Geometria 1 - mod. A - Lezione 38

Note Title

Avvisi: 1) C'è questionario anonimo in Moodle

2) Nel 2° compitino c'è la teoria da appl. lineari in poi. (e anche quanto fatto prima)

Osservazioni a) $\varphi^2 = \varphi$ $\qquad \varphi: V \longrightarrow V$ endomorfismo

$$\varphi^2 - \varphi = 0 \qquad \varphi(\varphi - id) = 0$$

$m_\varphi(x)$ pol. minimo di φ divide $x(x-1)$

$$m_\varphi(x) \begin{cases} = x & \Longrightarrow \varphi = 0 \\ = x-1 & \Longrightarrow \varphi - id = 0 \Rightarrow \varphi = id \\ = x(x-1) & \Rightarrow \text{autovalori di } \varphi \text{ sono } 0 \text{ e } 1 \text{ e } \varphi \text{ è diagonalizz.} \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists\ \mathcal{B}$ base di V t.c. $\alpha_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$

$$U = \ker(\varphi - id) \quad e \quad W = \ker \varphi$$

$$V = U \oplus W \qquad \varphi_{|U} = id \quad e \quad \varphi_{|W} = 0$$

ossia φ è la proiezione su U nella direz di W.

b) Se $\varphi: V \longrightarrow V$ endom. t.c. $\varphi^2 = id \leadsto \varphi^2 - id = 0$

$m_\varphi(x)$ divide $x^2 - 1$

$$m_\varphi(x) = \begin{cases} x-1 & \Rightarrow \varphi = id \\ x+1 & \Longrightarrow \varphi = -id \\ x^2-1 = (x-1)(x+1) & \Rightarrow V = U \oplus W \end{cases}$$

φ è diagonalizzab.

con $U = \ker(\varphi - id)$ e $W = \ker(\varphi + id)$

$\mathcal{B}$ base di V ottenuta unendo $\mathcal{B}_U$ e $\mathcal{B}_W$

$\alpha_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$

Dunque φ è la matrice di una simmetria di asse U e direz W.

c) $\varphi^3 = id \qquad \varphi: V \to V$

$m_\varphi(x)$ divide $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$

$$m_\varphi(x) = \begin{cases} (x-1) \rightsquigarrow \varphi = id \\ x^2+x+1 \rightsquigarrow \text{in } \mathbb{R} \text{ non è diagonalizzabile} \dots \text{(e in } \mathbb{C}\text{?)} \\ \qquad\qquad \dots \text{ triangolarizzabile.} \\ (x-1)(x^2+x+1) \text{ in } \mathbb{R} \dots\dots\dots \text{(e in } \mathbb{C}\text{?)} \end{cases}$$

Studio 3° caso $\quad V = \underbrace{\operatorname{Ker}(\varphi - id)}_{\substack{\text{Autospazio} \\ \text{di autovalore } 1}} \oplus \underbrace{\operatorname{Ker}(\varphi^2+\varphi+id)}_{W}$

$r = \dim V_1(\varphi)$

$$\alpha_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbb{1}_r} & 0 \\ 0 & \boxed{*} \end{pmatrix}$$

pensare se può essere scritto in forma "bella" su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$?

Caso particolare di b): Sia $\theta \in \mathbb{R}$, $0 \le \theta < 2\pi$,

$f_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad p_A(x) = \begin{vmatrix} \cos\theta - x & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - x \end{vmatrix}$

$$= x^2 - \cos^2\theta - \sin^2\theta = x^2 - 1$$

So che $1, -1$ sono gli autovalori $\Rightarrow m_A(x) = (x-1)(x+1)$

$\rightsquigarrow A$ è diagonalizzabile con A simile a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

f_A è una simmetria: asse? direzione.

Asse: $V_1(A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{R}^2 = V_1(A) \oplus V_{-1}(A)$$

direzione $V_{-1}(A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} \cos\theta + 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta + 1 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} \cos\theta - 1 & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta - 1 & 0 \end{array}\right)}_{\text{ha rango } 1} \rightsquigarrow \left\langle \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 1 - \cos\theta \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

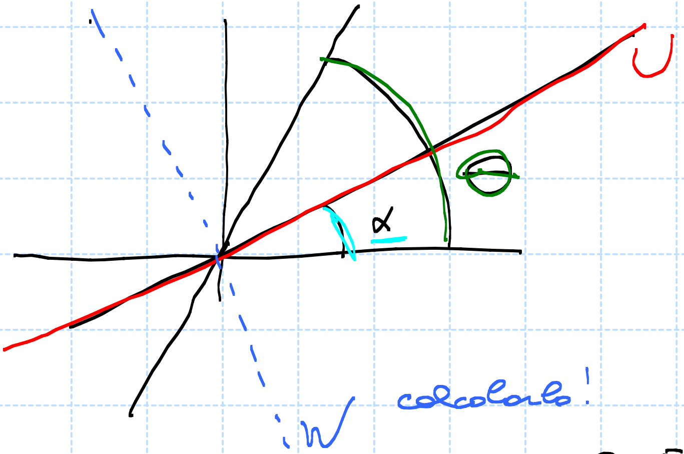
$ax + by = 0 \qquad \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ è soluz.

si $\alpha = \frac{\theta}{2}$ $\qquad \theta = 2\alpha$ $\qquad \sin\theta = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$1-\cos\theta = \underbrace{1-\cos^2\alpha}_{\sin^2\alpha} + \sin^2\alpha$

$$\begin{pmatrix} \sin\theta \\ 1-\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin\alpha\cos\alpha \\ 2\sin^2\alpha \end{pmatrix} \underset{\sin\alpha\neq 0}{=} \text{proporz.} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

e se $\alpha = 0$? (esercizio!)



W è la retta perpendicolare a U

calcolarla!

$\theta \in [0, 2\pi)$

Se $A \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad r \sim$ $\quad p_A(x) = (\cos\theta - x)^2 + \sin^2\theta \overset{!}{=} x^2 - 2\cos\theta x + 1$

ha radici reali $\iff \frac{\Delta}{4} \geq 0$ $\qquad \frac{\Delta}{4} = \cos^2\theta - 1 \leq 0$

$\iff \cos^2\theta = 1 \iff \theta = 0, \pi$

- $\theta = 0$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ rotaz. banale
- $\theta = \pi$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad v \longrightarrow -v$
- $\theta \neq 0, \pi$ non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ ma su $\mathbb{C}$ sì

$\alpha, \bar{\alpha} \in \mathbb{C}$ autovalori $\quad \cos\theta \pm i\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$\cos\theta \pm i\sin\theta$

Se calcolo gli autovettori relativi a $\cos\theta + i\sin\theta = \alpha$

$\sin\theta \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -i\cancel{\sin\theta}^{\,1} & \cancel{\sin\theta}^{\,1} & 0 \\ -\cancel{\sin\theta}^{\,1} & -i\cancel{\sin\theta}^{\,1} & 0 \end{array}\right)$$

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix} \right\rangle = V_\alpha(A)$

in $\mathbb{C}^2$

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle$ $V_{\bar{\alpha}}(A)$

non dipendono da θ

- Sia $\varphi: V \longrightarrow V$ endom. nilpotente con $\dim V = 7$ e $m_\varphi(x) = x^3$

Quali sono i tipi di nilpotenza di φ?

$\alpha(\varphi) \in M_7(K)$ (φ è triangolarizzabile)

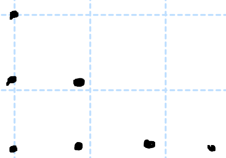
e ho blocchi di Jordan di ordine al più 3

e vi è un J_3

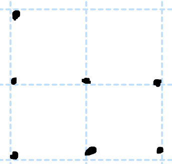
7 puntini, le colonne sono al massimo alte 3 e una è alta 3

$$\begin{pmatrix} J_3 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad s = (4, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

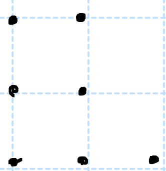
$\uparrow$ $\#J_1$ $\quad \#J_2 \quad \#J_3$



$$\begin{pmatrix} J_3 & & & \\ & J_2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad s = (2, 1, 1, 0 0 0 0)$$



$$\begin{pmatrix} J_3 & & \\ & J_2 & \\ & & J_2 \end{pmatrix} \qquad s = (0, 2, 1, 0, 0, 0, 0)$$



$$\begin{pmatrix} J_3 & & \\ & J_3 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad s = (1, 0, 2, 0, 0, 0, 0)$$

Ricevimento questa settimana: no mercoledì

Ve 20/1 ore 17 via Zoom.

- Esercizio: Sia $\varphi : V \longrightarrow V$ endom. con $p_\varphi(x) = (x-2)^4 (x+1)^3$

$m_\varphi(x) = (x-2)^2 (x+1)^2$

dim $V = 7$ = grado di p_φ

φ è triangolarizzabile

$$V = \underbrace{\operatorname{Ker}(\varphi - 2id)^2}_{U} \oplus \underbrace{\operatorname{Ker}(\varphi + id)^2}_{W}$$

matrice di φ è del tipo

$$\left(\begin{array}{c|c} \alpha(\varphi_{|U}) & 0 \\ \hline 0 & \alpha_{\varphi_{|W}} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Autov 2 : $\begin{matrix} \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} J_2(2) & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} \end{pmatrix} = A_1$ $\begin{matrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} J_2(2) & 0 \\ 0 & J_2(2) \end{pmatrix} = A_2$

Autov -1 $\begin{matrix} \bullet & \\ \bullet & \bullet \end{matrix}$ $\rightsquigarrow$ $J_2(-1)$ $J_1(-1)$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B$

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Sia A triangolarizzabile e simile $D + N$ $DN = ND$
↑ diagonale ↳ nilpotente

(è evidente nel caso $\lambda 1\!\!1_n + J_n$: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = J_n(\lambda)$

negli altri casi analogo $\begin{pmatrix} J_{\cdot}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{\cdot}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{\cdot}(\lambda_k) \end{pmatrix}$)

$$P^{-1}AP = D + N \implies A = P(D+N)P^{-1}$$

$$A^n = P\underbrace{(D+N)^n}_{\text{come è fatta?}}P^{-1}$$

$n=1$ $D+N$

$n=2$ $(D+N)^2 = (D+N)(D+N) = D^2 + DN + ND + N^2 \overset{!}{=} D^2 + 2DN + N^2$

$n=3$ $D^3 + 3D^2N + 3DN^2 + N^3$

$\vdots$

$$(D+N)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D^j N^{n-j}$$

Se $N^2 = 0$ $(D+N)^n = D^n + nD^{n-1}N + \dots$ sono 0

$$(D+N)^n = \begin{pmatrix} d_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_r^n \end{pmatrix} + n \underbrace{\begin{pmatrix} d_1^{n-1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_r^{n-1} \end{pmatrix} N}$$

facile da calcolare.
basta calcolare DN
e poi generalizzo.

$$e^x = 1 + \frac{1}{1}x + \frac{1}{2}x^2 \ \cdots = \boxed{\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

Studio di eq. diff. lineari $\quad e^A = \mathbb{1} + A + \frac{1}{2}A^2 + \cdots$

e altri così

$V_1 = \#$ volpi $\qquad C_1 = \#$ conigli nel bosco all'inizio

$V_i = \#$ volpi al tempo $i \qquad C_i = \#$ conigli al tempo i

Suppongo $\quad V_{i+1} = \frac{6}{10} V_i + \frac{3}{10} C_i \qquad C_{i+1} = \frac{12}{10} C_i - \frac{3}{10} V_i$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{12}{10} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} V_i \\ C_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{i+1} \\ C_{i+1} \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} V_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2 \\ C_2 \end{pmatrix} \qquad A^2\begin{pmatrix} V_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_3 \\ C_3 \end{pmatrix} \cdots$$

$$A^n\begin{pmatrix} V_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix} \qquad p_A(x) = \begin{vmatrix} \frac{6}{10} - x & \frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{12}{10} - x \end{vmatrix} = \left(x - \frac{9}{10}\right)^2$$

A è simile $\ldots \begin{pmatrix} 9/10 & 1 \\ 0 & 9/10 \end{pmatrix} = 9/10\, \mathbb{1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= J_2} \qquad J_2^2 = 0$

$$A^n = \underbrace{\left(\frac{9}{10}\mathbb{1}\right)^n}_{= \frac{9^n}{10^n}\mathbb{1} \to 0} + \underbrace{n\left(\frac{9}{10}\mathbb{1}\right)^{n-1} \cdot J_2}_{n \cdot \frac{9^{n-1}}{10^{n-1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to 0} + 0$$

Estinzione

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

C_1 animali di 1 anno $\rightsquigarrow \frac{1}{2} C_1$

$C_2 \rightsquigarrow \frac{1}{3} C_2$

$6 C_2$ di 2 anni

C_3 quelli di 3 anni $\boxed{C_4 = 0}$

$$A \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 C_3 \\ \frac{1}{2} C_1 \\ \frac{1}{3} C_2 \end{pmatrix}$$

$$p_A(x) = - \begin{vmatrix} -x & 0 & 6 \\ 1/2 & -x & 0 \\ 0 & 1/3 & -x \end{vmatrix} = \boxed{x^3 - 1} = (x-1) \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{p_B(x)}$$

$(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$

$\alpha^3 = 1 \quad \alpha \in \mathbb{C}$

$$A \underset{\text{su } \mathbb{R}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{B} & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

$$A \underset{\text{su } \mathbb{C}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \qquad A^2 \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha^2 & \\ & & \bar{\alpha}^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha^3 & \\ & & \bar{\alpha}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Il ciclo si ripete ogni 3 anni.

Esercizio

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \alpha \end{pmatrix} = J_n(\alpha) = A \qquad A^t = \begin{pmatrix} \alpha & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

$A = \alpha \mathbb{1} + N \qquad A^t = (\alpha \mathbb{1} + N^t)$

N^t è nilpotente e $m_A(x) = m_{A^t}(x) = p_A(x) = p_{A^t}(x)$

$\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f_A) = A \qquad \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

$e_1 \rightsquigarrow \alpha e_1, \quad e_2 \rightsquigarrow \alpha e_2 + e_1, \quad \dots, \quad e_n \rightsquigarrow \alpha e_n + e_{n-1}$

$v_1 \; v_2 \; \dots \; v_{n-1} \; v_n$

$v_{n-1} \rightsquigarrow \alpha v_{n-1} + v_n, \quad v_n \rightsquigarrow \alpha v_n$

basta prendere

$\{ e_n \; e_{n-1} \; e_{n-2} \dots e_1 \}$, $e_n = v_1$

Conclusione $J_n(\alpha)$ e $J_n^t(\alpha)$ sono simili.

- $\alpha \neq 0 \quad J_n(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha \end{pmatrix}$ è invertibile. $J_n(\alpha)^{-1}$?

$(x - \alpha)^n = 0 \quad$ Posso usare $(J_n(\alpha) - \alpha \mathbb{1})^n = 0$