Geometria 1 - mod. A - Lezione 35

Note Title

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad p_A(x) = \det(x\mathbb{1}_3 - A)$$

$$-p_A(x) = \det(A - x\mathbb{1}_3) = \begin{vmatrix} 4-x & 1 & 1 \\ -3 & -x & -1 \\ -3 & -1 & -x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{II}_c - \mathrm{III}_c}{=} \begin{vmatrix} 4-x & 0 & 1 \\ -3 & -x+1 & -1 \\ -3 & -1+x & -x \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} 4-x & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -x \end{vmatrix} \overset{\mathrm{II}_r + \mathrm{III}_r}{=} (x-1) \begin{vmatrix} 4-x & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -x \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)(-1)\begin{vmatrix} 4-x & 1 \\ -6 & -1-x \end{vmatrix} = -(x-1)\big(\underbrace{-4-4x+x+x^2+6}_{x^2-3x+2=(x-1)(x-2)}\big)$$

$$= -(x-1)^2(x-2) \implies p_A(x) = (x-1)^2(x-2)$$

Autovalori $1, 2$

$$M(2) = 1 = N(2)$$
$$M(1) = 2 \geq N(1) = 2$$
$\Rightarrow$ A diagonalizzabile

$$V_1(A) = \mathrm{Ker}(A - 1\cdot\mathbb{1}_3) = \mathrm{Ker}\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{rango } 1} \implies \dim V_1(A) = 3-1 = 2 = N(1)$$

autospazio relativo a $\lambda = 1$

: Soluzioni $(3, 1, 1 \mid 0)$ (pivot: 3)

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 = \tfrac{1}{3}(-x_2 - x_3) \qquad x_2 = a \qquad x_3 = b \qquad \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

vi sono metodi più veloci!

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \right\rangle \qquad v_2 = \frac{2^\circ - 1^\circ}{3}$$

v_1, v_2 sono autovettori relativi a $\lambda = 1$

$$V_2(A) = \mathrm{Ker}(A - 2\mathbb{1}_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

deve avere rg 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{2}\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\sim}} \begin{pmatrix} \cancel{2}\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}+3\mathrm{I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ha rango 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a \\ x_2 = a \\ x_3 = a \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_1 = -a \\ x_2 = a \\ x_3 = a \end{array}$$

$$V_2(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Verificare che $Av_3 = 2v_3$ $\quad Av_1 = v_1$ $\quad Av_2 = v_2$

$A \rightsquigarrow f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$ $\qquad \alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f_A) = A$ $\qquad \mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$

$\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ $\qquad \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(f_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = B$

una matrice diagonalizzante

$H^{-1} A H = B$ $\qquad H = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{E}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

[se voglio verificare: $H\, H^{-1} A H = HB \iff AH = HB$]

(NB) •) Scelte diverse delle basi di V_1 e V_2 danno H diverse

•) Se cambio ordini autovettori ottengo ancora una matrice diagonale con i termini sulla diagonale permutati

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ sono simili

Se A è diagonalizzabile la sua classe di similitudine è individuata dagli autovalori e loro molteplicità

Osservo $\quad p_A(x) = (x-1)^2(x-2) = (x^2-2x+1)(x-2)$

$$= x^3 \boxed{-4} x^2 + \underbrace{5x - 2}_{(-1)^{n=3}\det A}$$

$-\operatorname{Tr} A = -\sum a_{ii} = -\operatorname{Tr} B$

$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} = 2$

Dal fatto che $-2 \neq 0 \implies \det A \neq 0 \implies A$ è invertibile

A invertibile, A^{-1} la calcolo

- Gauss
- $AA^c = \det(A) \cdot \mathbb{1}_n$, $\quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^c$
- 3° metodo HC

$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = p_A(x)$ $\qquad p_A(A) = \mathbb{O} = A^3 - 4A^2 + 5A - 2\mathbb{1}_3$

$A^3 - 4A^2 + 5A = 2\mathbb{1}_3$ $\qquad A\underbrace{\overbrace{(A^2 - 4A + 5\mathbb{1}_3)}^{A^{-1}}}_{2} = \underbrace{2\mathbb{1}_3}_{2}$

quindi in generale se $x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + \underset{\neq 0}{a_0} = p_A(x)$

$$x(x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1) = -a_0$$

$$A \underbrace{\left(\frac{A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \dots + a_1 \mathbb{1}_n}{-a_0} \right)}_{= A^{-1}} = \mathbb{1}_n$$

Ricordo il lemma di decomposizione (nel caso del $p_\varphi(x)$)

$\varphi : V \longrightarrow V$ endomorf $\dim_K V = n$

$p_\varphi(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - d_i)^{m_i}$ se φ è triangolarizzabile con $d_i \in K$ distinti e $\sum m_i = n$

$$0 = p_\varphi(\varphi) = \prod_{i=1}^{r} (\varphi - d_i\, id_V)^{m_i} \Rightarrow V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_r$$

con $V_i = \operatorname{Ker}(\varphi - d_i\, id_V)^{m_i}$ con detti autospazi generalizzati

e inoltre so che $\varphi_{|V_i} : V_i \longrightarrow V_i$ cioè V_i sono φ-stab.

$$\begin{array}{ccccccccc}
V & = & V_1 & \oplus & V_2 & \oplus & \dots & \oplus & V_r \\
\downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_{|V_1} = \varphi_1 & & \downarrow \varphi_{|V_2} = \varphi_2 & & & & \downarrow \varphi_r \\
V & = & V_1 & \oplus & V_2 & \oplus & \dots & \oplus & V_r
\end{array}$$

Dunque se scelgo base di V formata unendo basi $\mathcal{V}_i$ dei V_i

$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \dots \cup \mathcal{V}_r$

$$\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} & \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & & \boxed{A_r} \end{pmatrix} = B \text{ — è simile a } A = \alpha_{\mathcal{V}'\mathcal{V}'}(\varphi)$$

$$0 = p_\varphi(B) = p_\varphi(A) \qquad p_\varphi(x) = \underbrace{p_{\varphi_{|V_1}}(x)}_{(x-d_1)^{m_1} = p_{A_1}(x)} \cdot \underbrace{p_{\varphi_{|V_2}}(x)}_{(x-d_2)^{m_2} = p_{A_2}(x)} \cdots$$

Le matrici sulla diagonale hanno come pol. caratt. i fattori $(x - d_i)^{m_i}$ di $p_\varphi(x)$

Per capire come sono le matrici "canoniche" della classe di similitudine di B, mi basta lavorare con ciascun A_i e dunque posso supporre che $p_\varphi(x) = (x-\lambda)^n$

Osservo Se $A \in M_n(K)$ diagonalizzabile.

Se so che $m_A(x) = (x-3)(x-5)$ $\quad p_A(x) = (x-3)^r(x-5)^s$

so che A è simile $\begin{pmatrix} \overbrace{3 \ddots 3}^{r} & \\ & \overbrace{5 \ddots 5}^{s} \end{pmatrix}$ $\quad r+s=n$

$p_A(A) = \mathbb{0} = (A-3\mathbb{1}_n)^r (A-5\mathbb{1}_n)^s$

sono non nulle

se A è già diagonale $(A-3\mathbb{1}) = \begin{pmatrix} 0 \ddots 0 & \\ & 2 \ddots 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0\mathbb{1}_r} & 0 \\ 0 & \boxed{2\mathbb{1}_s} \end{pmatrix}$

$(A-5\mathbb{1}) = \begin{pmatrix} -2 \ddots -2 & \\ & 0 \ddots 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0\mathbb{1}_s \end{pmatrix}$

Nel caso $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \left.\begin{matrix} p_A(x) = (x-3)^2(x-5) \\ \text{è diagonalizzabile} \end{matrix}\right\}$ esercizio

$m_A(x) = (x-3)(x-5)$ II crit.

$\left.\begin{matrix} (A-3\mathbb{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ (A-5\mathbb{1}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}\right\}$ e si verifica che il prodotto è $\mathbb{0}$

(Dunque ho prodotto di due matrici non nulle che è $\mathbb{0}$)

§ Teoria di Jordan.

$J_1 = (0)$ $\quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ matrici nilpotenti standard.

$p_{J_i}(x)$: $\quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4$

Quindi H.C. dice che: $(J_n)^n = \mathbb{0}$ $\longleftarrow$ matrici A t.c. $A^m = \mathbb{0}$ $(\exists m)$ si dicono nilpotenti

Dunque J_n è nilpotente per ogni n

(non vale il viceversa!) $\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è nilpotente ma non è del tipo J_n

Le matrici J_n con $n \geq 2$ non sono diagonalizzabili

$P_{J_n}(x) = x^n$ $\quad \lambda = 0$ unico autovettore $\quad M(0) = n$

$$N(0) = \dim V_0 = \dim \ker(J_n) = n - \operatorname{rk} J_n \overset{!}{=} n-(n-1) = 1$$

$N(0) = 1 < n = M(0) \implies J_n$ non è diagonalizzabile.

Sia $\underset{f_{J_n}}{\overset{\shortparallel}{\varphi}} : \begin{array}{ccc} K^n & \longrightarrow & K^n \\ x & \longmapsto & J_n x \end{array}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \varphi & & \varphi & & \varphi & \\
e_1 & \longmapsto & 0 & \longmapsto & 0 & \longmapsto & 0 \\
e_2 & \longmapsto & e_1 & \longmapsto & 0 & \longmapsto & 0 \\
e_3 & \longmapsto & e_2 & \longmapsto & e_1 & \longmapsto & 0 \\
\vdots & & & & & & \\
e_n & \longmapsto & e_{n-1} & \longmapsto & e_{n-2} & \longmapsto & e_{n-3}
\end{array}$$

~

Vogliamo capire come utilizzarle per classificare gli endomorf. triangolarizzabili.

$\varphi : \underset{\oplus V_i}{\overset{\shortparallel}{V}} \longrightarrow V$ triang. $\quad P_\varphi(x) = \prod (x-\lambda_i)^{m_i} \quad \sum m_i = n$

$$V_i = \ker(\varphi - \lambda_i id)^{m_i}$$

$\varphi_i := \varphi_{|V_i}$ poiché $V_i = \ker(\varphi - \lambda_i id)^{m_i}$ $\quad (\varphi_i - \lambda_i id_{V_i})^{m_i} = 0$

Dunque $P_{\varphi_i}(x) = (x-\lambda_i)^{m_i}$ unico autovalore λ_i di molteplic. $m_i = \dim V_i$

Se autospazio di autov. λ_i di φ_i ha dim $m_i \implies \varphi_i$ diag

altrimenti ?

$$\underbrace{(\varphi_i - \lambda id)}_{\psi_i \,\leftarrow\, \text{endomorf nilpotente}}{}^{m_i} = 0 \in End(V_i)$$

[Se capisco come classificare gli endom. nilpotenti capisco come classificare gli endom triangolarizzabili.

Tornando alla descrizione in ⊛ per classificare le matrici triangolarizzabili mi basta capire come classificare le matrici A_i (che sono triang con unico autovalore)

Sia d'ora in poi $P_A(x) = (x-\lambda)^n = P_\varphi(x)$

$$H^{-1} A H = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = B \quad \text{esiste } H \text{ invertibile}$$

$$= \lambda \mathbb{1}_n + N \leftarrow \text{nilpotente}$$

NB $(x-\lambda)^n$ si annulla in A e dunque in B, che è simile ad A,

$$(\underbrace{B - \lambda \mathbb{1}_n}_{N})^n = \mathbb{O} \quad \text{ossia } N \text{ è nilpotente}$$

Mi basta dunque classificare le matrici $n \times n$ nilpotenti.

Teorema di struttura degli endomorfismi nilpotenti

a) Una matrice $A \in M_n(K)$ è nilpotente $\Leftrightarrow$ è simile a una matrice a blocchi diagonali formati da matrici nilpotenti standard J_m

b) Un endomorfismo $\varphi \in \text{End}(V)$ è nilpotente $\Leftrightarrow$ esiste una base v di V t.c. $\alpha_{vv}(\varphi)$ sia a blocchi diagonali formati da matrici nilp. standard J_m

Ad es.

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

J_1, J_1, J_2 è nilpotente (non standard)

È evidente $\Leftarrow$ è facile. Infatti se

$$A \text{ è simile a } \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & \\ & \boxed{J_1} & \\ & & \ddots \\ & & & \boxed{J_m} \end{pmatrix} = B \Rightarrow p_A(x) = p_B(x) = \prod p_{J_{\dots}}(x) = x^n$$

$\Rightarrow A^n = \mathbb{O}$ per H. C.

Il viceversa domani.