla traslazione)

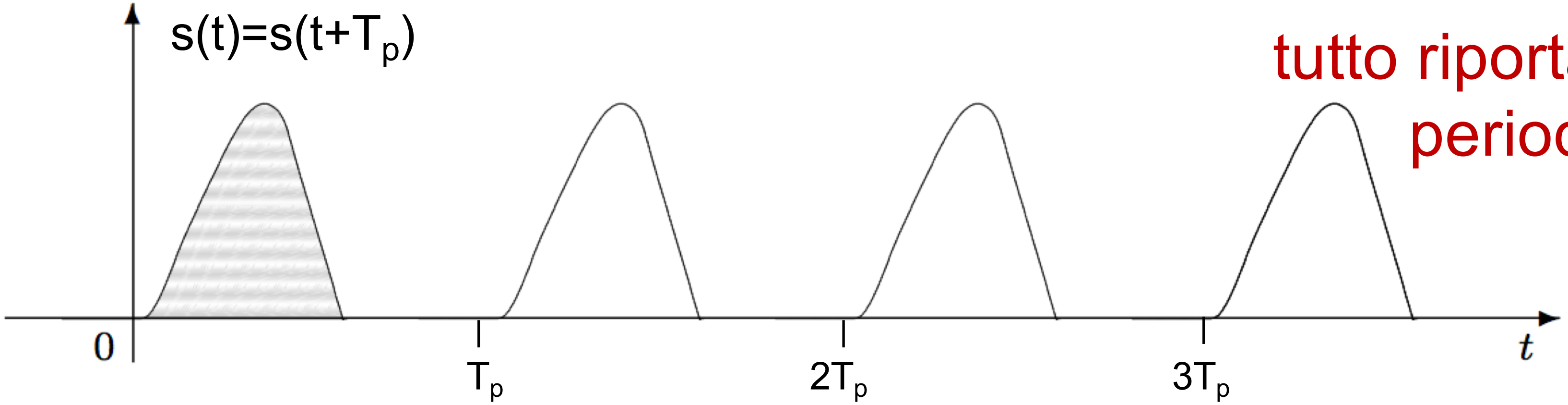
Si ripeta l'Es 2 con x(t) = s(t-a) una versione **traslata** del segnale s(t) con a reale.

In entrambi i casi si suggerisce di utilizzare un cambio di variabile nell'integrazione, ***u=t/a*** *e* ***u=t-a*** *rispettivamente.*

Segnali continui periodici

periodicità minima, area, valore medio, energia potenza

Estensione ai segnali periodici
dei concetti di area, valor medio, energia e potenza



tutto riportato nel periodo T_p!!!

$$A_s(T_p) = \int_{t_0}^{t_0+T_p} s(t)dt$$

$$E_s(T_p) = \int_{t_0}^{t_0+T_p} |s(t)|^2\, dt$$

la definizione qui cambia, altrimenti divergerebbero

la definizione qui non cambia (assume solo una forma equivalente + semplice)

$$m_s = \frac{A_s(T_p)}{T_p} = \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} s(t)dt$$

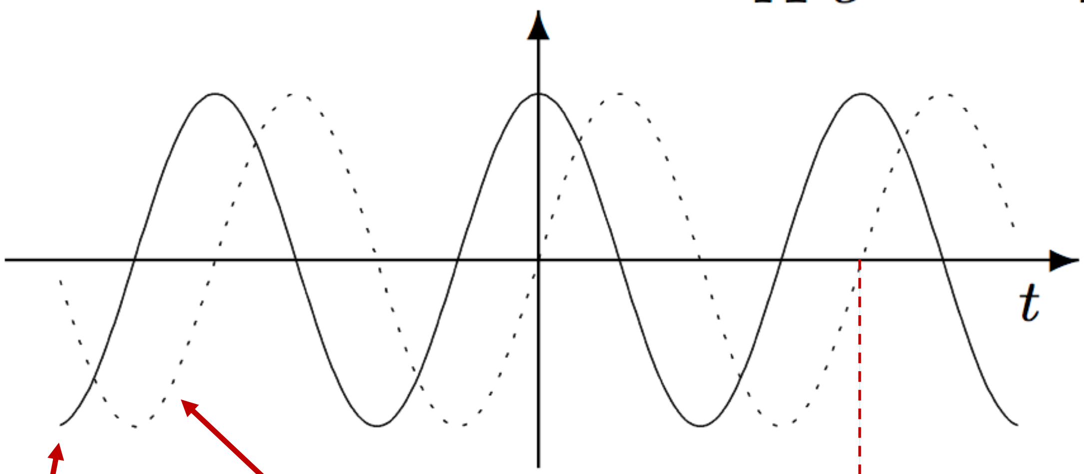
$$P_s = \frac{E_s(T_p)}{T_p} = \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} |s(t)|^2 dt$$

Esponenziali complessi

periodicità

$$A\, e^{j\omega_0 t} = A\, e^{j2\pi f_0 t}$$

reale e positivo



periodo minimo $T_p = 1/|f_0|$

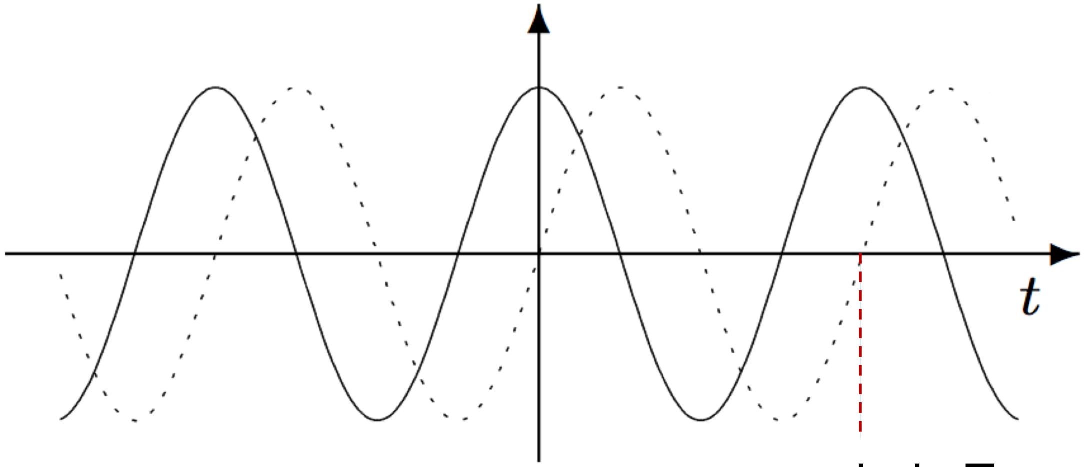
$$Ae^{j2\pi f_0 t} = \underbrace{A\cos(2\pi f_0 t)}_{\text{parte reale}} + \underbrace{jA\sin(2\pi f_0 t)}_{\text{parte immaginaria}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos(2\pi f_0(t+T_p))\\ &\quad= \cos(2\pi f_0 t + 2\pi f_0/|f_0|)\\ &\quad= \cos(2\pi f_0 t \pm 2\pi)\\ &\quad= \cos(2\pi f_0 t)\end{aligned}}$$

Esponenziali complessi

area, valor medio

$$Ae^{j2\pi f_0 t} = \underbrace{A\cos(2\pi f_0 t)}_{\text{parte reale}} + \underbrace{jA\sin(2\pi f_0 t)}_{\text{parte immaginaria}}$$

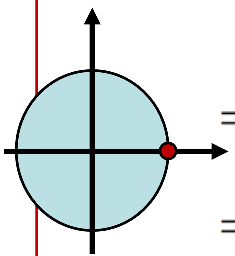


periodo $T_p = 1/|f_0|$

area $A_s(T_p) = 0$

valor medio $m_s = 0$

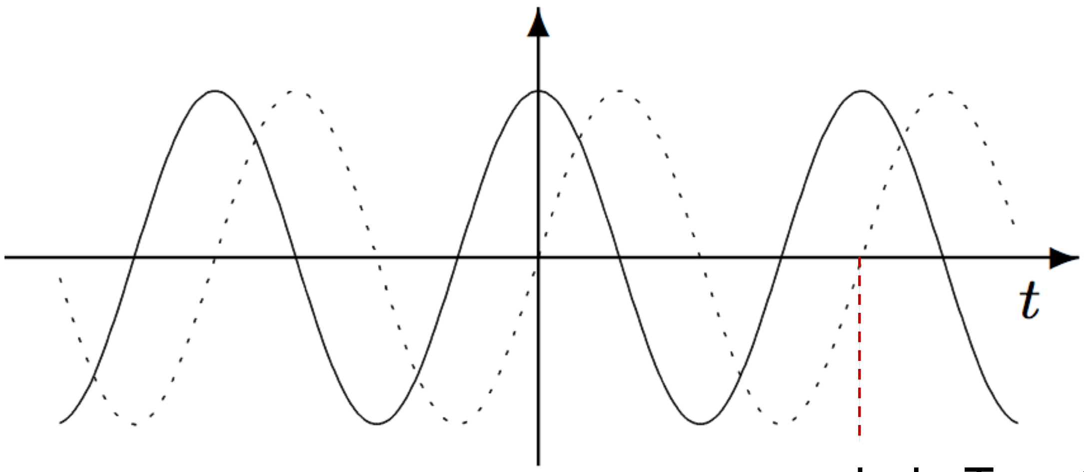
$$\begin{aligned} A_s(T_p) &= \int_0^{T_p} Ae^{j2\pi f_0 t}dt \\ &= \left.\frac{Ae^{j2\pi f_0 t}}{j2\pi f_0}\right|_0^{T_p} \\ &= A\frac{e^{j2\pi f_0/|f_0|} - 1}{j2\pi f_0} \\ &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A_s(T_p) &= \int_0^{T_p} A\cos(2\pi f_0 t)dt + j\int_0^{T_p} A\sin(2\pi f_0 t)dt \\ &= \left.\frac{A\sin(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0}\right|_0^{T_p} + j\left.\frac{-A\cos(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0}\right|_0^{T_p} \\ &= 0 + j0 \end{aligned}$$

Esponenziali complessi
energia e potenza

$$A\ e^{j\omega_0 t} = A\ e^{j2\pi f_0 t}$$



periodo $T_p = 1/|f_0|$

il modulo quadro è un segnale costante

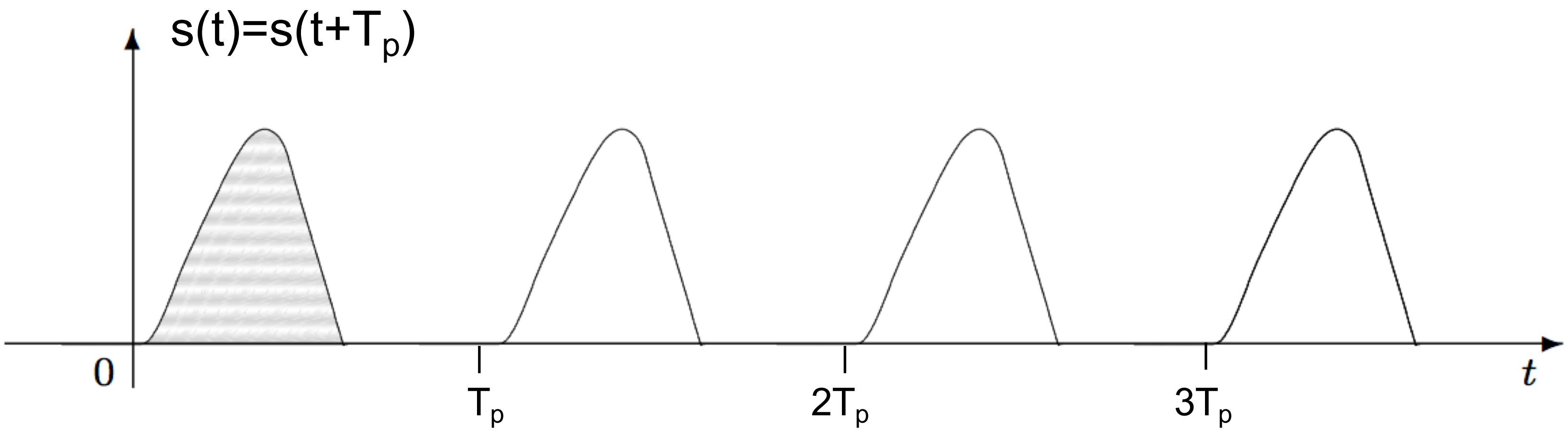
$$|s(t)|^2 = |Ae^{j\omega_0 t}|^2 = A^2$$

energia $E_s(T_p) = A^2\ T_p$

potenza $P_s = A^2$

Periodo minimo

definizione



Per un segnale periodico s(t) il **periodo minimo** è il più piccolo valore di T_p (con $T_p>0$) che assicura $s(t) = s(t+T_p)$

Valor medio e potenza sono le stesse anche se il periodo identificato non è quello minimo

Come identificare il periodo
nella composizione di segnali

Nella composizione di segnali posso avere periodicità diverse, ad es.

$$s(t) = \underbrace{2\cos(18\pi t + 1)}_{T_1 = \frac{1}{9}} - \underbrace{\sin(12\pi t + 7)}_{T_2 = \frac{1}{6}}$$

$s_1(t)$ è pure periodico mT_1 anche se questo non è il suo periodo minimo

Idea: cerco un **minimo comune multiplo** $T_p = m\, T_1 = k\, T_2$

$$\frac{m}{k} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \Rightarrow \quad T_p = m\, T_1 = 3/9 = 1/3$$

il fatto che la frazione sia razionale implica che si possano trovare k ed m, e pertanto il segnale composto è anch'esso periodico

Es 1
Dire se i seguenti segnali sono periodici ed identificarne il periodo minimo, il valore medio e la potenza.

1. $A \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$
2. $A_1\, e^{j(2\pi f_1 t+\varphi_1)} + A_2\, e^{j(2\pi f_2 t+\varphi_2)}$ al variare di $f_1 \neq f_2$ e con f_1 , $f_2 \neq 0$

Es 2 (generalizzazione #1)
Dimostrare che nella composizione di esponenziali complessi a fase lineare il valore medio corrisponde con il segnale a frequenza nulla, e la potenza con la somma delle potenze, ovvero

$$s(t) = A_0 e^{j\varphi_0} + \sum_{k=1}^{K} A_k e^{j(2\pi f_k t+\varphi_k)} \quad \Longrightarrow \quad m_s = A_0 e^{j\varphi_0}, \quad P_s = \sum_{k=0}^{K} A_k^2$$

reali

frequenze non nulle tutte diverse tra loro

Es 3 (generalizzazione #2)
Dimostrare che nella composizione di sinusoidi il valore medio corrisponde con la sinusoide a frequenza nulla, e la potenza con la somma delle potenze, ovvero

$$s(t) = \underbrace{A_0}_{\text{reale}} + \sum_{k=1}^{K} \underbrace{A_k}_{\text{reale}} \cos(2\pi \underbrace{f_k}_{\text{frequenze non nulle tutte diverse tra loro}} t + \varphi_k) \quad \Longrightarrow \quad m_s = A_0, \quad P_s = A_0^2 + \sum_{k=1}^{K} \tfrac{1}{2} A_k^2$$

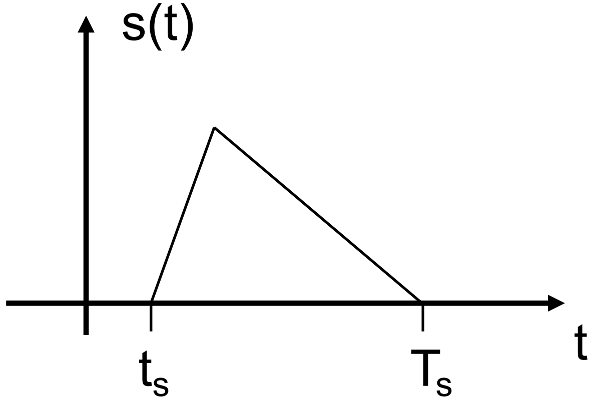
Es 4 (esponenziale complesso smorzato)
Dopo averlo disegnato, dire se il segnale $\mathbf{s(t) = e^{p_0 t}\, 1(t)}$ con $\mathbf{p_0=\sigma_0+j\omega_0}$ e $\mathbf{\sigma_0<0}$ è periodico ed identificarne area, valore medio, energia e potenza.

Trasformazioni fondamentali

ribaltamento, traslazione, scala, invarianza e simmetrie

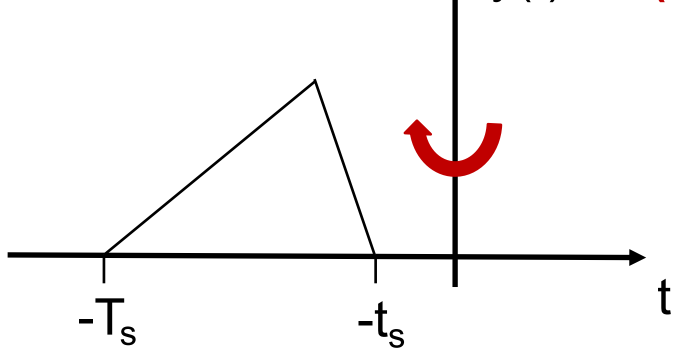
Ribaltamento e traslazione

time reversal and time shift



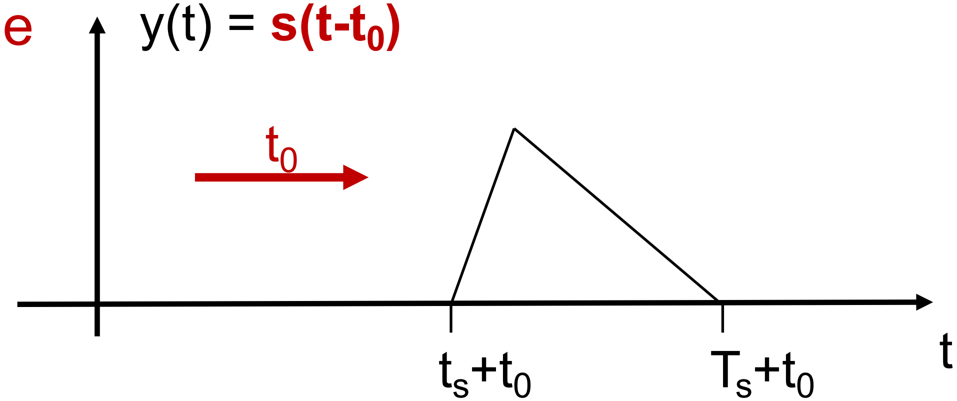
ribaltamento

$y(t) = \mathbf{s(-t)} = s_-(t)$



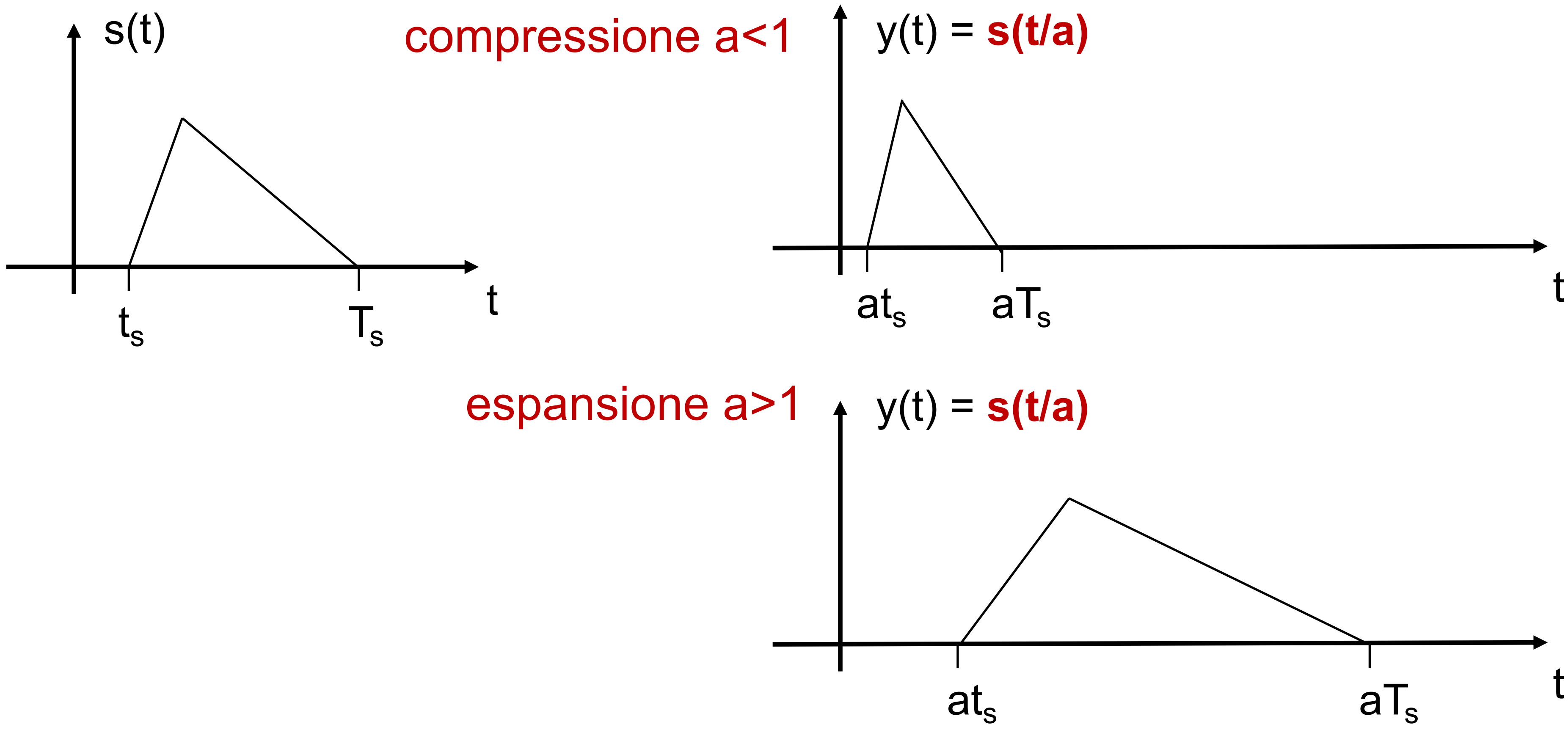
traslazione

$y(t) = \mathbf{s(t-t_0)}$



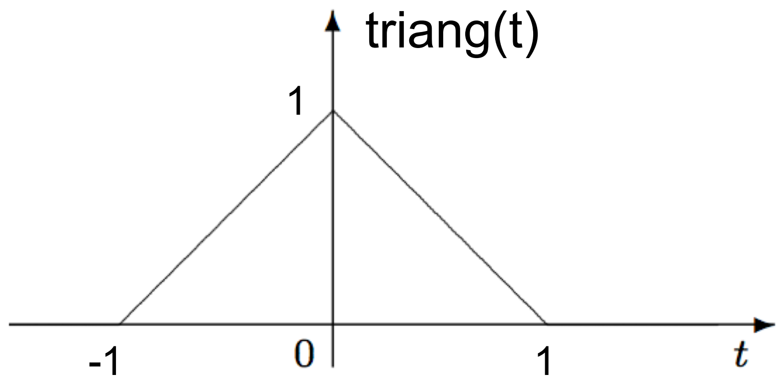
Scala

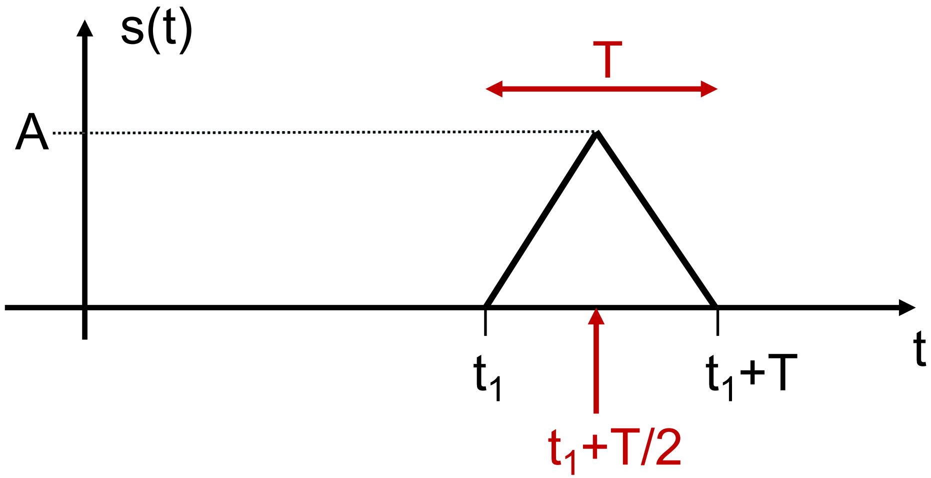
time scaling

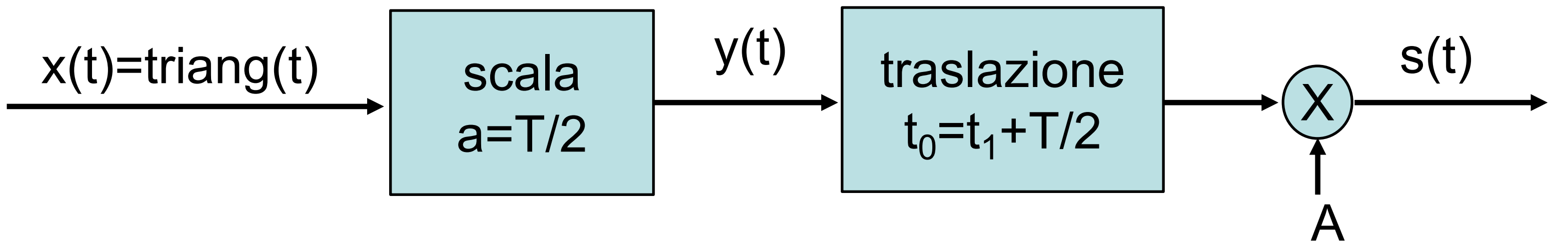


Esempio di applicazione
delle trasformazioni elementari

Esprimere il segnale s(t) in funzione di triang(t) utilizzando le trasformazioni elementari



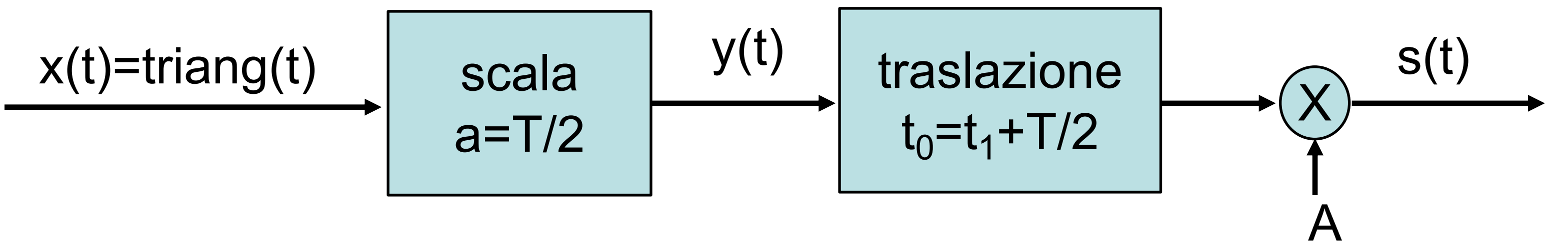




Università degli Studi di Padova

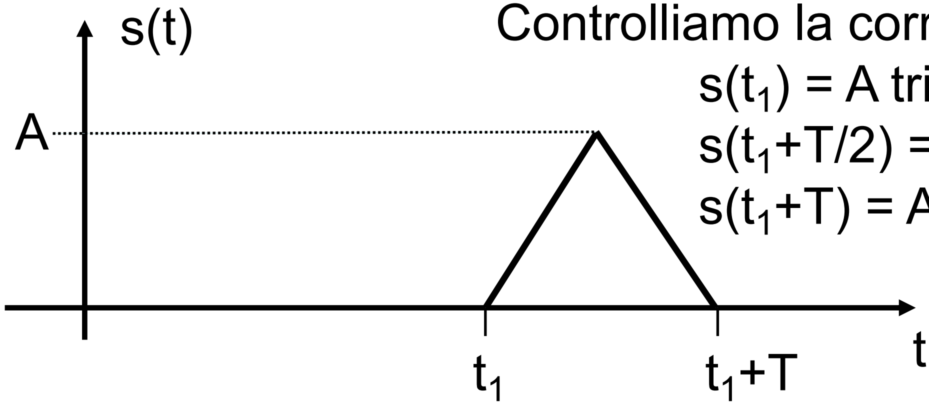
Esempio di applicazione

delle trasformazioni elementari



$y(t) = \mathrm{triang}(2t/T)$

$$\begin{aligned} s(t) &= A\, y(t-t_1-T/2) \\ &= A\, \mathrm{triang}(2(t-t_1-T/2)/T) \\ &= \mathbf{A\, triang(2(t-t_1)/T - 1)} \end{aligned}$$



Controlliamo la correttezza:

$s(t_1) = A\, \mathrm{triang}(-1)$

$s(t_1+T/2) = A\, \mathrm{triang}(0)$

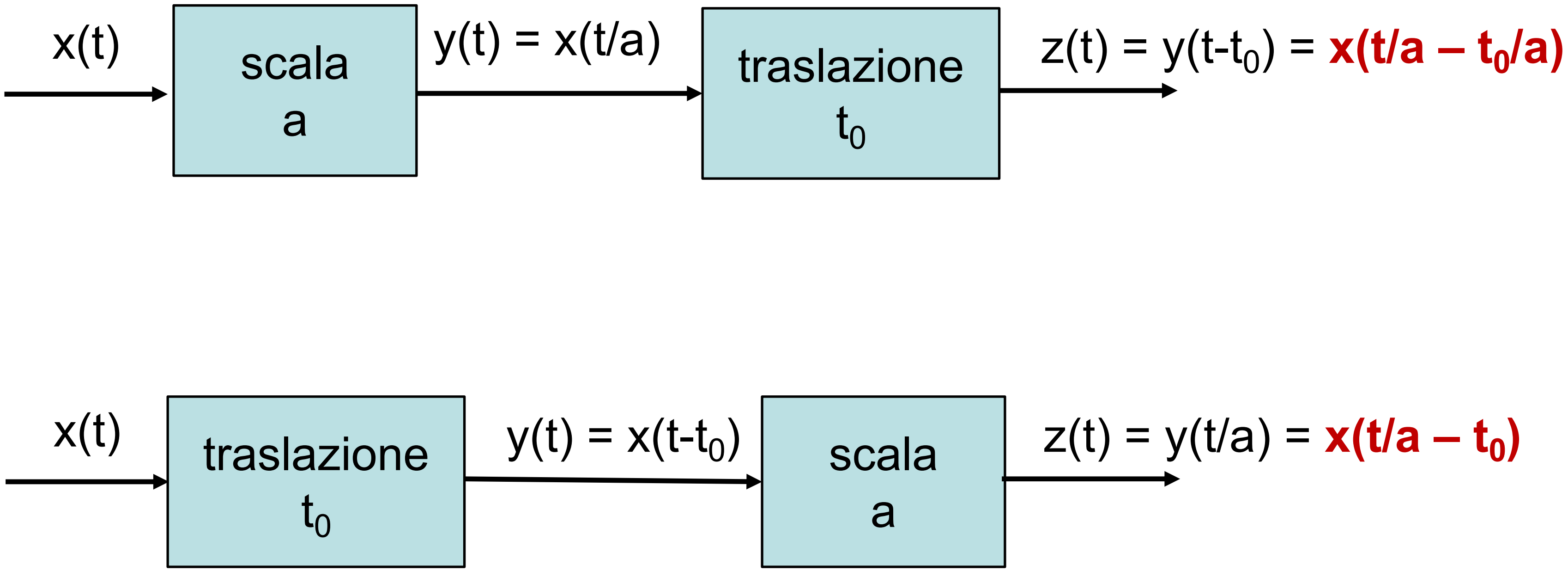
$s(t_1+T) = A\, \mathrm{triang}(1)$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

L’ordine conta

nell’applicazione delle trasformazioni elementari

questa naturalmente quella da preferire

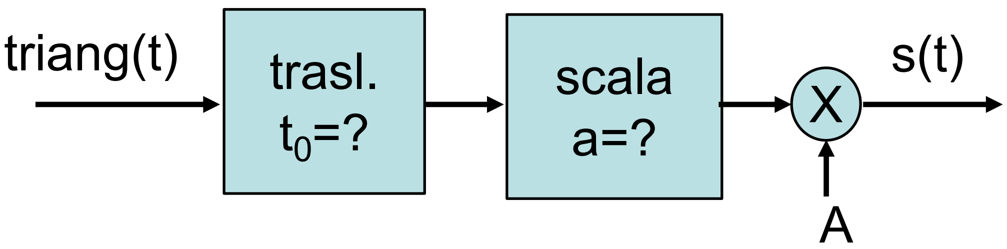


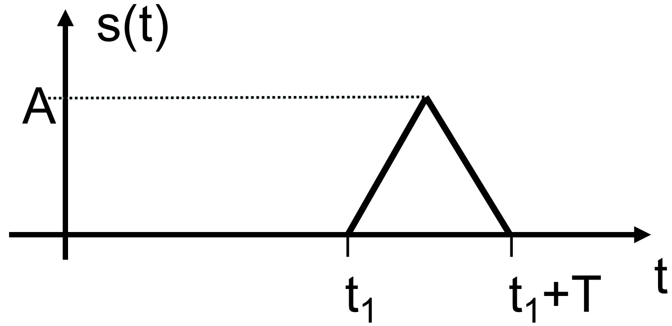
Esercizi

alcuni risolti assieme, altri per casa

Es 1

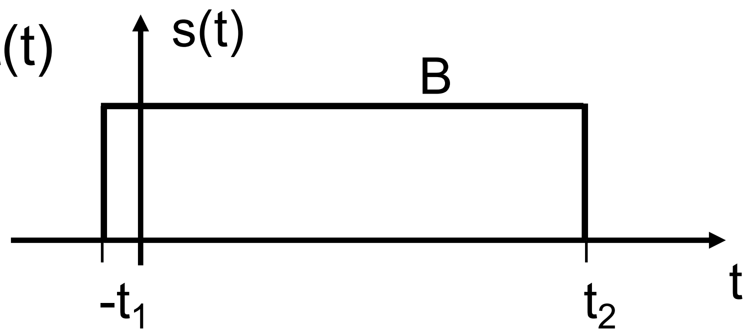
Identificare le corrette costanti da usare in caso in cui si voglia risolvere l'esempio illustrato precedentemente scambiando l'ordine dei blocchi, ovvero





Es 2

Esprimere s(t) in funzione di rect(t)

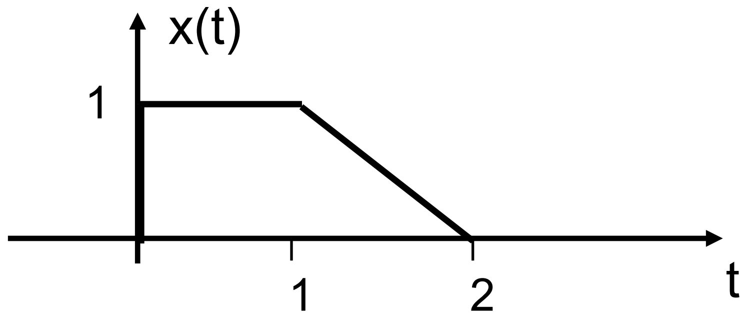


Altri esercizi

alcuni risolti assieme, altri per casa

Es 3

Disegnare s(t) = x(3t/2 +1) con

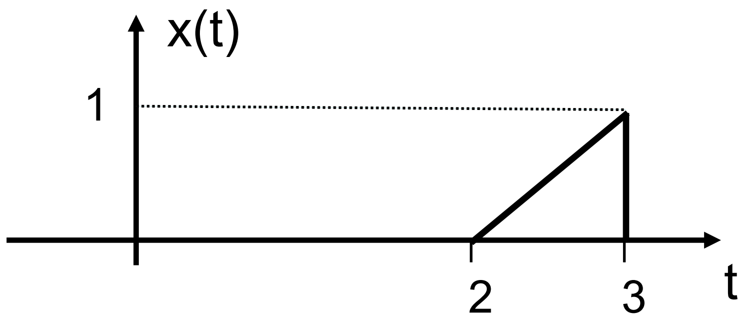


Es 4

Esprimere rect(t) e sgn(t) in funzione di 1(t) usando somme o differenze di segnali e traslazioni

Es 5

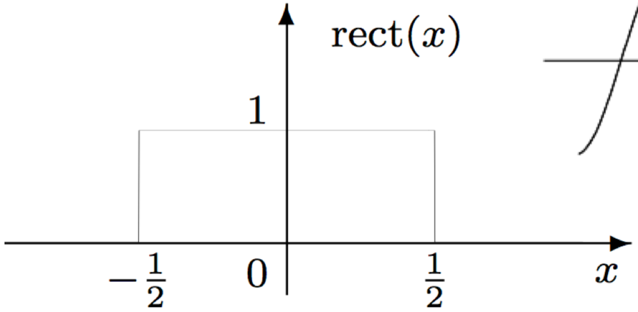
Disegnare s(t) = x(-t + 2) con

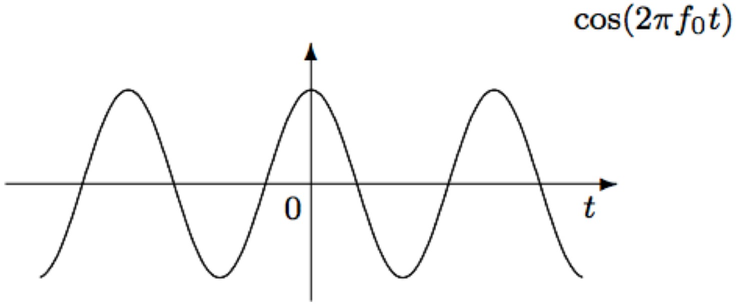


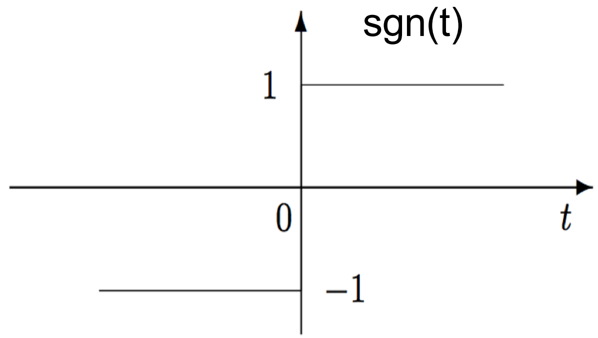
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Simmetria pari/dispari

invarianza rispetto al ribaltamento

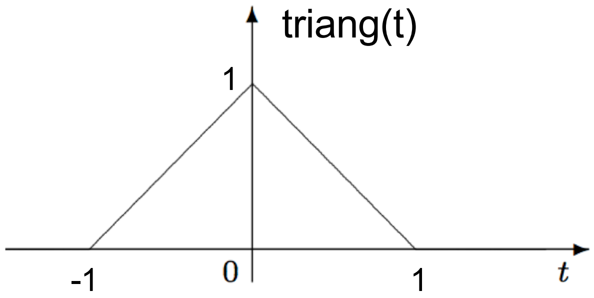






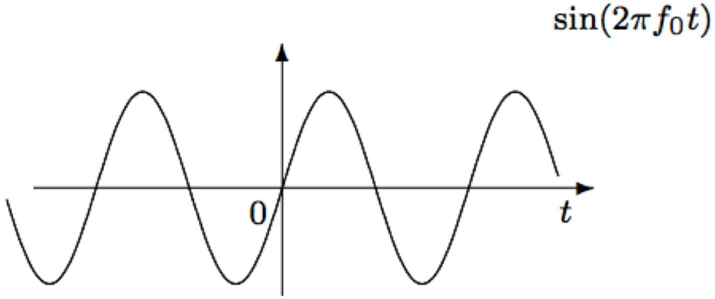
segnali dispari

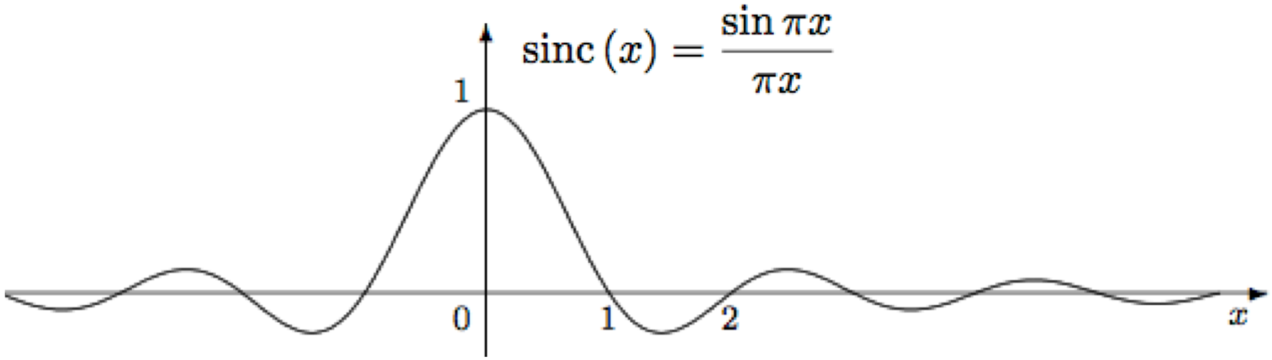
s(-t) = -s(t)



segnali pari

s(-t) = s(t)





i segnali dispari hanno area nulla

Parte pari/dispari

come estrarre le simmetrie da un segnale

Ogni segnale può essere espresso come somma di una parte pari e una parte dispari

$$s(t) = s_e(t) + s_o(t)$$

$$s_e(t) = \frac{1}{2}\left[s(t) + s(-t)\right] \qquad s_o(t) = \frac{1}{2}\left[s(t) - s(-t)\right]$$

$$\begin{aligned} s(t) &= \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \\ &= \underbrace{\cos(2\pi f_0 t)\cos(\varphi_0)}_{s_e(t)} - \underbrace{\sin(2\pi f_0 t)\sin(\varphi_0)}_{s_o(t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(t) &= e^{j2\pi f_0 t} \\ &= \underbrace{\cos(2\pi f_0 t)}_{s_e(t)} + \underbrace{j\sin(2\pi f_0 t)}_{s_o(t)} \end{aligned}$$

Simmetria reale/immaginario

invarianza rispetto al coniugio

segnali reali	$s(t) = s^*(t)$
segnali immaginari	$s(t) = -s^*(t)$
parte reale	$s_{re}(t) = \frac{1}{2}\,[s(t) + s^*(t)]$
parte immaginaria	$s_{im}(t) = \frac{1}{2}\,[s(t) - s^*(t)]$

Simmetria hermitiana

invarianza rispetto a ribaltamento e coniugio

parte reale pari, parte immaginaria dispari

$$s_{re}(t) + j\, s_{im}(t) = s_{re}(-t) - j\, s_{im}(-t)$$

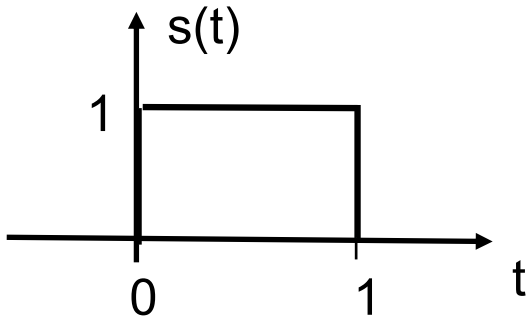
segnali hermitiani	$s(t) = s^*(-t)$
segnali antihermitiani	$s(t) = -s^*(-t)$
parte hermitiana	$s_h(t) = ½\, [s(t) + s^*(-t)]$
parte antihermitiana	$s_a(t) = ½\, [s(t) - s^*(-t)]$

Esercizi

alcuni risolti assieme, altri per casa

Es 1

Estrarre parte pari e dispari del segnale



Es 2

Dire che simmetria ha il prodotto tra:

- due segnali pari,
- due segnali dispari,
- un segnale pari ed uno dispari.

Es 3

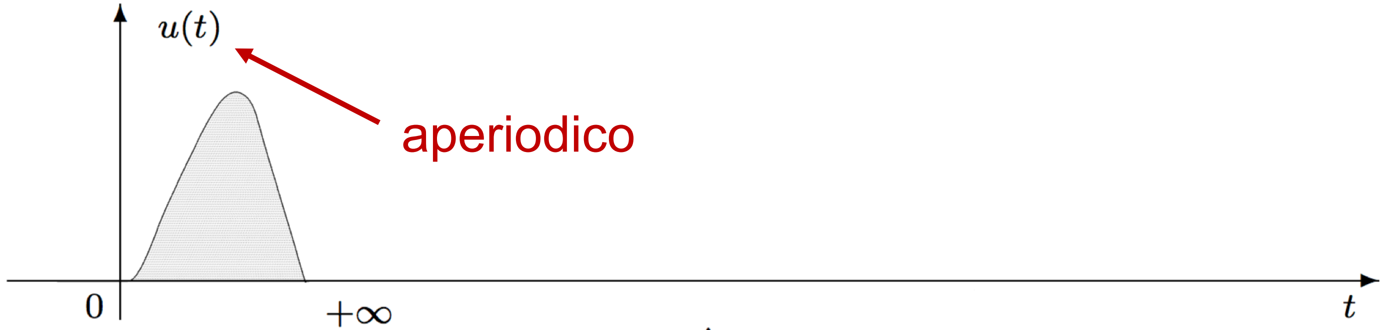
Estrarre parte reale e immaginaria del segnale $s(t) = (1+j)\, e^{(\sigma+j\omega)\, t}$

La periodizzazione

o ripetizione periodica

La ripetizione periodica

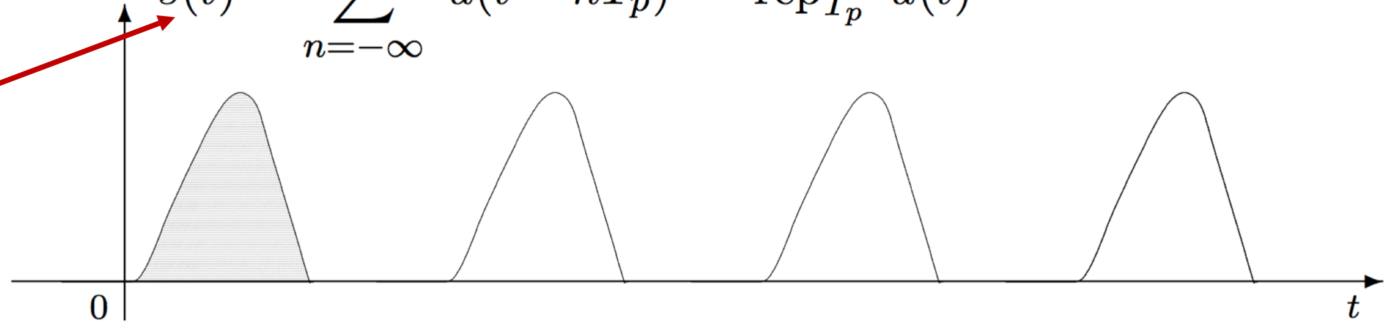
definizione



aperiodico

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(t - nT_p) \triangleq \text{rep}_{T_p}\; u(t)$$

periodico T_p



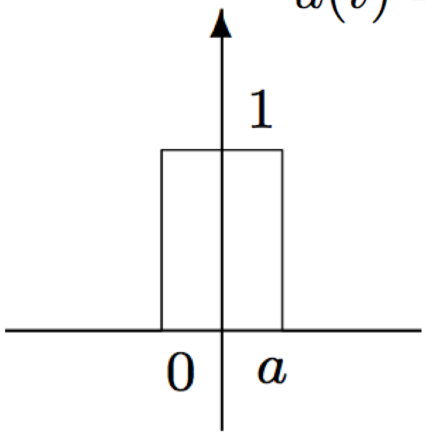
$$s(t+T_p) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(t + T_p - nT_p) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(t - \underbrace{(n-1)}_{m} T_p)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u(t - mT_p) = s(t)$$

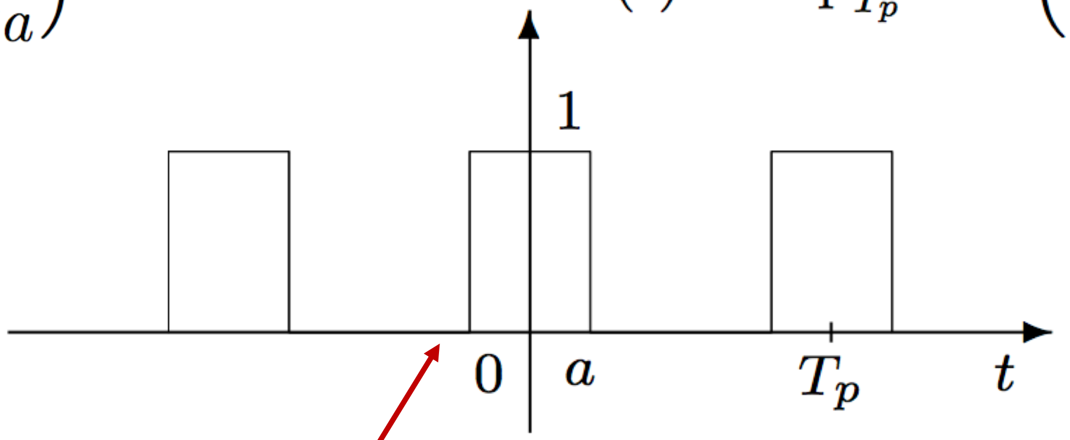
Onda quadra

uso della periodizzazione per rappresentare i segnali

$$u(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2a}\right)$$



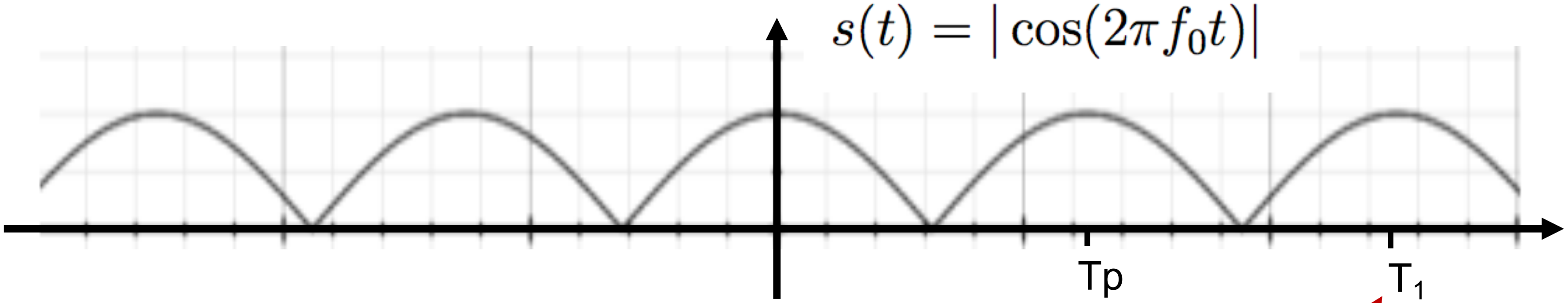
$$s(t) = \mathrm{rep}_{T_p}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2a}\right)$$



duty cycle = frazione del periodo in cui il segnale è attivo $d = 2a/T_p$

Coseno rettificato

uso della periodizzazione per rappresentare i segnali



periodo del coseno rettificato $T_p = T_1/2 = 1/(2f_0)$

periodo del coseno $T_1 = 1/f_0$

$$s(t) = \mathrm{rep}_{T_p} u(t)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= \cos(2\pi f_0 t)\,\mathrm{rect}(t/T_p) \\ &= \cos(2\pi f_0 t)\,\mathrm{rect}(2 f_0 t) \end{aligned}$$

Es 1 (fenomeno dell'aliasing)

Calcolare l'espressione e disegnare la ripetizione periodica di periodo T_p del segnale $u(t) = e^{-at}\, 1(t)$ con $a>0$

Es 2

Calcolare l'espressione e disegnare la ripetizione periodica di periodo T_p del segnale $u(t) = e^{-a|t|}$ con $a>0$

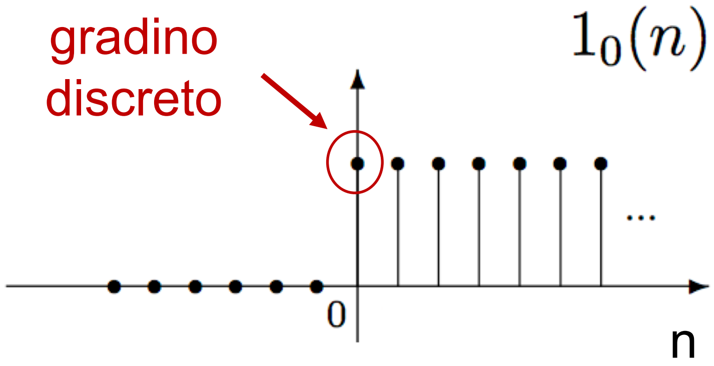
Segnali a tempo discreto

estensione di concetti e proprietà dal continuo al discreto

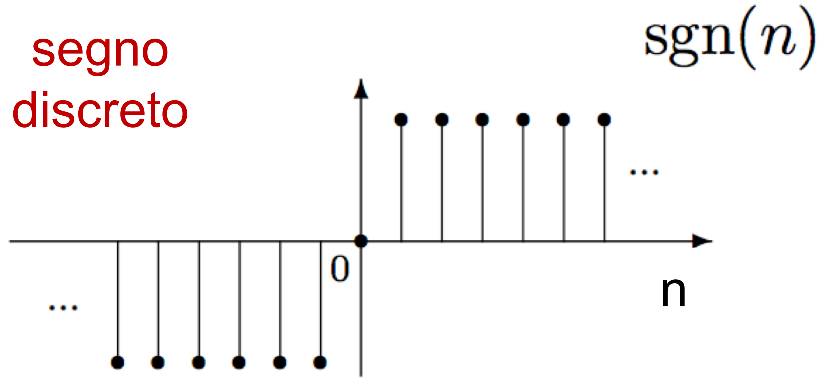
Segnali discreti

segnali notevoli

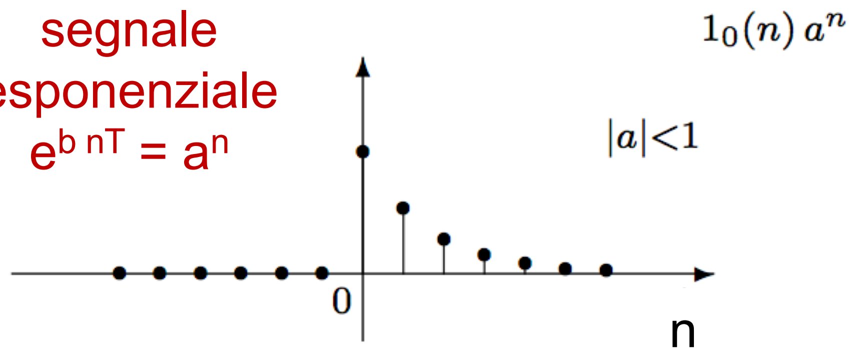
gradino
discreto



segno
discreto



segnale
esponenziale
$e^{b\,nT} = a^n$



Misure fondamentali

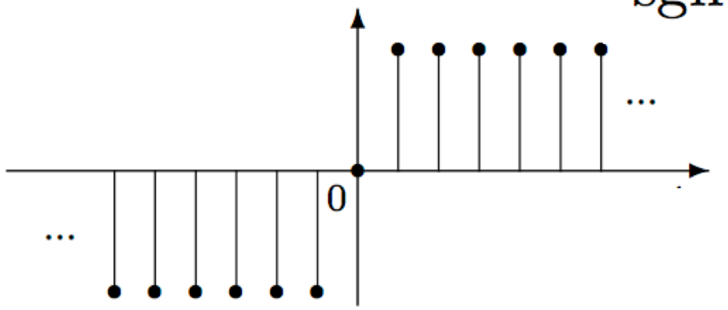
area, valor medio, energia, potenza

$$A_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \qquad E_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s(n)|^2$$

$$m_s = \lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{1+2N} \sum_{n=-N}^{N} s(n) \qquad P_s = \lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{1+2N} \sum_{n=-N}^{N} |s(n)|^2$$

Un esempio

$$\mathrm{sgn}(n)$$

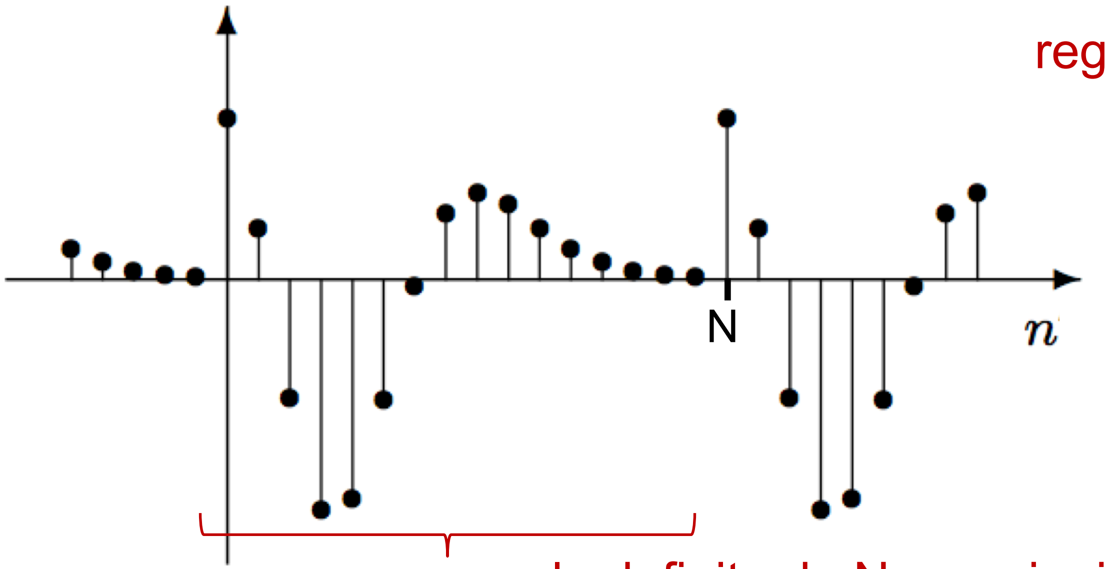


$$\boxed{m_s = \lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{1+2N} \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{sgn}(n) = \lim_{N\to\infty} \tfrac{N-N}{1+2N} = 0}$$

$$\boxed{P_s = \lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{1+2N} \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{sgn}^2(n) = \lim_{N\to\infty} \tfrac{2N}{1+2N} = 1}$$

Il caso periodico

area, valor medio, energia, potenza



segnale definito da N campioni !!!

regola di periodicità nel discreto

$$s(n) = s(n+N)$$

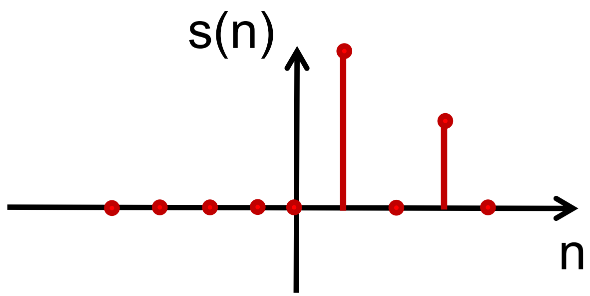
$$A_s(N) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} s(n)$$

$$m_s = \frac{A_s(N)}{N}$$

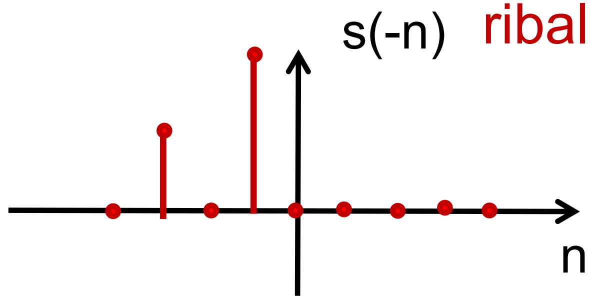
$$E_s(N) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} |s(n)|^2$$

$$P_s = \frac{E_s(N)}{N}$$

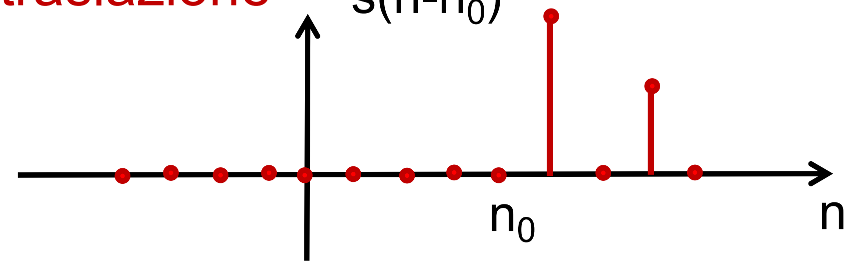
Trasformazioni fondamentali
e simmetrie



ribaltamento



traslazione



~~scala~~

pari	s(n) = s(-n)
dispari	s(n) = -s(-n)
reale	s(n) = s*(n)
immaginaria	s(n) = -s*(n)
hermitiana	s(n) = s*(-n)
antihermitiana	s(n) = -s*(-n)

parte pari

$s_e(n) = ½ [s(n)+s(-n)]$

parte dispari

$s_e(n) = ½ [s(n)-s(-n)]$

ripetizione periodica

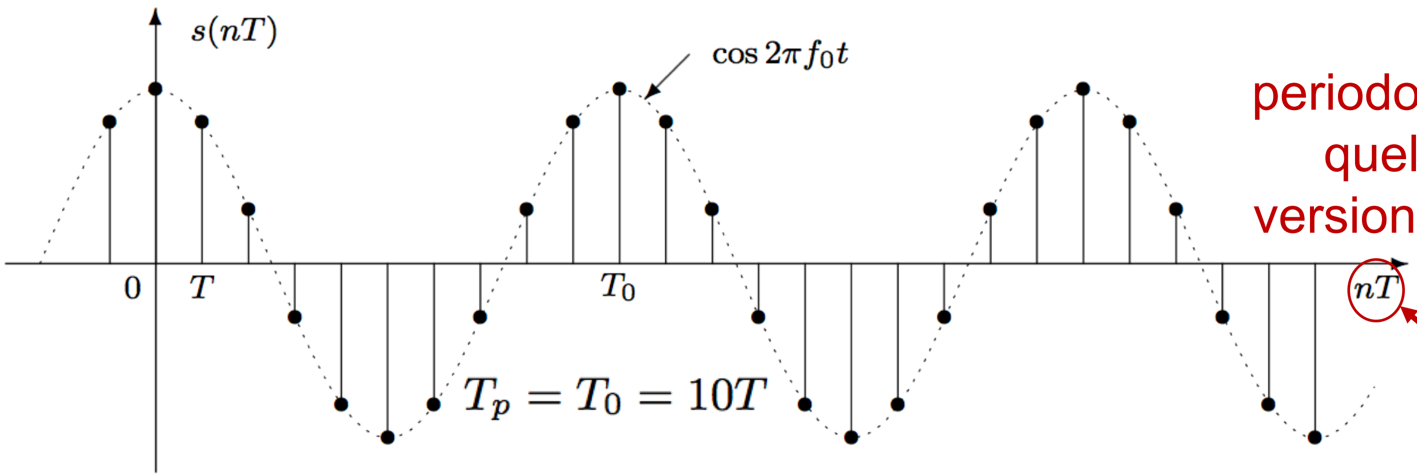
$$s(n) = \mathrm{rep}_N u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(n - Nk)$$

Sinusoidi campionate

peculiarità del caso discreto

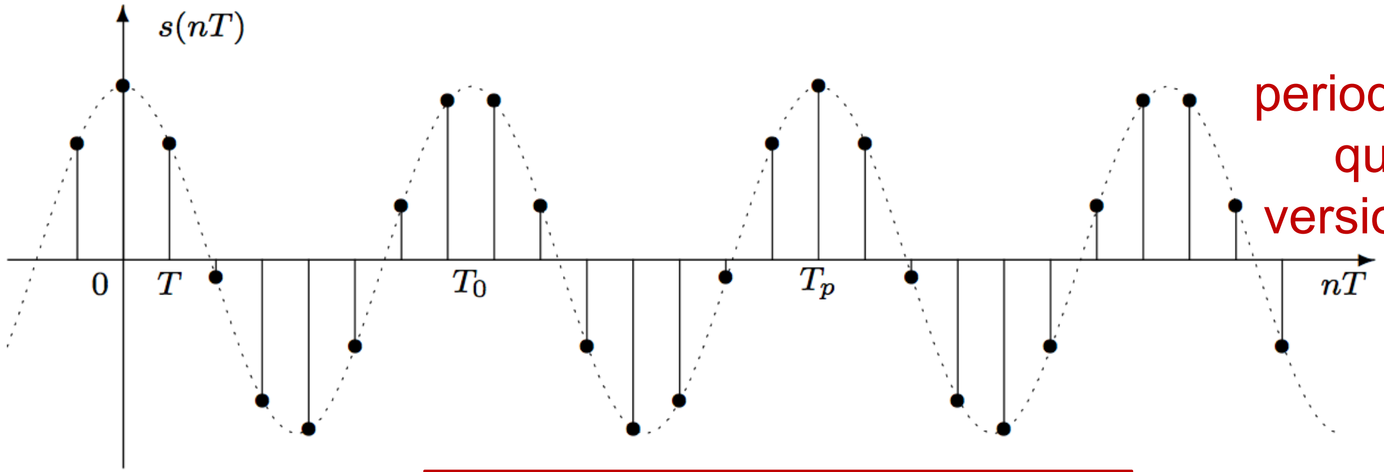
$$A_0 \ \cos\left(2\pi f_0 nT + \varphi_0\right)$$

a)



periodo identico a quello della versione continua

b)



periodo diverso da quello della versione continua

$$\boxed{T_0 = (7+\tfrac{1}{2})T \text{ and } T_p = 2T_0 = 15T}$$

Calcolo della periodicità
nelle sinusoidi campionate

$$s(n) = \cos(2\pi f_0 nT)$$

regola di periodicità nel discreto

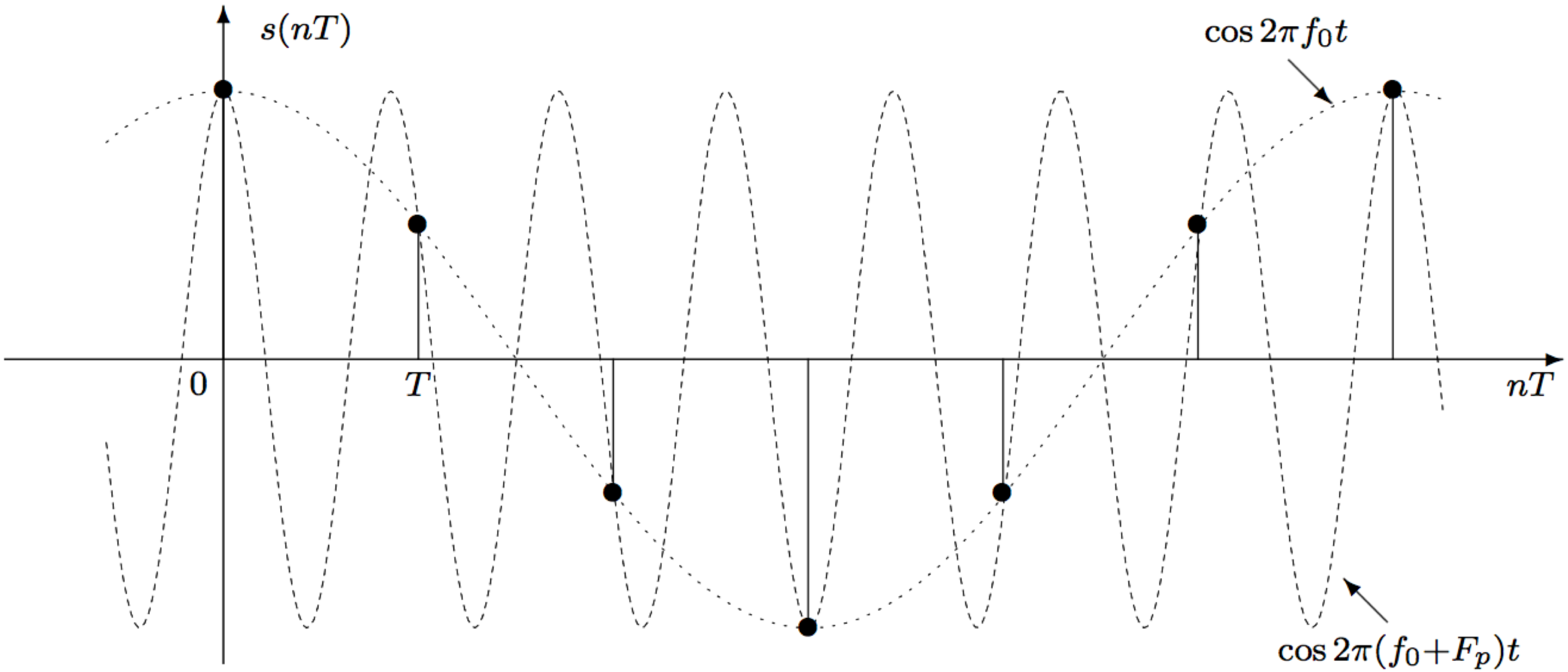
$$s(n) = s(n+N)$$

$$\cos(2\pi f_0 nT + 2\pi f_0 NT) = \cos(2\pi f_0 nT)$$

il che richiede $f_0 T = \frac{k}{N}$

f_0T non razionale implica che la sinusoide campionata **NON** è periodica

Ambiguità della frequenza
nelle sinusoidi campionate



$$\boxed{F_p = 1/T}$$

$$\cos(2\pi(f_0 + F_p)nT) = \cos(2\pi f_0 nT + 2\pi n) = \cos(2\pi f_0 nT)$$

Es 1
Disegnare i seguenti segnali discreti, quindi calcolarne area, valore medio, energia e potenza:

1. gradino $s(n) = 1_0(n)$
2. **esponenziale** discreto $s(n) = (½)^n \cdot 1_0(t)$
3. **sinusoide** $s(n) = A \cos(2\pi f_0 nT)$ periodica N, con f_0NT intero
4. esponenziale $s(n) = e^{j2\pi f0nT}$ con f_0 generico
5. somma di esponenziali $s(n) = a\, e^{j2\pi f_1 nT} + b\, e^{j2\pi f_2 nT}$ con $f_1 \neq f_2 + k/T$

Es 2
Trovare la periodicità delle seguenti sinusoidi campionate

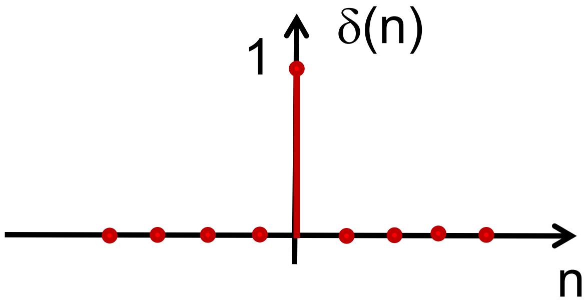
1. $s(n) = \cos(\pi n/6)$
2. $s(n) = \cos(n/6)$
3. $s(n) = \exp(j2\pi n/3) + \exp(j3\pi n/4)$

Impulsi ideali

delta di Dirac e di Kronecker, derivate generalizzate

Delta di Kronecker

impulso discreto



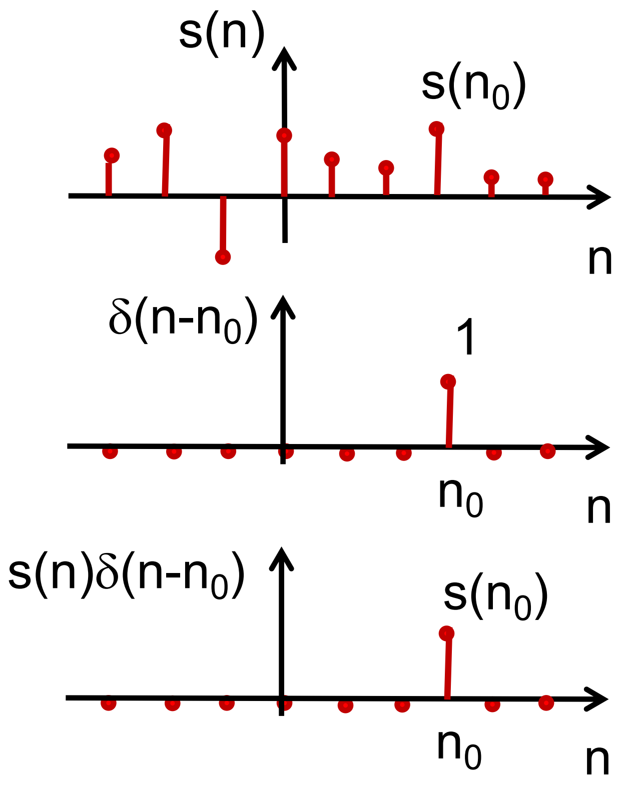
estensione $e(\delta) = \{0\}$

area $A_\delta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) = 1$

parità $\delta(n) = \delta(-n)$

relazione con il gradino $1_0(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m)$

Proprietà rivelatrici
dell'impulso discreto



il prodotto con un delta rivela il valore del segnale

proprietà rivelatrici base

$$s(n)\delta(n-n_0) = s(n_0)\delta(n-n_0)$$

$$s(n)\delta(n) = s(0)\delta(n)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)\delta(n-n_0) = s(n_0)$$

espressione alternativa di un segnale

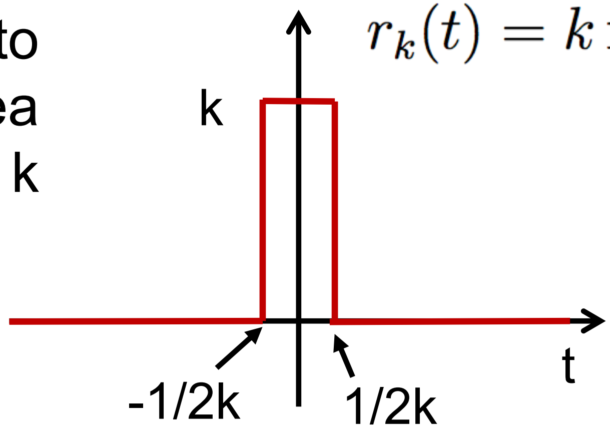
$$s(n) = \sum_{n_0=-\infty}^{\infty} s(n_0)\delta(n-n_0)$$

Delta di Dirac

impulso continuo (funzione generalizzata)

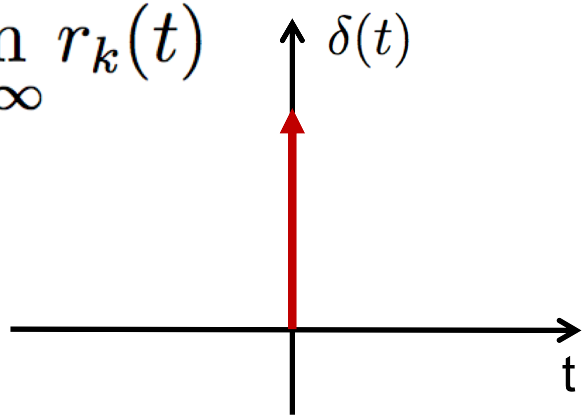
rettangolo centrato nell'origine di area 1 e altezza k

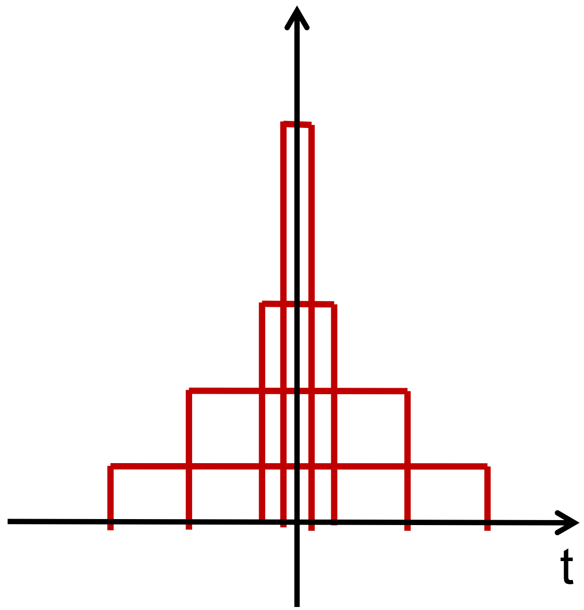
$$r_k(t) = k\,\mathrm{rect}(kt)$$



al limite otteniamo l'impulso ideale

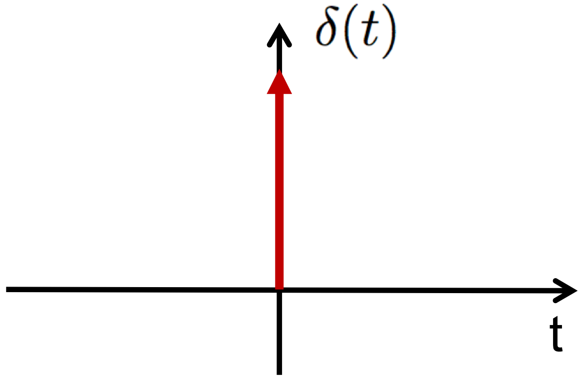
$$\delta(t) = \lim_{k \to \infty} r_k(t)$$





Proprietà

dell'impulso continuo

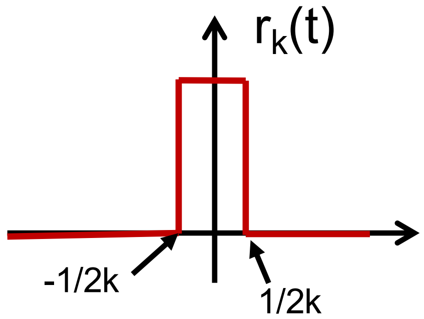


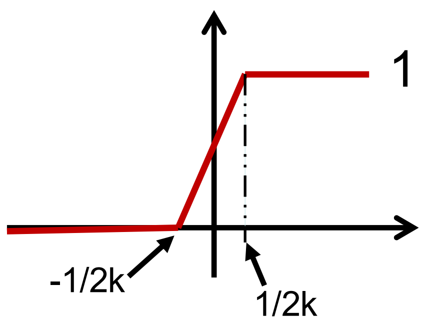
estensione $e(\delta) = \{0\}$

area $A_\delta = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} r_k(t)dt}_{1} = 1$

parità $\delta(t) = \delta(-t)$

gradino $1(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(u)du = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{u} r_k(t)dt}$



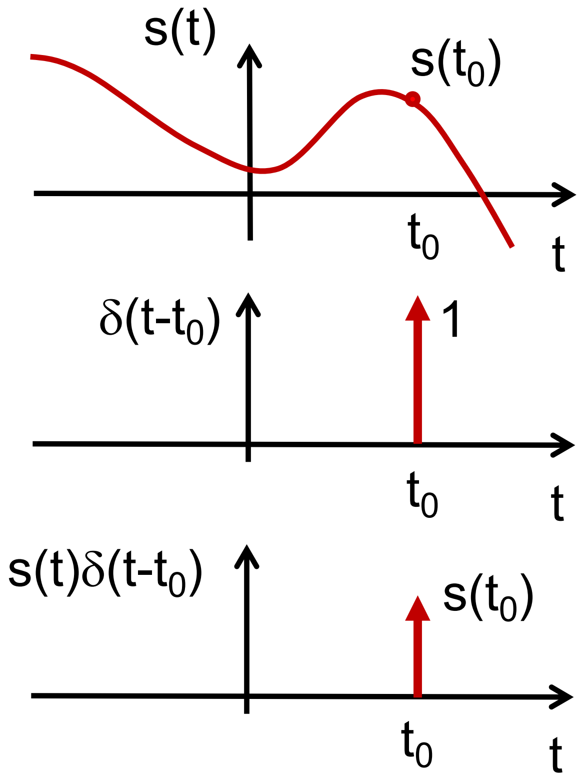


Proprietà rivelatrici
dell'impulso continuo

proprietà rivelatrice base

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\delta(t)dt = \lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)r_k(t)dt$$

$$\lim_{k\to\infty}\underbrace{\frac{1}{\frac{1}{k}}\int_{-\frac{1}{2k}}^{\frac{1}{2k}} s(t)dt}_{s(t_0),t_0\in[-\frac{1}{2k},\frac{1}{2k}]} = s(0)$$



il prodotto con un delta rivela il valore del segnale

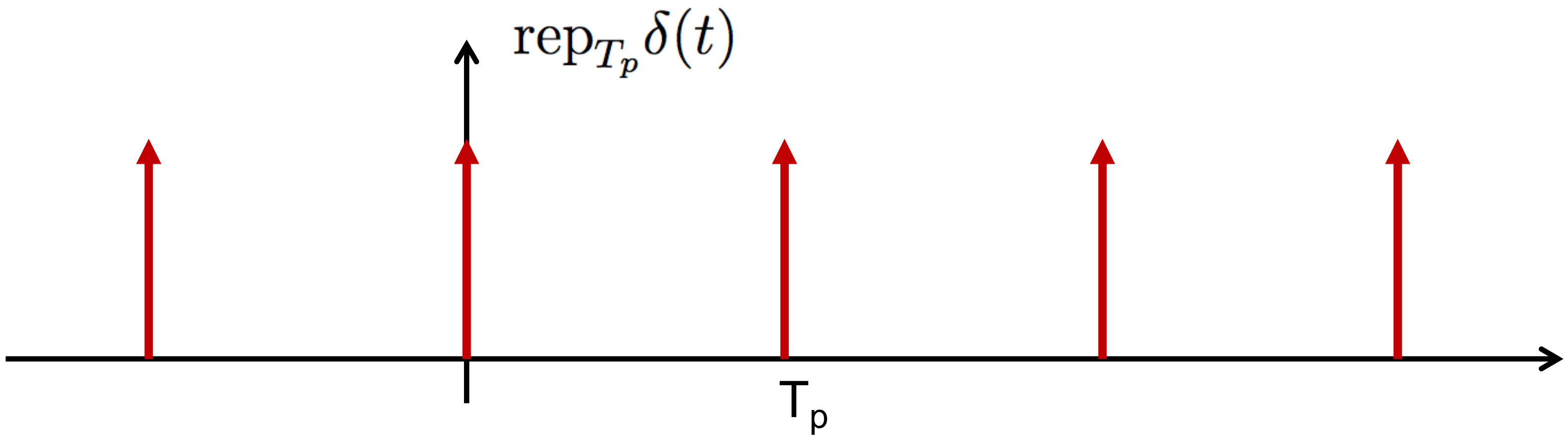
generalizzazioni

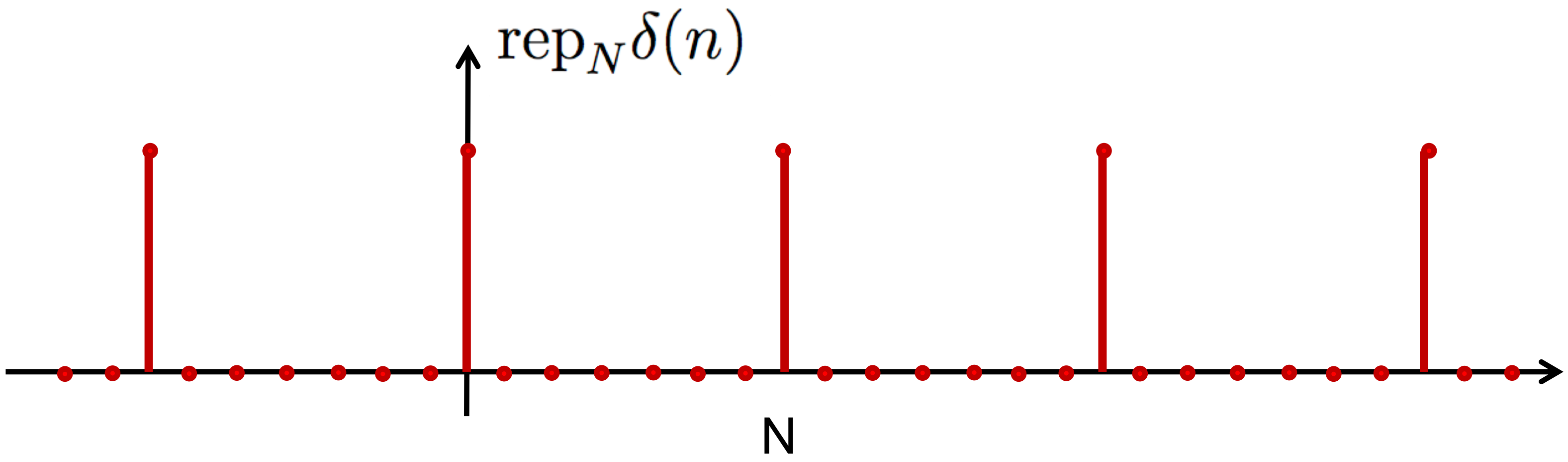
$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\delta(t-t_0)dt = s(t_0)$$

$$s(t)\delta(t-t_0) = s(t_0)\delta(t-t_0)$$

Versioni periodiche

segnali comb = pettine

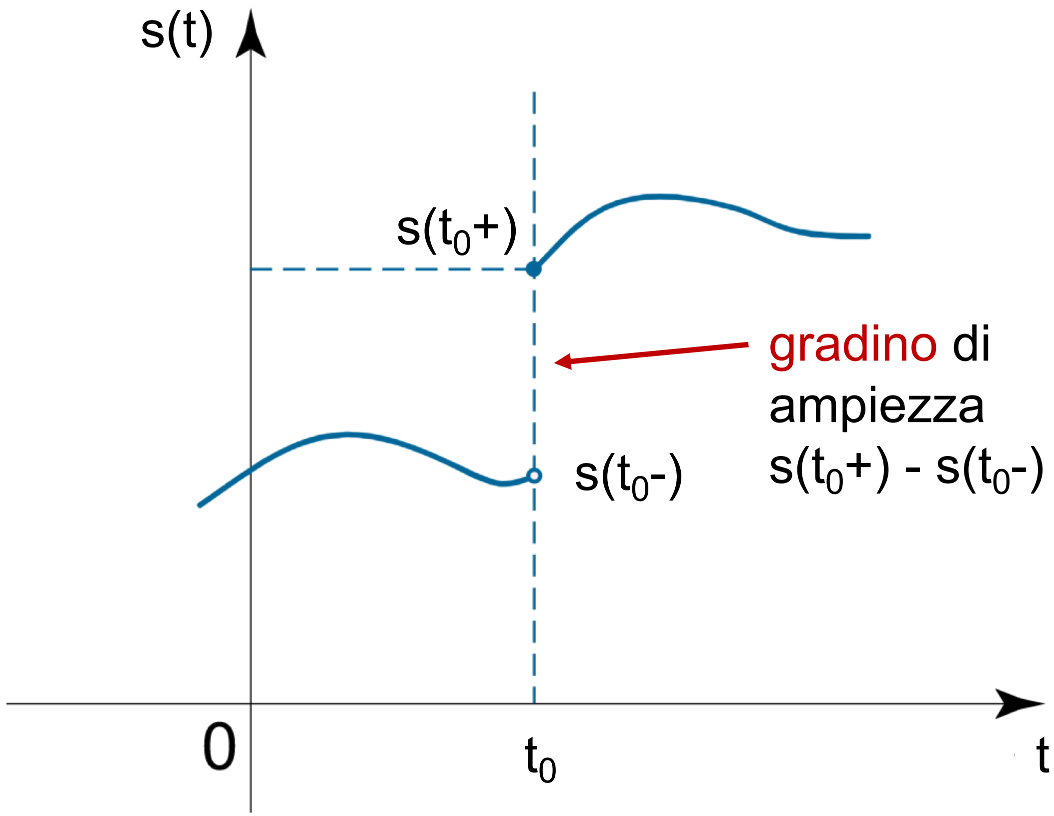




Derivate generalizzate

nei tempi continui

$$1(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(u)du \quad \Rightarrow \quad \delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}$$



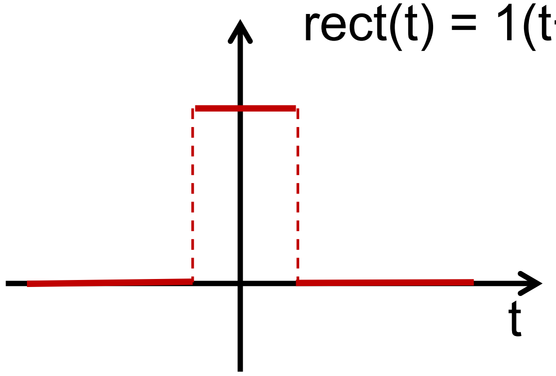
induce (localmente) un impulso della stessa ampiezza nella derivata

$$s'(t) = [s(t_0+) - s(t_0-)]\delta(t - t_0)$$

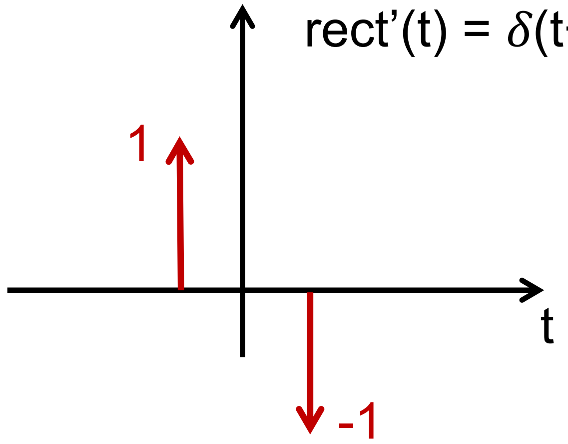
Esempi

di derivate generalizzate

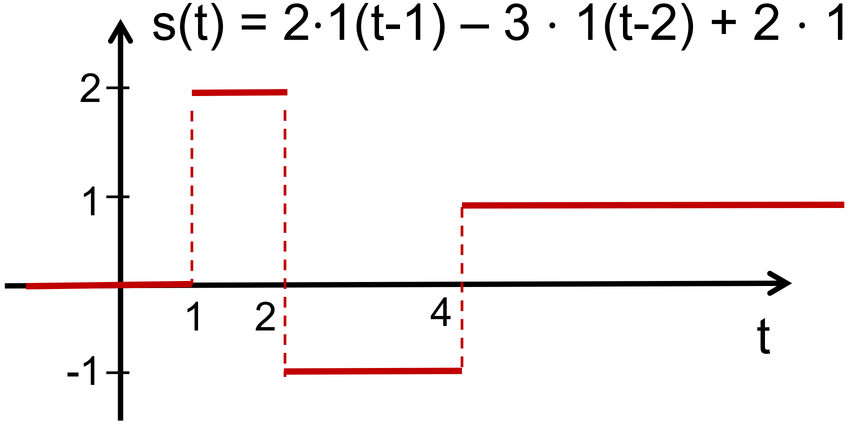
$\text{rect}(t) = 1(t+½) – 1(t-½)$



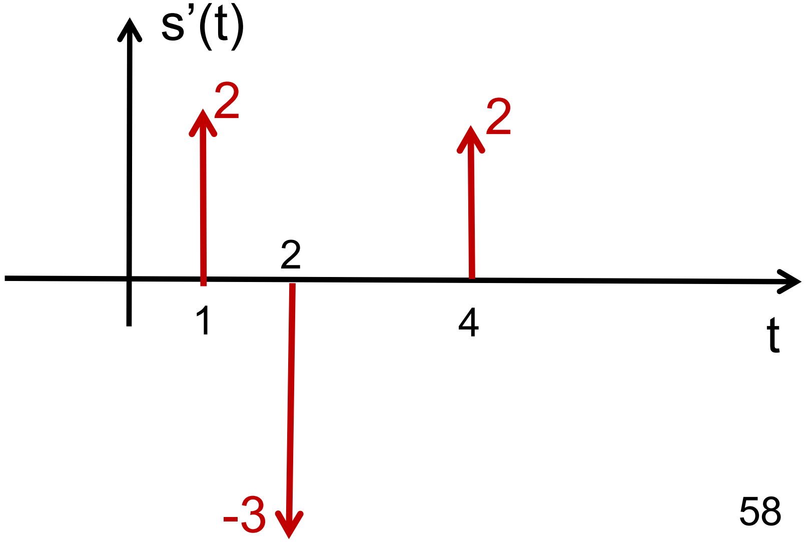
$\text{rect}'(t) = \delta(t+½) – \delta(t-½)$



$s(t) = 2\cdot 1(t-1) – 3 \cdot 1(t-2) + 2 \cdot 1(t-4)$



$s'(t)$



Derivate del delta

loro significato

il prodotto con un δ' rivela il valore della **derivata** del segnale

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\delta'(t)dt = s(t)\delta(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} s'(t)\delta(t)dt$$
$$= -s'(0)$$

il prodotto con un δ'' rivela il valore della **derivata seconda** del segnale (**provare x casa**)

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\delta''(t)dt = s''(0)$$