Corso di Segnali e Sistemi

Ingegneria Biomedica-Ingegneria Elettronica

Università degli Studi di Padova

(Prof. C. Dalla Man)

A.A. 2020/2021

Richiami sui Numeri Complessi

Perché ?

Quando parliamo di segnali, parliamo di variazioni (solitamente nel tempo) di numeri complessi.

È necessario maneggiare bene i numeri complessi per poter capire e studiare le proprietà dei segnali, dei sistemi (che, lo vedremo, sono degli operatori che trasformano i segnali) e gli strumenti avanzati che si utilizzano nell’analisi e nel progetto.

Numeri Complessi

$$a \in \mathbf{C}$$

Rappresentazione cartesiana:

$$a = \alpha + j\beta$$

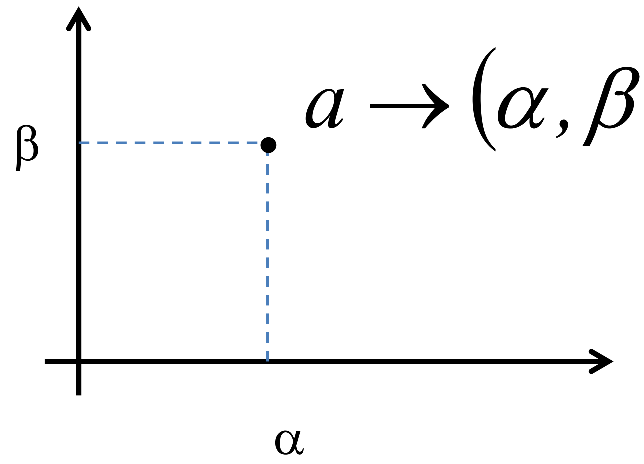
$$\alpha = Re[a]$$

$$\beta = Im[a]$$

Nota: β è un numero REALE!!

j Unità immaginaria

$$j^2 = -1$$



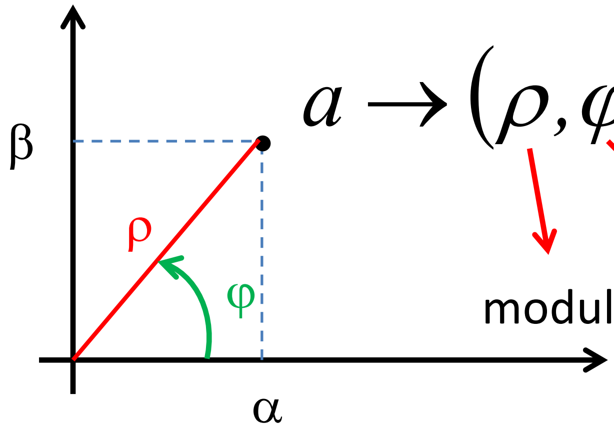
$$a \rightarrow (\alpha, \beta)$$

C è in corrispondenza biunivoca con **R**x**R**

Numeri Complessi

$$a \in \mathbf{C}$$

Rappresentazione polare (o modulo e fase):



$$a \to (\rho, \varphi)$$

modulo

fase o argomento

Da polare a cartesiana:

$$a = \rho \cos \varphi + j\rho sen\varphi = \alpha + j\beta$$

$$\Rightarrow \alpha = \rho \cos \varphi, \;\; \beta = \rho sen \varphi$$

Numeri Complessi

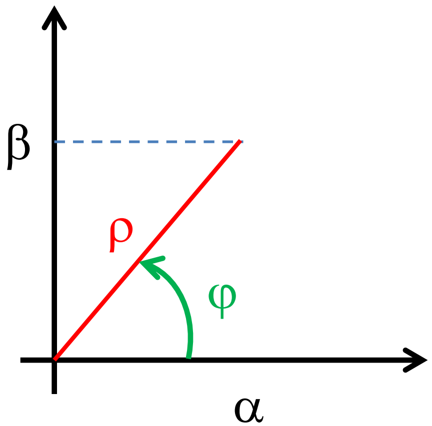
Da cartesiana a polare:

modulo $\rho = |a| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

fase:

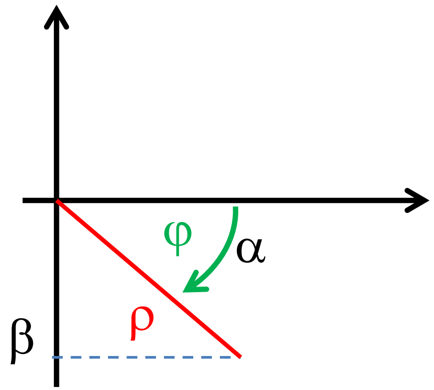
Caso α>0, β>0

$$\varphi = arctg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$



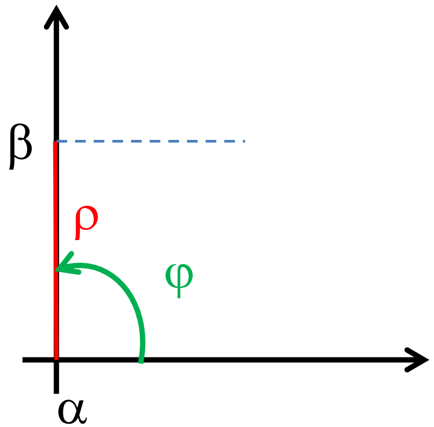
Caso α>0, β<0

$$\varphi = arctg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$



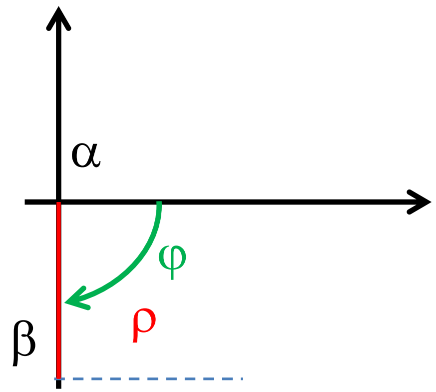
Caso α=0, β>0

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$



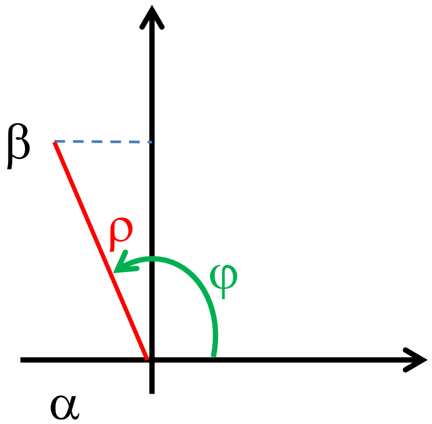
Caso α=0, β<0

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$



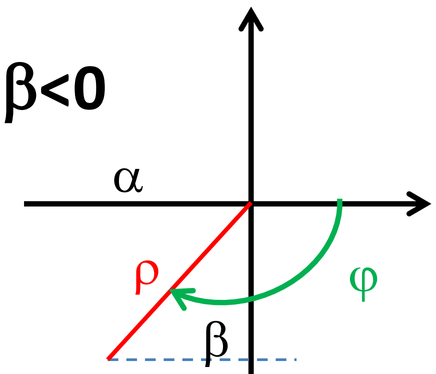
Numeri Complessi

Caso $\alpha<0$, $\beta>0$



$$\varphi = arctg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \pi$$

Caso $\alpha<0$, $\beta<0$



$$\varphi = arctg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) - \pi$$

Numeri Complessi

Da cartesiana a polare:

modulo $\rho = |a| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

fase $$\varphi = arg(a) = \begin{cases} arctg\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right) & \alpha > 0 \\ \mathrm{sgn}(\beta) \cdot \dfrac{\pi}{2} & \alpha = 0 \\ arctg\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right) \pm \pi & \alpha < 0 \end{cases}$$

$\alpha = 0 \rightarrow \dfrac{\pi}{2} \quad \beta > 0$

$\alpha = 0 \rightarrow -\dfrac{\pi}{2} \quad \beta < 0$

$\alpha < 0 \rightarrow + \quad \beta > 0$

$\alpha < 0 \rightarrow - \quad \beta < 0$

Sempre in (-π, π]

vale $$arg\left(\frac{1}{a}\right) = -arg(a)$$

$$arg(ab) = arg(a) + arg(b)$$

Operazioni sui Numeri Complessi

Su C si definiscono le seguenti operazioni

somma

$$a = \alpha + j\beta;$$

$$b = \gamma + j\delta;$$

$$a + b = (\alpha + j\beta) + (\gamma + j\delta) = (\alpha + \gamma) + j(\beta + \delta)$$

Proprietà: associativa e commutativa

Elemento neutro: 0+j0

Opposto: $-a = -\alpha + j(-\beta);$

sottrazione

$$a = \alpha + j\beta;$$

$$b = \gamma + j\delta;$$

$$a - b = a + (-b) = (\alpha + j\beta) + (-\gamma - j\delta) = (\alpha - \gamma) + j(\beta - \delta)$$

prodotto

$$a = \alpha + j\beta;$$

$$b = \gamma + j\delta;$$

$$a \cdot b = (\alpha + j\beta) \cdot (\gamma + j\delta) = (\alpha\gamma - \beta\delta) + j(\beta\gamma + \alpha\delta)$$

Operazioni sui Numeri Complessi

Proprietà: associativa e commutativa e distributiva rispetto alla somma

Elemento neutro: 1+j0

inverso:

$$se \quad \alpha + j\beta \neq 0 \qquad (\alpha + j\beta)^{-1} = \frac{1}{\alpha + j\beta} = \frac{1}{\alpha + j\beta} \cdot \frac{\alpha - j\beta}{\alpha - j\beta}$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - j\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

quoziente

$$se \quad \gamma + j\delta \neq 0 \qquad \frac{(\alpha + j\beta)}{\gamma + j\delta} = \frac{(\alpha\gamma + \beta\delta) + j(\beta\gamma - \alpha\delta)}{\gamma^2 + \delta^2}$$

coniugazione $a = \alpha + j\beta \quad \Rightarrow \quad \bar{a} = \alpha - j\beta$

Valgono le relazioni: $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

Inoltre $\frac{a+\bar{a}}{2} = Re(a) \qquad \frac{a-\bar{a}}{2j} = Im(a) \qquad a \cdot \bar{a} = |a|^2 = \rho^2$

Esponenziale Complesso

$$a \in \mathbf{C} \quad \Rightarrow \quad e^{a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k}}{k!}$$

La serie è assolutamente convergente $\forall a \in \mathbf{C}$

Attenzione: dire che z_i (complessi) convergono a z significa dire che $|z_i - z| \to 0$

$$e^{a} = e^{\alpha + j\beta} = e^{\alpha} \cdot e^{j\beta}$$

Com'è fatto $e^{j\beta}$?

Esponenziale Complesso

$$e^{j\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j\beta)^k}{k!} = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{(\beta)^{2h}}{(2h)!} + j\sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{(\beta)^{2h+1}}{(2h+1)!} =$$

$$= cos\,\beta + j sen\,\beta$$

$$\boxed{e^{j\beta} = cos\,\beta + j sen\,\beta}$$

Relazione di Eulero

Nota: $\left|e^{j\beta}\right| = \sqrt{cos^2\beta + sen^2\beta} = 1 \quad \forall \beta \in R$

$$a = \underbrace{\alpha + j\beta}_{\text{Forma cartesiana}} = \rho\, cos\,\varphi + j\rho\, sen\,\varphi = \underbrace{\rho e^{j\varphi}}_{\text{Forma polare}}$$

Esponenziale Complesso

$$a = \rho_a e^{j\varphi_a} \qquad b = \rho_b e^{j\varphi_b}$$

$$\Downarrow$$

$$a \cdot b = \rho_a e^{j\varphi_a} \cdot \rho_b e^{j\varphi_b} = \rho_a \rho_b e^{j\varphi_a} e^{j\varphi_b} = \rho_a \rho_b e^{j(\varphi_a + \varphi_b)}$$

$$\Downarrow$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$ **I moduli si moltiplicano**

$$arg(a \cdot b) = arg(a) + arg(b)$$ **Le fasi si sommano**

Esponenziale Complesso

FORMULE DI EULERO

$$e^{j\beta} = \cos\beta + j sen\beta$$

$$e^{-j\beta} = \cos\beta - j sen\beta$$

$$\cos\beta = \frac{e^{j\beta} + e^{-j\beta}}{2}$$

$$sen\beta = \frac{e^{j\beta} - e^{-j\beta}}{2j}$$

Da sapere una volta per tutte!

- Numero complesso in forma polare: $\rho e^{j\varphi}$

$$\left|\rho e^{j\varphi}\right| = \rho \quad \Rightarrow \quad \left|e^{j\varphi}\right| = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\left|e^{j\omega t}\right| = 1 \qquad \left|e^{j\theta n}\right| = 1$$

- $e^{j2k\pi} = 1 \qquad \text{per k} = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$
- $e^{j(2k+1)\pi} = -1 \qquad \text{per k} = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$
- $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$
- $e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$

Esercizi

1) Trasformare in forma cartesiana i seguenti numeri complessi

- $e^{j\frac{\pi}{2}}$
- $je^{j3\pi}$
- $\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$

2) Trasformare in forma polare i seguenti numeri complessi

- $1+j$
- $-3j$
- -2

…dovreste saperli fare agevolmente