Geometria 1 - mod. A - Lezione 37

Note Title

Sia $\varphi : V \longrightarrow V$ endomorf. nilpotente $\quad m_\varphi(x) = x^m \quad m \le n = \dim V$

$$V = V_m \oplus V_{m-1} \oplus \dots \oplus V_2 \oplus V_1 \quad \text{con} \quad \ker\varphi^{t+1} = V_{t+1} \oplus \ker\varphi^t \quad t \ge 1$$

$$V = \ker\varphi^m, \quad V_1 = \ker\varphi$$

$$\underbrace{V_2 \oplus V_1}_{\ker\varphi^2}, \quad \underbrace{V_3 \oplus V_2 \oplus V_1}_{\ker\varphi^3}, \quad \underbrace{V_{m-1} \oplus \dots \oplus V_2 \oplus V_1}_{\ker\varphi^{m-1}}$$

$$V = V_m \oplus \underbrace{\ker\varphi^{m-1}}_{V_{m-1} \oplus \ker\varphi^{m-2}}$$

Inoltre

basi

$$V_m =: V'_m \qquad \mathcal{V}_m =: \mathcal{V}'_m$$

$$V_{m-1} = \varphi(V'_m) \oplus V'_{m-1} \qquad \varphi(\mathcal{V}_m) \cup \mathcal{V}'_{m-1}$$

$$V_{m-2} = \varphi(V'_{m-1}) \oplus V'_{m-2} = \varphi^2(V'_m) \oplus \varphi(V'_{m-1}) \oplus V'_{m-2} \qquad \varphi^2(\mathcal{V}'_m) \cup \varphi\mathcal{V}'_{m-1} \cup \mathcal{V}'_{m-2}$$

$$\vdots$$

$$V_2 = \varphi(V_3) \oplus V'_2 = \varphi^{m-2}(V'_m) \oplus \varphi^{m-3}(V'_{m-1}) \oplus \dots \oplus \varphi(V'_3) \oplus V'_2$$

$$V_1 = \varphi(V_2) = \varphi^{m-1}(V_m) \oplus \varphi^{m-2}(V'_{m-1}) \oplus \dots \oplus \varphi(V'_2) \qquad \bigcup_{i=1}^{m-1} \varphi^i(\mathcal{V}'_{i+1})$$

$$V_1 = \ker\varphi$$

In questo modo abbiamo dimostrato il T. di struttura degli endomorfismi nilpotenti

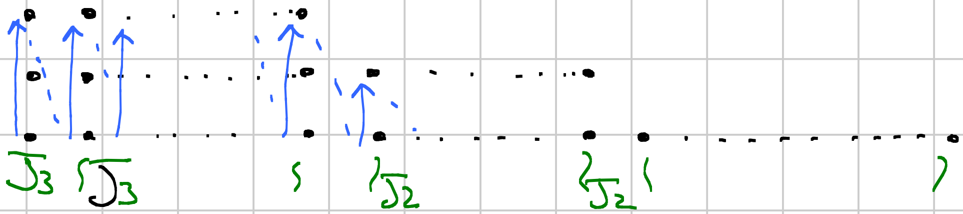
Esempio se $m = 3$ $\qquad \varphi^3 = 0$

$$V = \ker\varphi^3 \quad \left\{ \begin{array}{ll} V_3 & \{v_{3,1}, \dots, v_{3,s_3}\} = \mathcal{V}_3' \\ \oplus & \\ V_2 & \{\varphi(v_{3,1}), \dots, \varphi(v_{3,s_3}), v_{2,1}, \dots, v_{2,s_2}\} = \varphi(\mathcal{V}_3') \cup \mathcal{V}_2' \\ \oplus & \\ \ker\varphi = V_1 & \underbrace{\varphi^2(v_{3,1}) \quad \varphi^2(v_{3,s_3})}_{\varphi^2(\mathcal{V}_3')}, \cup \underbrace{\varphi(v_{2,1}), \dots \varphi(v_{2,s_2})}_{\varphi(\mathcal{V}_2')}, \cup \underbrace{v_{1,1}, \dots v_{1,s_1}}_{\mathcal{V}_1'} \end{array} \right.$$

$V_2 \oplus V_1 = \ker\varphi^2$

$s_3 = \dim V_3$

da sx a dx
dal basso
in alto



$\mathcal{B} : \{\varphi^2(v_{3,1}), \varphi(v_{3,1}), v_{3,1}, \varphi^2(v_{3,2}), \varphi(v_{3,2}), v_{3,2} \dots v_{3,s_3}, \varphi(v_{2,1}), v_{2,1}, \varphi(v_{2,2}), v_{2,2}, \dots v_{1,1}, v_{1,2}, \dots v_{1,s_1}$

$$\alpha_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 \end{matrix} & & & \\ \vdots & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ \vdots & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix}} & & & \\ 0 \; 0 \; 0 & 0 \; 0 & \ddots & & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix}} & \\ \vdots & & & & \boxed{0} \; \boxed{0} \; \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Esempio di ieri $\varphi = f_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A^2 = 0$

$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} \varphi^2$ $m = 2$ $m_A(x) = x^2$ $p_A(x) = x^3$

$\operatorname{Ker} \varphi^2 = V_2 \oplus \operatorname{Ker} \varphi = V_2 \oplus V_1$ $\operatorname{Ker} \varphi = \langle e_1 - e_3, e_2 \rangle$

$V_2 = \langle e_3 \rangle$ $v_{2,1} = e_3$, $s_2 = 1$ V_2 è un suo complementare: lo scelgo

Ad es $V_2 = \langle e_3 \rangle$

$\underset{\operatorname{Ker}\varphi}{\overset{\shortparallel}{V_1}} = \langle \varphi(e_3), e_2 \rangle$ $v_{1,1} = e_2$ $s_1 = 1$ $\varphi(e_3) = -2e_1 + 2e_2 + 2e_3$

↑ scelgo ad es.

$s_2 = \#$ blocchi J_2

$s_1 = \#$ blocchi J_1

$v_{2,1}$

$\varphi(v_{2,1})$ $v_{1,1}$

$\rightsquigarrow$ A è simile a $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & 0 \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{0} \end{pmatrix}$ ← visto ieri

Esempio di ieri: $\varphi = f_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $x \longmapsto Ax$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^3 = 0$

$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} \varphi^3 = V_3 \oplus \operatorname{Ker} \varphi^2 = V_3 \oplus V_2 \oplus \operatorname{Ker} \varphi$

$\operatorname{Ker} \varphi = \langle e_1 - e_3 \rangle$

$\subsetneq$

$\operatorname{Ker} \varphi^2 = \langle e_1 - e_3, e_2 \rangle$

$V_3 = \langle e_1 \rangle$ $\varphi(e_1) = e_2 = Ae_1$

V_2 è un complementare di $\operatorname{Ker} \varphi$ in $\operatorname{Ker} \varphi^2$ e deve contenere $\varphi(e_1)$

$V_2 = \langle e_2 \rangle \oplus \underset{=0}{V_2'}$ compl. di $\underset{\langle e_1 - e_3 \rangle}{\overset{\shortparallel}{\operatorname{Ker} \varphi}}$ in $\operatorname{Ker} \varphi^2$

$\langle e_2 \rangle = \varphi(V_3)$

$V_1 = \operatorname{Ker} \varphi$ e deve contenere $\varphi^2(V_3) = \langle \underset{\varphi(e_2)}{e_1 - e_3} \rangle$

$v_{3,1} = e_1$ $s_3 = 1$

$\varphi(v_{3,1}) = e_2$ $s_2 = 0$

$\varphi^2(v_{3,1}) = e_1 - e_3$ $s_1 = 0$

A è simile a $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Esempi forme canoniche possibili di matrici nilpotenti $A \in M_n(K)$

$n=2$ $\quad A = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$

Caso 1)

$K^2 = \operatorname{Ker}\varphi \implies A = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 \\ 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{pol. minimo è } x}$

$m = 1$, $V_1 = \operatorname{Ker}\varphi$

Caso 2)

$\boxed{\text{pol. minimo è } x^2}$

A è simile a $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$n = 3$

$A \in M_3(K)$

$\varphi = f_A$

Caso 1)

$m_A(x) = x$

$K^3 = \operatorname{Ker}(f_A)$, φ

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Caso 2)

$m_A(x) = x^2$

A è simile a

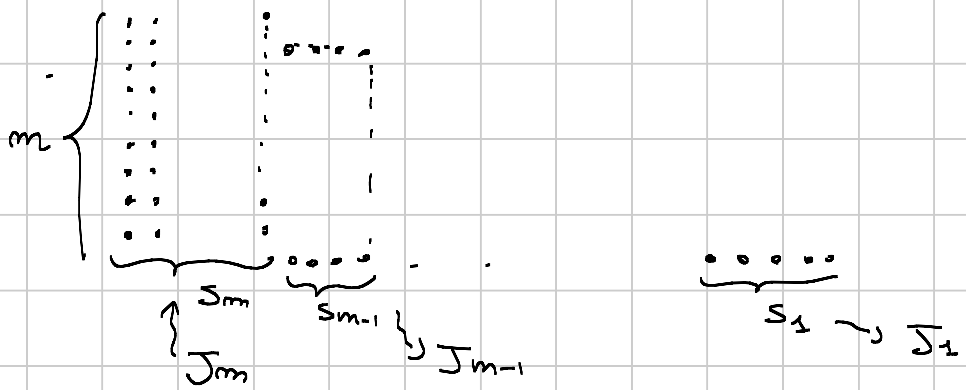
$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & 0 \\ & 0 \\ 0 \quad 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$

Caso 3)

$m_A(x) = x^3$

A simile a J_3

Caso $A = M_4(K)$?



v_m

$\varphi(v_m) \cup v'_{m-1}$

$\varphi^2(v_m) \cup \varphi(v'_{m-1}) \cup v'_{m-2}$

$\vdots$

$\varphi^{m-1}(v_m) \cup \varphi^{m-2}(v'_{m-1})$

— si scelgono

h_r = # puntini sulla riga r-esima

$n = \dim V = \#$ puntini

$\operatorname{Ker}\varphi^m = \sum_{i=1}^{m} i\, s_i$

Come descrivere le classi di similitudine delle matrici nilpotenti?

$i \geq 1$ $\quad \boxed{h_i} := \dim V_i$

$\boxed{n_i} = \dim \operatorname{Ker} \varphi^i = h_1 + \dots + h_i$

$h_i = n_i - n_{i-1} \quad$ se $i > 1$

$\boxed{s_i} := h_i - h_{i+1} = \dim V_i'$

V_m

$V_{m-1} = \varphi(V_m) \oplus V_{m-1}'$

$V_{m-2} = \varphi(V_{m-1}) \oplus V_{m-2}'$

$\vdots$

$\operatorname{Ker}\varphi^{m-1}$

$\operatorname{Ker}\varphi = V_1$

Il tipo di nilpotenza di una matrice $n \times n$ è una n-upla in

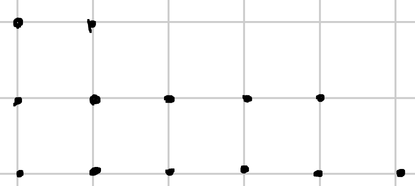
$$S(m) = \left\{ (s_1, s_2, \dots, s_m) \in \mathbb{N}^m \quad \text{con} \quad n = \sum_{i=1}^{m} i\, s_i \right\}$$

costruita ponendo $s_i := \dim V_i'$

$h_i = \#$ punti sulla riga di V_i

$n_i = \#$ punti sulla riga di V_i e sotto

$s_i = \#$ punti che la riga di V_i ha in più rispetto a quella sopra



$h_3 = 2 \qquad n_3 = 13 \qquad s_3 = 2$

$h_2 = 5 \qquad n_2 = 11 \qquad s_2 = 3$

$h_1 = 6 \qquad n_1 = 6 \qquad s_1 = 1$

s_i dice quanti blocchi J_i ci sono nella forma di Jordan.

Ora posso classificare le matrici nilpotenti:

Due matrici nilpot. dello stesso ordine sono simili $\Leftrightarrow$ hanno lo stesso tipo di nilpotenza.

Se A ha tipo di nilpot. $(s_1, s_2, \dots, s_m)$ vuol dire che è simile a una matrice con s_1 blocchi J_1, s_2 blocchi J_2 . . . . . s_n blocchi J_n

$H =$ 

Dunque se A e B hanno lo stesso tipo di nilp. $\Rightarrow$ sono simili alla stessa matrice H e dunque simili.

Perché è vero il viceversa?

Suppongo che A e B nilp. siano simili tra loro.

Rappresentano lo stesso endom. nilp. $\varphi: K^n \longrightarrow K^n$ rispetto a basi diverse. Ma le dimens. di V_m, V_i' dipendono solo da $\dim \operatorname{Ker} \varphi^i$ e dunque gli n_i, s_i, l_i sono gli stessi per A e B $\Rightarrow$ hanno lo stesso tipo di nilp.

A e B nilp. sono simili $\Leftrightarrow$ hanno gli stessi blocchi di Jordan nello stesso numero.

---

§ Teorema di Jordan.

Sia $\varphi: V \longrightarrow V$ triangolarizzabile. $P_\varphi(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{m_i}$

Esiste base risp. alla quale $\alpha(\varphi)$: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & * \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_2 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$

e per il lemma di decomp $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_1 \end{matrix}} & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & * \\ 0 & \lambda_2 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & & \ddots \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_r & * \\ 0 & \lambda_r \end{matrix}} \end{pmatrix}$

$V = \bigoplus \underbrace{\operatorname{Ker} (\overbrace{\varphi - \lambda_i \, id}^{\psi_i})^{m_i}}_{W_i}$ $\quad W_i = \operatorname{Ker} \psi_i^{m_i}$ $\quad W_i$ φ-stabili

posso ridurmi a studiare il caso in cui $V = W_i$ per trovare forme canoniche

$V = \operatorname{Ker} (\varphi - \lambda \, id)^m$ $\quad \psi = \varphi - \lambda \, id$

risp. a una base $\mathcal{V}$ $\quad \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\varphi) = A = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \mathbb{1}_n + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}}_{N}$

N nilpotente

$\psi = \varphi - \lambda \, id$ ha come matrice risp. a $\mathcal{V}$, N

So che esiste una matrice P t.c. $P^{-1}NP =$ (sia a blocchi nilp. standard sulla diag)

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} J_1 & & & & \\ & J_1 & & & \\ & & \ddots\, J_2 & & \\ & & & \ddots\, J_2 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = P^{-1}(\lambda \mathbb{1} + N)P = P^{-1}(\underbrace{\lambda\mathbb{1}}_{\text{scalare}})P + P^{-1}NP$$

$$= \lambda \mathbb{1}_n + P^{-1}NP = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & & & & \\ & J_1(\lambda) & & & \\ & & \ddots\, J_2(\lambda) & & \\ & & & \ddots\, J_2(\lambda) & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$J_1(\lambda) = (\lambda), \quad J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \dots \quad J_4(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$J_r(\lambda) = \lambda \mathbb{1}_r + J_r$$

Dunque ogni matrice triangolarizz è simile a una matrice B che ha blocchi di Jordan $J_r(\lambda_i)$ sulla diagonale al variare di λ_i fra gli autovalori di B e di r opportuni.
Come nel caso nilpotente gli autovalori e il numero di blocchi $J_r(\lambda_i)$ determinano la classe di similitudine.

Esercizio: Trovare una base Jordanizzante

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{se possibile} \qquad (x+1)^3$$

$$p_A(x) = - \begin{vmatrix} -2-x & 1 & 1 \\ -2 & 1-x & 2 \\ 1 & -1 & -2-x \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2-x & -1-x & 1 \\ -2 & -1-x & 2 \\ 1 & 0 & -2-x \end{vmatrix} = (x+1) \begin{vmatrix} -2-x & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2-x \end{vmatrix}$$

$$= (x+1)\left[1 - (2+x)(-\cancel{2}-x+\cancel{2})\right] = (x+1)(1+2x+x^2) = (x+1)^3 = p_A(x)$$

A ha unico autovalore $\lambda = -1$? $\cancel{\begin{pmatrix} \boxed{-1} & & \\ & \boxed{-1} & \\ & & \boxed{-1} \end{pmatrix}}$, $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{-1} \end{pmatrix}$ 2 possib.

$A \rightsquigarrow \varphi \qquad \varphi + id = \psi$ nilpotente $\psi^3 = 0$

$$\ker(A + \mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \ker(1\ {-1}\ {-1}) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$\ker(A + \mathbb{1})^2 = \mathbb{R}^3 \qquad \psi^2 = 0 \qquad$ pol. minimo di A è $m_A(x) = (x+1)^2$

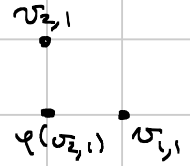
A no diagonalizz. perché nullità di -1 è 2.

$$\ker(A+\mathbb{1})^2 = \mathbb{R}^3 = V_2 \oplus \ker(A+\mathbb{1})$$ ad esempio $V_2 = \langle e_1 \rangle$, $e_1 = v_{2,1}$

$$\ker(A+\mathbb{1}) = V_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(A+\mathbb{1})(e_1) = \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \in V_1$$

$$V_1 = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}}_{=\varphi(v_{2,1})}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}_{=v_{1,1}} \right\rangle$$



$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\}$$

$$\alpha(id)_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}(A+\mathbb{1})P = \begin{pmatrix} J_2 & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\ 0\ 0 & J_1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_2(-1) & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\ 0\ 0 & J_1(-1) \end{pmatrix}$$

le colonne di P sono formate da "autovettori generalizzati"

Esercizio $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Determinare tipo di nilpotenza e jordanizzare.