Geometria 1 - mod. A - Lezione 34

Note Title

Obiettivo di oggi: II criterio di diagonalizzabilità (φ)

<u>Teorema</u> Sia $A \in M_n(K)$ ($\varphi \in End(V)$). Allora A (φ) è diagonalizzabile $\iff$

$$\begin{cases} ① \text{ tutti gli autovalori di } A \ (\varphi) \text{ sono in } K \\ ② \ m_A(x) \ (m_\varphi) = \prod_{i=1}^{s} (x - \lambda_i) \quad \text{con i } \lambda_i \text{ distinti} \end{cases}$$

$\Rightarrow$) banale $\Leftarrow$) <u>Lemma ~~senza~~ di decomposizione</u>

senza < ora / Teoria di Jordan.

$$ev_A : K[x] \longrightarrow M_n(K) \qquad Ker\, ev_A = (m_A(x))$$
$$p(x) \longmapsto p(A)$$

$\uparrow$ pol. min.

H. C. $\quad p_A(x) \in Ker\, ev_A \iff p_A(A) = 0 \in M_n(K)$

e dunque $m_A(x) \mid p_A(x)$

e anzi hanno gli stessi zeri

<u>Ricordo</u>: dati due polinomi $P(x), Q(x) \in K[x]$ sono coprimi

$\iff MCD(P(x), Q(x)) = 1 \iff \exists\ G(x), H(x) \in K[x]$ t.c.

$$G(x)P(x) + H(x)Q(x) = 1$$

(operativamente: $\iff P(x)$ e $Q(x)$ non hanno zeri comuni né in K né in estensioni di K)

<u>Def</u> Sia $\varphi \in End(V)$. Un sottospazio U di V si dice φ-stabile se $\varphi(U) \subseteq U$

<u>Esempio</u> • In $\pi_U^W \qquad V = U \oplus W \qquad U$ è φ-stabile

• $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-3y \\ 3z \end{pmatrix} \qquad \varphi_{|\langle e_1, e_2\rangle} : \langle e_1, e_2\rangle \longrightarrow \langle e_1, e_2\rangle$$

$\langle e_1, e_2 \rangle$ è φ-stabile

(ma $\varphi_{|\langle e_1, e_2\rangle}$ non è l'identità)

• Se $V \xrightarrow{\varphi} V$ è diagonalizzabile detto $\{v_1, \dots v_n\}$ base di autovettori

$V = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_n \rangle$ e ciascuno dei

$\langle v_i \rangle$ è φ - stabile.

$\langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle \oplus \langle v_4 \rangle$ è φ - stabile.

Osservo che se $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_r$

con W_i φ - stabili $(\varphi : V \longrightarrow V)$

e considero una base $\mathcal{B}$ di V ottenuta unendo basi di $W_1, W_2, \dots W_r$

allora:

$\boxed{\text{se } r = 2}$

$$B = \alpha_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} B_1 \; s \times s & 0 \\ \hline 0 & B_2 \; (n-s)\times(n-s) \end{array}\right)$$

$\dim W_1 = s$

$\dim W_2 = n-s$

$\varphi(w_1) \in W_1$ $\quad w_1 \in W_1$

$\mathcal{B} = \{\underbrace{w_1, \dots, w_s}_{\in W_1}, \underbrace{w_{s+1} \dots w_n}_{\in W_2}\}$

NB $\quad P_B(x) = P_{B_1}(x)\, P_{B_2}(x)$

$$\det(x\mathbb{1}_n - B) = \det \left(\begin{array}{c|c} x\mathbb{1}_s - B_1 & 0 \\ \hline 0 & x\mathbb{1}_{n-s} - B_2 \end{array}\right)$$

$$= \underbrace{\det(x\mathbb{1}_s - B_1)}_{P_{B_1}(x)} \cdot \underbrace{\det(x\mathbb{1}_{n-s} - B_2)}_{P_{B_2}(x)}$$

- Più in generale: se ($r > 2$) $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$ con W_i φ-stab

  detto $\varphi_i = \varphi_{|W_i} : W_i \longrightarrow W_i$

$$P_\varphi(x) = P_{\varphi_1}(x) \cdot P_{\varphi_2}(x) \cdots P_{\varphi_r}(x).$$

Simile a sopra per quanto riguarda le matrici a blocchi.

Oss $\quad ev_A : K[x] \longrightarrow M_n(K)$ ($\mathrm{End}(V)$) è omom. di anelli

(φ)

$$P(x)Q(x) \longmapsto P(A)Q(A) \quad (P(\varphi)\circ Q(\varphi))$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$Q(x)P(x) \longmapsto Q(A)P(A) \quad (Q(\varphi)\circ P(\varphi))$$

caso particolare in cui prodotto di matrici commuta

Lemma di decomposizione

Sia $\varphi \in End(V)$ e sia $F \in K[x]$ t.c. $F(\varphi) = 0 \in End(V)$

Supponiamo $F = F_1 \cdots F_r$ in $K[x]$ con F_i non costanti e a 2 a 2 coprimi.

Detti $V_i := \ker F_i(\varphi) \leq V$ si ha

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$ e inoltre i V_i sono φ-stabili.

Esempio motivante: se $F = p_\varphi(x)$ e $F = \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{M_i}$ con λ_i a 2 a 2 distinti

Allora $V = \underbrace{\ker(\varphi - \lambda_1 id)^{M_1}} \oplus \ker(\varphi - \lambda_2 id)^{M_2} \oplus \cdots \oplus \ker(\varphi - \lambda_r id)^{M_r}$

Dimostrazione (Per induzione)

$r = 1$ $\quad F = F_1$ so che $F(\varphi) = 0 \in End(V)$

dunque $\ker F_1(\varphi) = \ker 0 = V$ ok

$r = 2$ $\quad F = F_1 F_2$ con F_1, F_2 coprimi

$\circledast$ $\boxed{1 = G_1 F_1 + G_2 F_2}$ esistono $G_1, G_2 \in K[x]$

dobbiamo vedere che detti: $V_i = \ker F_i(\varphi)$

$V_1 \oplus V_2 = V$ $\begin{cases} V_1 \cap V_2 = 0 \\ V_1 + V_2 = V \end{cases}$

Da $\circledast$ $\quad id_V = G_1(\varphi) F_1(\varphi) + G_2(\varphi) F_2(\varphi)$

Sia $v \in V_1 \cap V_2$

$$v = (G_1(\varphi) \circ F_1(\varphi))(v) + (G_2(\varphi) \circ F_2(\varphi))(v)$$
$$= G_1(\varphi)\big(\underbrace{F_1(\varphi)(v)}_{=0}\big) + G_2(\varphi)\big(\underbrace{F_2(\varphi)(v)}_{=0}\big) = 0_V$$

Dunque $V_1 \cap V_2 = 0$

Ora mostro che $V_1 + V_2 = V$

Sia $v \in V \Rightarrow v = \underbrace{(G_1(\varphi) \circ F_1(\varphi))(v)}_{= v_2} + \underbrace{(G_2(\varphi) \circ F_2(\varphi))(v)}_{= v_1}$

Verifico che $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$

$$F_1(\varphi)(v_1) = F_1(\varphi)\Big(\big(G_2(\varphi)\circ F_2(\varphi)\big)(v)\Big) =$$

$$= \big(F_1(\varphi)\circ G_2(\varphi)\circ F_2(\varphi)\big)(v) = \big(G_2(\varphi)\circ \underbrace{F_1(\varphi)\circ F_2(\varphi)}_{F(\varphi)}\big)(v)$$

$$= G_2(\varphi)\big(\underbrace{F(\varphi)(v)}_{\overset{\shortparallel}{0}}\big) = 0 \quad \Rightarrow v_1 \in \operatorname{Ker} F_1(\varphi) = V_1$$

analogo per $v_2 \in V_2$.

NB i V_i sono φ stabili:

$V_1 = \operatorname{Ker} F_1(\varphi)$ $\quad v_1 \in V_1 \quad \varphi(v_1) \overset{?}{\in} V_1$

i analogo

$$F_1(\varphi)(\varphi(v_1)) = \big(F_1(\varphi)\circ \underset{x(\varphi)}{\varphi}\big)(v_1) = \varphi\circ F_1(\varphi)(v_1) =$$
$$= \varphi\big(F_1(\varphi)(v_1)\big) = \varphi(0) = 0$$

Suppongo $r > 2$ e sia vero per $r-1$

$F = \underbrace{F_1 \cdots F_{r-1}}_{\tilde{F}_1} \cdot F_r$ $\quad$ con F_i a 2 a 2 coprimi

$F(\varphi) = 0$

noto che $\tilde{F}_1$ e F_r sono coprimi

$$V = \operatorname{Ker} \tilde{F}_1(\varphi) \oplus \operatorname{Ker} F_r(\varphi)$$

Essendo $\underbrace{\operatorname{Ker} \tilde{F}_1(\varphi)}_{=:\tilde{V}}$ φ-stabile $\quad \varphi_{|\tilde{V}} : \tilde{V} \longrightarrow \tilde{V}$

e $\tilde{F}_1(\varphi_{|\tilde{V}}) = 0$

Dunque per induzione ho che

$V = (V_1 \oplus \dots \oplus V_{r-1}) \oplus V_r$ $\quad$ con $V_i = \operatorname{Ker} F_i(\varphi_{|\tilde{V}}) = \operatorname{Ker} F_i(\varphi)$

$i < r$.

$\boxtimes$

Dimostrazione del 2° criterio

$\Rightarrow$) banale. Infatti se A è diagonalizzabile $\Rightarrow$ ①

vale per il 1° criterio.

Inoltre $m_A(x) = m_D(x)$ $\quad$ con $D = P^{-1}AP$ diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 1\!\!1_{r_1}} & & & \\ & \boxed{\lambda_2 1\!\!1_{r_2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\lambda_s 1\!\!1_{r_s}} \end{pmatrix}$$

r_1 molt. alg. di λ_1 $\Big\}$ = nullità di λ_1

$\vdots$

r_s . . . . λ_s $\Big\}$ λ_i distinti

$$\prod_{i=1}^{s} (x-\lambda_i)(D) = \prod_{i=1}^{s} (D - \lambda_i 1\!\!1_n)$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & & \\ & \boxed{(\lambda_2-\lambda_1)1\!\!1} & \\ & & \ddots \ \boxed{} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{(\lambda_1-\lambda_2)1\!\!1_{r_1}} & & \\ & \boxed{0} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \cdots$$

$$= 0 \implies \prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i) \text{ è } m_D(x) = m_A(x)$$

$(\Leftarrow)$ Suppongo $p_A(x) = \prod_{i=1}^{s} (x-\lambda_i)^{m_i}$ $\quad m_i = M(\lambda_i)$

$m_A(x) = \prod_{i=1}^{s} (x-\lambda_i)$ con λ_i distinti

in particolare $(x-\lambda_i)$ sono a 2 a 2 coprimi

$m_A(A) = 0$

Grazie al lemma di decomposizione con $F = m_A(x)$, $F_i = x - \lambda_i$ $\quad \varphi = f_A \quad \overset{m_\varphi(x)}{\shortparallel}$

$$K^n = \underbrace{\ker(\overset{\varphi - \lambda_1 id}{A - \lambda_1 1\!\!1})}_{V_{\lambda_1}(\varphi) = V_{\lambda_1}(A)} \oplus \underbrace{\ker(A - \lambda_2 1\!\!1)}_{V_{\lambda_2}(A) = V_{\lambda_2}(\varphi)} \oplus \cdots \oplus \ker(A - \lambda_s 1\!\!1)$$

$\implies K^n$ ha base formata da autovettori $\implies$ è diagonalizz.

Esempi

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ $\quad p_A(x)$ ha grado 2

$p_A(x) = (x-\lambda)^2$ $<$
- $m_A(x) = (x-\lambda) \implies A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ è simile solo a se
- $m_A(x) = (x-\lambda)^2$ ad es. $\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $b \neq 0$

$p_A(x) = (x-\lambda)^1(x-\mu)^1$ $\quad \lambda \neq \mu$

$\overset{\downarrow}{=} m_A(x)$ $\quad \leadsto A$ è simile $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

NB $m_A(x)$ deve avere tutti gli zeri di $p_A(x)$ con molt. $\leq M(\lambda)$

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$$p_A(x) = (x-\lambda)^2 \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} m_A(x) = x-\lambda & \text{è diag.} \\ m_A(x) = (x-\lambda)^2 & \text{no} \end{cases}$$

$$p_A(x) = (x-\lambda)(x-\mu) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \to \text{diagonalizzabile!}$$

$$p_A(x) = \underbrace{(x-\lambda)(x-\bar{\lambda})}_{\text{polin. con } \Delta<0} \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

sicuramente non diagon. in $\mathbb{R}$

NB Se A ha tutti autovalori distinti e in $\mathbb{K}$

$\Rightarrow$ A è diagonalizzabile! (tutti autospazi hanno dim 1)

$\left(M(\lambda) = 1 = N(\lambda) \quad \forall \lambda \text{ autovalore} \right)$

Ricevimento 29/12 ore 16 via Zoom