Lezione 26. Dualità e ortogonalità.

Note Title

$V \qquad \underset{\overset{\cup}{v^*}}{V^*} = \text{Hom}_K(V, K) \ni$ forme

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

$\mathcal{B}^* = \{v_1^* \dots v_n^*\}$ base di V^*

$v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$

$\{v_1 \dots v_n\} = \mathcal{V}$ base di V

$\{w_1 \dots w_m\} = \mathcal{W}$ .... W

$$\begin{tikzcd}
\varphi \arrow[d, mapsto] & \text{Hom}_K(V, W) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(-)"] \arrow[d, "(\ )^*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M_{m,n}(K) \arrow[d, "(\ )^t", "\wr"'] \\
\varphi^* & \text{Hom}_K(W^*, V^*) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{W}^*\mathcal{V}^*}(-)"'] & M_{nm}(K)
\end{tikzcd}$$

$\{v_1^* \dots v_n^*\} = \mathcal{V}^*$ base di V

$\{w_1^* \dots w_m^*\} = \mathcal{W}^*$ ... W

Per dimostrare che $(\ )^t \circ \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}} = \alpha_{\mathcal{W}^*\mathcal{V}^*} \circ (\ )^* : \text{Hom}_K(V, W) \longrightarrow M_{n,m}(K)$ basta verificare che coincidono su una base di $\text{Hom}(V, W)$

Considero la base $\varphi_{ji} : V \longrightarrow W$

$v_i \longmapsto w_j$

$v_\ell \longmapsto 0$ se $\ell \neq i$

$\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(\varphi_{ji}) = E_{ji}$ → matrice tutti 0 tranne nel posto ji

$\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(\varphi_{ji})^t = E_{ij}$ . . . . ij

$\varphi_{ji}^* : W^* \longrightarrow V^*$

$w_\ell^* \longmapsto \underbrace{w_\ell^* \circ \varphi_{ji}}_{\shortparallel} : V \longrightarrow K$

$v_i \longmapsto w_\ell^*(w_j) = \delta_{j\ell}$

$\underset{s \neq i}{v_s} \longmapsto w_\ell^*(0) = 0$

$w_j^* \longmapsto v_i^*$

$w_\ell^* \longmapsto 0$ se $\ell \neq j$ $\rightsquigarrow E_{ij}$ matrice associata.

§ bidualità

Sia $\dim_k V = n$ $\qquad V \xrightarrow{\text{isom}} V^*$ $\qquad$ Ma dipende dalla base!

$\mathcal{V} = \{v_1, \dots v_n\}$ è base di V $\qquad v_i \longmapsto v_i^*$ $\qquad$ non è canonico.

Sia $V^{**} = (V^*)^* = \mathrm{Hom}_k(\underbrace{\mathrm{Hom}_k(V, K)}_{V^*}, K)$

$$ev : V \longrightarrow V^{**}$$

$$v \longmapsto ev(v) : \overbrace{\mathrm{Hom}(V, K)}^{V^*} \longrightarrow K$$

$$\underset{v^*}{\underset{\shortparallel}{f}} \longmapsto \underset{v^*(v)}{\underset{\shortparallel}{f(v)}}$$

Da verificare:

a) $ev(v) : V^* \to K$ è lineare ossia è un elemento di $(V^*)^*$ $\qquad \forall\, v \in V$

b) ev è lineare $: V \longrightarrow V^{**}$

c) ev è iniettivo

\+ $\dim V = n = \dim V^* = \dim V^{**}$

ev è isomorfismo!

a) $ev(v) : V^* \longrightarrow K$ è lineare

$ev(v)(v_1^* + v_2^*) = (v_1^* + v_2^*)(v) = v_1^*(v) + v_2^*(v) = ev(v)(v_1^*) + ev(v)(v_2^*)$

$ev(v)(\lambda v_1^*) = (\lambda v_1^*)(v) = \lambda(v_1^*(v)) = \lambda(ev(v)(v_1^*))$

$\lambda \in K$

b) $ev : V \longrightarrow V^{**}$ è lineare

$ev(v_1 + v_2) : V^* \longrightarrow K$

$ev(v_1 + v_2)(v^*) = v^*(v_1 + v_2) = v^*(v_1) + v^*(v_2) = ev(v_1)(v^*) + ev(v_2)(v^*)$

per ogni $v^* \in V^*$ $\Longrightarrow ev(v_1 + v_2) = ev(v_1) + ev(v_2)$

$ev(\lambda v_1) : V^* \longrightarrow K$

$ev(\lambda v_1)(v^*) = v^*(\lambda v_1) = \lambda v^*(v_1) = \lambda\, ev(v_1)(v^*)$ $\qquad \forall\, v^* \in V^*$

$\Rightarrow ev(\lambda v_1) = \lambda ev(v_1)$

c) $\mathrm{Ker}\, ev = \{ v \in V$ t.c. $ev(v) = 0_{V^{**}}$ ossia $ev(v) : V^* \xrightarrow{0} K \}$

$\overset{!}{=} \{ v \in V$ t.c. $v^*(v) = 0 \quad \forall\, v^* \in V^* \} = \{0\}$

$\underset{0}{\underset{\nparallel}{v^*}} : V \longrightarrow K$ $\qquad$ se $v \neq 0_V$ potrei completarlo ad una base

$v \longmapsto 1$ $\qquad v, v_2, \dots v_n$

$v_i \longmapsto 0$

Relazione tra V e V^* come appl. bilineare.

$$\langle\, ,\rangle : V \times \overset{\text{Hom}_K(V,K)}{V^*} \longrightarrow K$$

$$(v\ ,\ v^*) \longmapsto v^*(v) =: \langle v, v^* \rangle$$

(alcuni scrivono $\langle v, v^* \rangle = v \underset{\substack{\uparrow \\ \text{non è la compos.}}}{\circ} v^*$)

NON è lineare !

È bilineare ossia a) $\langle v, \cdot \rangle : V^* \longrightarrow K$ è lineare $\forall\, v \in V$

$$\langle v, \lambda v_1^* + \mu v_2^* \rangle = \lambda \langle v, v_1^* \rangle + \mu \langle v, v_2^* \rangle \quad \forall\, v_1^*, v_2^* \in V^*$$
$\lambda, \mu \in K$

b) $\langle \cdot, v^* \rangle : V \longrightarrow K$ è lineare $\forall\, v^* \in V$

ossia $\langle \lambda v_1 + \mu v_2, v^* \rangle = \lambda \langle v_1, v^* \rangle + \mu \langle v_2, v^* \rangle$

per ogni: $v_1, v_2 \in V$, $\lambda, \mu \in K$

Osservo $\langle v_1 + v_2, v_1^* + v_2^* \rangle = \langle v_1, v_1^* + v_2^* \rangle + \langle v_2, v_1^* + v_2^* \rangle$

$$= \underline{\langle v_1, v_1^* \rangle} + \langle v_1, v_2^* \rangle + \langle v_2, v_1^* \rangle + \underline{\langle v_2, v_2^* \rangle}$$

Dim di a) e b) come esercizio.

Inoltre $\langle\, ,\rangle$ è non degenere:

ossia $\langle v, v^* \rangle = 0 \quad \forall\, v \in V \Rightarrow v^* = 0$ (l' unica forma che è 0 su tutti i vettori è la forma 0)

$\langle v, v^* \rangle = 0 \quad \forall\, v^* \in V \Rightarrow v = 0 \quad \rightarrow \bigcap \operatorname{Ker} v^* = \{0\}$.

(esercizio!)

§ ortogonalità.

$\langle\, ,\rangle : V \times V^* \longrightarrow K$ sopra

$$(\ )^\perp : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V^*)$$

$$W \leq V \longmapsto W^\perp \leq V^*$$

$$\overset{\shortparallel}{\{} v^* \in V^* \text{ t.c. } v^*(w) = 0 \quad \forall\, w \in W \}$$

$$= \{ v^* \in V^* \text{ t.c. } W \leq \operatorname{Ker} v^* \}$$

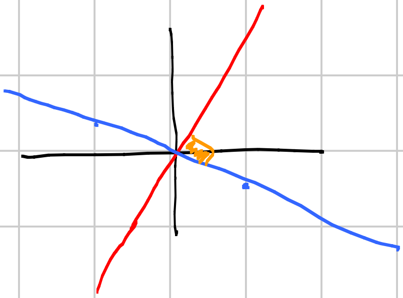
(avrebbe senso definirlo anche per $S \subseteq V$ sottoinsieme

$S^\perp = \langle S \rangle^\perp$)

Esempio $\quad \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^{2*})$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \longmapsto W^\perp = \left\{ v^* : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ t.c. } v^*\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \langle f_A \rangle \qquad A = (2, -1)$$



$$\mathbb{R}^{2*} \overset{\text{isom non canonico}}{\simeq} \mathbb{R}^2$$

$$\langle (2,-1) \rangle \mapsto \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

Analog. $(\ )^\perp : \mathbb{P}(V^*) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$

$$U^* \leq V^* \longmapsto (U^*)^\perp = \{ v \in V \text{ t.c. } \langle v, u^* \rangle = 0 \ \forall u^* \in U^* \}$$

$$= \bigcap \operatorname{Ker} u^*$$

Proprietà

$\dim V = n$

① $W \leq Z \leq V \implies Z^\perp \leq W^\perp \leq V^*$

② $(W^\perp)^\perp = W$

③ $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$

$(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$

Dim ① $v^* \in Z^\perp \implies \operatorname{Ker} v^* \supseteq Z \implies \operatorname{Ker} v^* \supseteq W \implies v^* \in W^\perp$

② $W \subseteq (W^\perp)^\perp$ esercizio

osserva che hanno la stessa dimensione $\implies =$

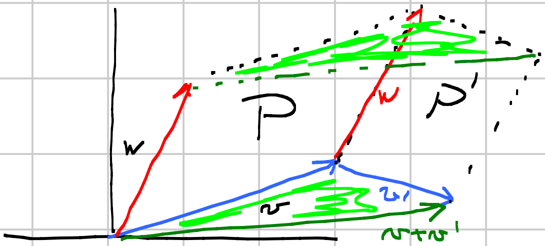
③ Esercizio

Lezione 27. Determinanti.

Note Title

§ Determinanti.

Siano $\underset{v}{\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}}, \underset{w}{\begin{pmatrix} c\\ d\end{pmatrix}}$ vettori in $\mathbb{R}^2$



area di P (con segno) è data da $ad-bc = \det\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix} = A(v,w)$

Proprietà:

A è bilineare
$A:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

- $A(v+v',w) = A(v,w)+A(v',w)$
  $A(v,w+w') = A(v,w)+A(v,w')$
- $A(\lambda v,w) = \lambda A(v,w)$
  $A(v,\lambda w) = \lambda A(v,w)$

"è alternante" ← · $A(v,v)=0$

Analogo

~

Def Siano V, W sp. vettoriali su uno stesso campo K. (di dim finita)

a) Una applicazione $F: \underbrace{V\times\cdots\times V}_{m\text{-volte}} \longrightarrow W$ $(m\geq 1)$

si dice m-multilineare se è lineare in ciascuna componente ossia

per ogni $1\leq i\leq n$ e ogni scelta di $v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n\in V$

$F_i : V \longrightarrow W$

$v \longmapsto F(v_1,\dots v_{i-1},v,v_{i+1},\dots v_n)$ è lineare

(bilineare ≡ 2-multilineare)

b) Una appl. $F: \underbrace{V\times\cdots\times V}_{m\text{-volte}} \longrightarrow W$ $(m\geq 2)$

si dice alternante se $F(v_1,\dots,v_m)=0$ non appena $v_i=v_j$
qualche coppia (i,j) con
per $i\neq j$

NB La a) può essere generalizzata al caso $V_1\times V_2\times\cdots\times V_m\longrightarrow W$

con V_i sp vettoriali su K

~

m-$Alt(V,W) := \{ F : V \times \cdot \times V \longrightarrow W$ m-multilineari alternanti $\}$

se $W = K$ la F si dirà forma m-mult. alternante

$A^m(V) = \{$ forme $F: V \times \dots \times V \longrightarrow K$ m-mult. alternanti $\}$

↑ ha struttura di spazio vettoriale

con $(F+G)(v_1, \dots v_m) = F(v_1 - v_m) \underset{K}{+} G(v_1 - - v_m)$

$(\lambda F)(v_1 - - v_m) = \lambda(F(v_1 \dots v_m))$

Proprietà di $F \in A^m(V)$ Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V

i) $F\left(\sum_{i_1=1}^{m} \lambda_{1i_1} v_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} \lambda_{2i_2} v_{i_2}, \dots\dots, \sum_{i_m=1}^{n} \lambda_{m i_m} v_{i_m}\right)$

$= \sum_{i_1=1}^{m} \lambda_{1i_1} F(v_{i_1}, \sum \dots ; \sum \dots \sum)$

$= \sum_{i_1=1}^{n} \lambda_{1i_1} \left(\sum_{i_2=1}^{n} \lambda_{2i_2} F(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots) \right) \overset{(*)}{=}$

$F: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \longrightarrow F(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3, c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3)$

$\parallel$

$\sum_{i=1}^{3} a_i F(e_i, b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3, \dots)$

$\sum_{i=1}^{3} a_i \sum_{j=1}^{3} b_j F(e_i, e_j, c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3)$

$\sum_{i=1}^{3} a_i \sum_{j=1}^{3} b_j \sum_{\ell=1}^{3} c_\ell \underbrace{F(e_i, e_j, e_\ell)}$

$= 0$ se 2 degli e_i, e_j, e_ℓ sono uguali

?

$(*) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m} c_{i_1 i_2 i_3 \dots i_m} \underbrace{F(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots v_{i_m})}.$

ii) "F cambia segno se scambio 2 entrate" $F \in A^m(V)$

$F(v_1, v_2, \dots v_m) \overset{(*)}{=} -F(v_2, v_1, v_3, \dots v_m)$

Dim $F(v_1 + v_2, v_1 + v_2, v_3, \dots v_m) = 0$

$\parallel$

$F(v_1, v_1 + v_2, v_3 \dots) + F(v_2, v_1 + v_2, v_3, \dots)$

$= \underset{0}{\cancel{F(v_1, v_1, v_3, \dots)}} + F(v_1, v_2, v_3, \dots) + F(v_2, v_1, v_3, \dots) + \underset{0}{\cancel{F(v_2, v_2, v_3, \dots)}}$

$0 = F(v_1, v_2, —) + F(v_2, v_1, —)$ ossia $(*)$ è verificata

$i)$ si generalizza a una $i')$

$F($ comb. lineari arb. , comb. lineari arb, ... $)$

$\sum a_{1i_1} v_{1i_1}$, $\sum a_{2i_2} v_{2i_2}$; . . .

$$\sum_{i_1, i_2, \dots} (\dots) \, F(v_{1i_1}, v_{2i_2}, \dots v_{m,i_m})$$

* * *

§ Permutazioni

$S_n, \mathfrak{S}_n = \{$ biiezioni di $\{1, 2, \dots n\}$ in sé $\}$ $\quad n \geq 1$

è un gruppo rispetto alla composizione $<$ identità $i \mapsto i$; σ^{-1} $\quad i \mapsto \sigma^{-1}(i)$ $\quad \sigma$

non è abeliano se $n > 2$

$\mathfrak{S}_n$ è detto <u>gruppo simmetrico</u>; i suoi elementi sono detti permutazioni

Uno scambio o trasposizione è una permutazione $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$\sigma = (i, j)$ con $i \neq j$ che manda $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$
e lascia invariati gli altri elementi.

Ogni permutazione σ = prodotto di scambi (non in modo unico)
ma con parità costante

$$\mathrm{sgn} : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{\pm 1\}$$
$$\sigma \longmapsto (-1)^{\#\text{scambi nella decomposizione di } \sigma}$$

Ad es. $\mathrm{sgn}(id) = 1$ $\qquad$ $\mathrm{sgn}(\text{scambio}) = -1$

<u>Osservazione</u> Sia $F \in A^n(V)$ $\quad \dim V = n$

$$F : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n} \longrightarrow K$$

$\{v_1, \dots v_n\} = \mathcal{V}$ base di V

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$F(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots v_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \, F(v_1, \dots, v_n)$$

perché ogni volta che scambio 2 entrate cambia segno.

* * *

Sia V sp. vett. su K, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V

$F \in A^n(V)$ $\qquad F : V \times \dots \times V \longrightarrow K$

Mostriamo che F dipende solo da $F(v_1, \dots, v_n)$

$F(w_1, w_2 \dots, w_m)$ $\qquad w_j = a_{ij} v_i$

$$= F\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1} v_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2,2} v_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^{m} a_{i_n,n} v_{i_n}\right) =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1} \cdot a_{i_2,2} \cdots a_{i_n,n} \, F(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}) \quad \textcircled{\star}$$

Ricordo che F è alternante e $v_{i_j} \in \mathcal{V}$

se vi sono ripetizioni di vettori di base $F(v_{i_1}, \dots) = 0$

altrimenti $i_1 = \sigma(1)$, $i_2 = \sigma(2)$, ... $i_n = \sigma(n)$ per una $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$\textcircled{\star} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(a_{\sigma(1),1} \, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \, F(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n)}) \right)$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1),1} \, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \cdot \mathrm{sgn}(\sigma) \right)}_{\in K} F(v_1, v_2, \dots v_n)$$

$d(a_{ij})$ (notazione non standard)

Dunque F è completamente determinata da $F(v_1, v_2, \dots v_n)$

$F \neq 0 \iff F(v_1, v_2, \dots v_n) \in K \setminus \{0\} = K^*$

Questa costruzione

$$\begin{tikzcd} A^n(V) \arrow[r, "\alpha_{\{F\}}"] & K \\ 0 \neq F \arrow[r, mapsto] & 1 \\ G \arrow[r, mapsto] & \dfrac{G(v_1, \dots v_n)}{F(v_1, \dots v_n)} \end{tikzcd}$$

isomorfismo di spazi vettoriali di dim 1

← coord. di G rispetto base F

NB $$G(w_1, \dots, w_n) = d(a_{ij}) \, G(v_1 \dots v_n) = \frac{F(w_1, \dots w_n)}{F(v_1, \dots v_n)} G(v_1 \dots v_n)$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{G(v_1 \dots v_n)}{F(v_1 \dots v_n)}}}_{\lambda} F(w_1 \dots w_n) \quad \in K$$

(★★) $\boxed{G = \lambda F}$

$G \in \langle F \rangle = A^n(V)$

NB λ non dipende da $\{v_1, \dots v_n\} = \mathcal{V}$

<u>Esercizio</u> (verificare a mano che $\alpha_{\{F\}}$ è lineare)

Def Sia $\varphi : V \longrightarrow V$ un endomorfismo con $\dim V = n$.
Sia $F \in A^n(V)$, $F \neq 0$; Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V

Definiamo $\det\varphi := \dfrac{F(\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_n))}{F(v_1,\dots,v_n)}$

(NB) $F(v_1,\dots,v_n)\neq 0$ perché $F\neq 0$

(NB) non dipende dalla scelta della F.

Sia $0\neq G\in A^n(V)$

$$\frac{G(\varphi(v_1),\dots\ \varphi(v_n))}{G(v_1,\dots\ v_n)} \overset{(**)}{=} \frac{\cancel{\lambda} F(\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_n))}{\cancel{\lambda} F(v_1,\dots\ v_n)}$$

(NB) non dipende dalla scelta di v base

$$\begin{tikzcd} V^n \arrow[r, "(\varphi,\varphi,\dots,\varphi)"] & V^n \arrow[r, "F"] & K \\ (w_1,w_2,\dots w_n) \arrow[r, mapsto, "lineare"'] \arrow[rru, bend right] & (\varphi w_1,\varphi w_2,\dots\ \varphi w_n) & \end{tikzcd}$$

$F^\varphi = F\circ(\varphi,\varphi,\dots\varphi)$ è elemento di $A^n(V)$

So che $F^\varphi = \boxed{\lambda}F$ → non dipende da basi

$F^\varphi(v_1,\dots,v_n) = F(\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_n)) = (\det\varphi)F(v_1,\dots v_n)$

$\Rightarrow \lambda = \det\varphi$ $\Longrightarrow$ $\det\varphi$ non dipende dalla base scelta per descriv.

Osservo: • $\det(id_V) = \dfrac{F(v_1,\dots v_n)}{F(v_1\dots\ v_n)} = 1$

• Se φ non è invertibile $\Rightarrow$ $\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_n)$ non è una base.

$\Rightarrow$ $\varphi(v_1),\dots\ \varphi(v_n)$ sono l. dipend. $\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ $F(\varphi(v_1),\dots\varphi(v_n))=0$

$\Rightarrow \det\varphi = \dfrac{F(\varphi(v_1)\dots)}{F(v_1,\dots)} = 0$

• Se φ è invertibile $\Rightarrow$ $\varphi(v_1),\dots\ \varphi(v_n)$ è una base $\Rightarrow F(\varphi(v_1),\dots)\neq 0$

$\Rightarrow \det\varphi = \dfrac{F(\varphi(v_1),\dots\varphi(v_n))}{F(v_1,\dots v_n)} \neq 0$

Lemma φ invertibile $\Longleftrightarrow$ $\det\varphi\neq 0$

(*) Lemma $F: \underbrace{V\times\dots\times V}_{m\text{-volte}} \longrightarrow K$ m-mult. alternante

$F(w_1,\dots,w_m) = 0$ se $w_1,\dots,w_m$ sono l. dipend.

Dim Uno è comb. lineare degli altri.

posso assumere sia $w_m = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i w_i$

$$F(w_1, \dots, w_m) = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \underbrace{F(w_1, \dots, w_{m-1}, w_i)}_{\text{tutti 0 per l'alternanza}} = 0$$

$\boxed{\nabla\!\!/}$

Lezione 28. Dualità II - Determinanti II

Note Title

§ Dualità / bidualità / ortogonalità

$\dim V = n$ $\qquad \mathcal{V} = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V

$V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K)$ sp. vett. $\qquad \dim V^* = n$

$\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ $\qquad v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ $\qquad v_i^* : V \longrightarrow K$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "\varphi^*(w^*)"'] & W \arrow[d, dashed, "w^*"] \\ & K \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} W^* \arrow[r, "\varphi^*"] & V^* \end{tikzcd}$$

$$\overset{\Psi}{w^*} \longmapsto \varphi^*(w^*) := w^* \circ \varphi$$

$$\alpha_{\mathcal{W}^* \mathcal{V}^*}(\varphi^*) = \left(\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)\right)^t$$

φ^* sarà detta applicazione $\underline{\text{trasposta}}$ di φ

Proprietà della trasposizione:

- $(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{V^*}$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, dashed, "v^* \circ \mathrm{id} = v^*"'] & V \arrow[d, "v^*"] \\ & K \end{tikzcd}$$

-

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\psi"] \arrow[rr, bend right, "(\varphi \circ \psi)"'] & W \arrow[r, "\varphi"] & U \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V^* & W^* \arrow[l, "\psi^*"'] & U^* \arrow[l, "\varphi^*"'] \arrow[ll, bend left, "\psi^* \circ \varphi^*"] \arrow[ll, bend left=60, "(\varphi \circ \psi)^*"] \end{tikzcd}$$

$$\boxed{(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\psi"] \arrow[rr, bend left, "\varphi \circ \psi"] \arrow[drr, dashed, "(u^* \circ \varphi) \circ \psi"'] & W \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "u^* \circ \varphi"] & U \arrow[d, "u^* \in U^*"] \\ & & K \end{tikzcd}$$

$$(\varphi \circ \psi)^*(u^*) = \underline{u^* \circ (\varphi \circ \psi)}$$

$$(\psi^* \circ \varphi^*)(u^*) = \psi^*(\varphi^*(u^*)) = \psi^*(u^* \circ \varphi) =$$

$$= \underline{(u^* \circ \varphi) \circ \psi}$$

sono = grazie alla prop. associativa $\circ$.

ⓃⒷ Questo (ri)dimostra anche che $(AB)^t = B^t A^t$

$V^{**} = (V^*)^*$

$$V \xrightarrow{\ ev\ } V^{**} = \{V^* \longrightarrow K\}$$

$$v \longmapsto ev(v) : V^* \longrightarrow K$$

$$v^* \longmapsto v^*(v)$$

$v^* : V \to K$

verificato che è isomorfismo (canonico) di spazi vettoriali. $\dim V^{**} = n$

Se $\mathcal{V}$ base di V $\quad$ $\mathcal{V}^*$ base di V^* $\quad$ $\mathcal{V}^{**}$ base di V^{**}

$\{v_i\}$ $\quad$ $\{v_i^*\}$ $\quad$ $\{v_1^{**}, v_2^{**} \dots v_n^{**}\}$

$$\left.\begin{array}{l} v_i^{**}(v_j^*) := \delta_{ij} \\ ev(v_i)(v_j^*) = v_j^*(v_i) = \delta_{ij} \end{array}\right\} \Longrightarrow v_i^{**} = ev(v_i)$$

Grazie a questo posso "identificare V e V^{**}"

Se $v \in V$ di coordinate $\underline{\alpha} \in K^n$ risp. a $\mathcal{V}$

$ev(v) \in V^{**}$ ha . . . . $\mathcal{V}^{**}$

$$\langle \,,\, \rangle : V \times V^* \longrightarrow K \qquad \text{bilineare, non degenere}$$

$$(v, v^*) \longmapsto ev(v)(v^*) = v^*(v) =: \langle v, v^* \rangle$$

"$v \circ v^*$"

$U \leq V$ $\qquad U^\perp = \{ v^* \in V^* \text{ t.c. } \underset{v^*(u)}{\langle u, v^* \rangle} = 0 \ \forall\, u \in U \}$

$= \{ v^* \in V^* \text{ t.c. } \operatorname{Ker} v^* \supseteq U \} = \bigcap$ iperpiani

(NB) $\quad u \in U$ $\quad \langle u \rangle^\perp = \{ v^* \in V^* \text{ t.c. } \operatorname{Ker} v^* \ni u \}$ $\quad$ iperpiano in V^*

$\supseteq \langle u \rangle$

$V = \mathbb{R}^3$ $\qquad V^* = \mathbb{R}^{3*} = \{ \varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \}$

$\{e_1, e_2, e_3\} = \mathcal{V}$ $\qquad \{e_1^*, e_2^*\ e_3^*\} = \mathcal{V}^*$

$V \ni u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2e_1 - e_2 + 4e_3$ $\qquad \langle u \rangle^\perp = \{ \varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } \varphi(u) = 0 \}$

$\varphi = \xi_1 e_1^* + \xi_2 e_2^* + \xi_3 e_3^*$

φ ha coord. $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$ risp. $\mathcal{V}^*$

$$\varphi(u) = \left(\sum \xi_i e_i^*\right)(2e_1 - e_2 + 4e_3) = \sum \xi_i \left(e_i^*(2e_1 - e_2 + 4e_3)\right)$$

$$= 2\xi_1 - \xi_2 + 4\xi_3$$

$\langle u \rangle^\perp = \{ \varphi = \sum \xi_i e_i^* \text{ t.c. } \boxed{2\xi_1 - \xi_2 + 4\xi_3 = 0} \}$ $\longrightarrow$ eq. di un piano in $(\mathbb{R}^3)^*$

$\langle \overset{\text{l.ind.}}{u_1, u_2} \rangle^\perp$ = intersezione di 2 piani $\Big\}$ eq. in $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ omogenee

Se invece $Z \leq V^*$ $\qquad Z^\perp = \{ v \in V \text{ t.c. } \underset{\langle v, v^* \rangle}{v^*(v)} = 0 \ \forall\, v^* \in Z \}$

$$= \bigcap_{v^* \in Z} \operatorname{Ker} v^*$$

$$\langle\ ,\ \rangle ; \underset{\underset{Z^{\perp}}{\rotatebox{90}{$\leq$}}}{V} \times \underset{\underset{Z}{\rotatebox{90}{$\leq$}}}{V^*} \longrightarrow K$$

$$\langle\ ,\ \rangle ; \underset{\underset{Z}{\rotatebox{90}{$\leq$}}}{V^*} \times \underset{\underset{Z^{\perp}}{\rotatebox{90}{$\leq$}}}{(V^*)^*} \longrightarrow K \qquad (v^*, w^{**}) \longmapsto w^{**}(v^*)$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}$ riscrivo scambiando l'ord

$$\langle\ ,\ \rangle : V^{**} \times V^* \longrightarrow K$$
$$(w^{**}, v^*) \longmapsto w^{**}(v^*)$$

$$\begin{tikzcd} \langle\ ,\ \rangle : V \arrow[d, "ev"'] & \times & V^* \arrow[d, equal, "id"] \arrow[r] & K \arrow[d, equal, "id"] \\ \langle\ ,\ \rangle : V^{**} & \times & V^* \arrow[r] & K \end{tikzcd}$$

$$\underset{\underset{v^*(v)}{\shortparallel}}{\langle ev(v), v^* \rangle} = \underset{\underset{v^*(v)}{\shortparallel}}{\langle v, v^* \rangle}$$

Dunque $Z^{\perp}$ e $Z^{\perp}$ sono lo stesso sottospazio a meno di identificare V con V^{**} tramite ev.

Oss

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "ev"', "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W \arrow[d, "\wr"', "ev"] \\ V^{**} \arrow[r, "\varphi^{**}"] & W^{**} \end{tikzcd} \qquad V^* \xleftarrow{\varphi^*} W^* \qquad V^{**} \xrightarrow{\varphi^{**}} W^{**}$$

A meno di identificare V con V^{**}
W ... W^{**}

$\varphi = \varphi^{**}$ $\quad \left((A^t)^t = A \right)$

Risultati relativi al $\perp$

a) $W \leq V$ $\qquad (W^{\perp})^{\perp} = W$

è noto che $\dim W = m$ $\qquad \dim W^{\perp} = n-m$

$v = \{ \underbrace{v_1, \dots v_m}_{\text{base di } W} \ v_{m+1} \dots v_n \}$ base di V

$v_i^*(v_j)$ con $1 \leq i \leq m$ non si annulla in $v_i \in W$
e dunque $v_i^* \notin W^{\perp}$

$v_i^*(v_j)$ con $m+1 \leq i \leq n$ sono 0 se $1 \leq j \leq m$
$\Rightarrow v_i^* \in W^{\perp}$ e formano una sua base.

$$\dim (W^{\perp})^{\perp} = n - (n-m) = m$$
$$\shortparallel$$
$\dim (W^{\perp})^{\perp}$ per quanto detto prima.

Si dimostrano $W \leq (W^{\perp})^{\perp}$ e si conclude perché hanno = dimens.

b)• $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$ $\qquad W_1, W_2 \leq V$

$v^* = \varphi : V^* \longrightarrow K$ $\qquad \varphi \in (W_1 + W_2)^\perp \iff \varphi(w_1 + w_2) = 0 \ \forall\, w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$

$\iff \varphi(w_1) = 0$ e $\varphi(w_2) = 0 \ \forall\, w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$

$\iff \varphi \in W_1^\perp$ e $\varphi \in W_2^\perp \iff \varphi \in W_1^\perp \cap W_2^\perp$

c)• $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$

$$(W_1^\perp + W_2^\perp)^\perp \overset{b)}{=} (W_1^\perp)^\perp \cap (W_2^\perp)^\perp \overset{a)}{=} W_1 \cap W_2$$

$$\left((W_1^\perp + W_2^\perp)^{\cancel{\perp}}\right)^{\cancel{\perp}} \overset{a)}{=} (W_1 \cap W_2)^\perp$$

Lemma Siano $\varphi : V \longrightarrow W$ e $\varphi^* : W^* \longrightarrow V^*$ la trasposta

Allora a) $\underset{\substack{\cap \\ W^*}}{\ker \varphi^*} = (\operatorname{Im} \varphi)^\perp$ e b) $\operatorname{Im} \varphi^* = (\ker \varphi)^\perp$

Dim $\ker \varphi^* = \{ w^* \in W^* \text{ t.c. } \varphi^*(w^*) = 0_{V^*} \} =$

$= \{ w^* \in W^* \text{ t.c. } w^* \circ \varphi = 0_{V^*} \}$

$= \{ w^* \in W^* \text{ t.c. } (w^* \circ \varphi)(v) = 0_K \ \forall\, v \in V \}$

$= \{ w^* \in W^* \text{ t.c. } w^*(\underset{\substack{\cap \\ \operatorname{Im}\varphi}}{\varphi(v)}) = 0 \ \forall\, v \in V \} = (\operatorname{Im} \varphi)^\perp$

Per l'altra (potremmo usare $(\cdot)^{\perp\perp} = \cdot$ e identificare φ^{**} con φ)

Oppure.

$\operatorname{Im} \varphi^* \subseteq (\ker \varphi)^\perp \leq V^*$

$v^* = \varphi^*(w^*) \in \operatorname{Im}(\varphi^*)$, $w^* \in W^*$ $\qquad W^* \xrightarrow{\varphi^*} V^*$

& $v \in \ker\varphi$ $\quad v^*(v) = \varphi^*(w^*)(v) = w^*(\varphi(v)) = w^*(0) = 0 \implies v^* \in (\ker \varphi)^\perp$

Per concludere basta vedere che hanno la stessa dimensione.

[Esercizio!] $\qquad \underset{\underset{\dim V^*}{\shortparallel}}{\dim V} = n \qquad \underset{\underset{\dim W^*}{\shortparallel}}{\dim W} = m$

Usare anche il fatto che a) è noto!

Conseguenza: $\varphi : V \longrightarrow W$ lineare è iniettivo $\iff \varphi^* : W^* \longrightarrow V^*$ è suriett

φ - - - - - suriettivo $\iff \varphi^*$: - - - - è iniettivo

- φ è iniettiva $\iff \operatorname{Ker}\varphi = 0 \iff (\operatorname{Ker}\varphi)^\perp = V^* \iff \operatorname{Im}\varphi^* = V^* \iff \varphi^*$ è suriett

- analogamente la 2ª affermazione.

* * *

$U \leqslant V$

$$U \xhookrightarrow{i} V$$

$$u \longmapsto u$$

$$i^* : V^* \xrightarrow{\text{suriett}} U^*$$

$$V \xrightarrow{\pi} V/U$$

$$v \longmapsto v + U$$

$$\rotatebox{90}{$\in$}$$

$$v'$$

$$v' - v \in U$$

$$\pi^* : (V/U)^* \xhookrightarrow{\text{iniett}} V^*$$

$\operatorname{Im} i = U \quad \Rightarrow (\operatorname{Ker} i^*) = (\operatorname{Im} i)^\perp = U^\perp$

1° T. di isomorfismo $\quad V^* / \operatorname{Ker} i^* \cong U^* = \operatorname{Im} i^*$

① $\boxed{V^*/U^\perp \cong U^*}$ $\quad$ (ritrovo che $\dim U^\perp = n - \underset{\overset{\shortparallel}{\dim U^*}}{\dim U}$)

$(\operatorname{Ker}\pi)^\perp = \operatorname{Im}\pi^* = (V/U)^*$

$\underset{\overset{\shortparallel}{U^\perp}}{(\operatorname{Ker}\pi)^\perp} = (V/U)^* \quad \Longrightarrow \quad \boxed{U^\perp = (V/U)^*}$ ②

① dice che:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "v_1^*"] & K \\ U \arrow[u, hook, "i"] \arrow[ur, "v^*_1|U \in U^*"'] & \end{tikzcd}$$

$v_1^*, v_2^* \in V^*$

$v_1^*|_U = v_2^*|_U \iff$

$v_1^* - v_2^* \in U^\perp$

$v^* \in V^*$ è t.c. $v^*|_U = 0 \iff v \in U^\perp$

$$\begin{tikzcd} V/U \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & K \\ V \arrow[u] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

$\overline{\varphi} \in V/U$ sono applicazioni t.c.

se φ_1, φ_2 hanno $\overline{\varphi_1} = \overline{\varphi_2}$

$\underset{\overset{\rotatebox{90}{$\in$}}{U^\perp}}{\varphi_1 - \varphi_2}$ si annulla in U

* * *

§ Determinanti $\quad \varphi : V \longrightarrow V \quad 0 \neq F \in A^n(V)$

$n = \dim V \quad \mathcal{V} = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V; $\quad F : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n} \longrightarrow K$

$\det\varphi := \dfrac{F(\varphi(v_1), \dots \varphi(v_n))}{F(v_1, \dots v_n)}$ $\quad$ non dip da F e da $\mathcal{V}$

Def Sia $B \in M_n(K)$ $\quad \det B := \det f_B$

$$\begin{aligned} f_B : K^n &\longrightarrow K^n \\ x &\longmapsto Bx \end{aligned}$$

- $\det(id_V) = 1$
- Siano $\psi, \varphi : V \longrightarrow V$ endom.

$\det(\psi \circ \varphi) = \det(\psi) \cdot \det(\varphi)$ in K

Fisso $\mathcal{V}$ base, $F \in A^n(V)$, $F \neq 0$

$$\det(\psi \circ \varphi) = \frac{F((\psi\circ\varphi)(v_1), \dots\dots, (\psi\circ\varphi)(v_n))}{F(v_1, \dots, v_n)} =$$

$$= \frac{F(\psi(\varphi(v_1)), \dots \psi(\varphi(v_n)))}{F(v_1, \dots, v_n)} \overset{\circledast}{=}$$

se φ non è invertibile $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$ non ~~è~~ formano una base dunque sono l. dipendenti $\Rightarrow$ uno è comb. lineare degli altri

$\Rightarrow \psi(\varphi(v_1)), \dots, \psi(\varphi(v_n))$ sono l. dip.

$\Rightarrow F(\psi(\varphi(v_1)), \dots \psi(\varphi(v_n))) = 0$

Se φ è invertibile $\{\varphi(v_1), \dots \varphi(v_n)\}$ è una base di V

$$\circledast = \underbrace{\frac{F(\psi(\varphi(v_1)), \dots \psi(\varphi(v_n)))}{\underset{0\neq}{F(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n))}}}_{\det \psi} \cdot \underbrace{\frac{F(\varphi(v_1), \dots \varphi(v_n))}{F(v_1, \dots v_n)}}_{\det \varphi}$$

- $\det(\psi \circ \varphi) = \det\psi \cdot \det\varphi$ se φ invertibile.
- se φ non è invertibile $\det(\psi\circ\varphi) = 0 = \det\psi \cdot \underset{0}{\det\varphi}$

$\left(\overset{\Updownarrow}{\det}\varphi = 0\right)$

Quindi $\boxed{\det(\psi\circ\varphi) = \det\psi \cdot \det\varphi}$ $\quad \forall \psi, \varphi \in End(V)$

Teorema di Binet

↓

$\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B}$ $\quad A, B \in M_n(K)$

Conseguenza: Se $A \in GL_n(K)$ (A è $n\times n$ invertibile)

$$\underbrace{\det(\underbrace{A\cdot A^{-1}}_{1\!\!1_n})}_{\overset{\shortparallel}{1}} = \det A \cdot \det(A^{-1})$$

$$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = (\det A)^{-1}$$

Analogamente $\det(\varphi^{-1}) = \dfrac{1}{\det\varphi}$ se $\varphi \in Aut(V)$

∼

Esempi di calcolo.

$$\det\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A} = \text{det applicaz. lineare } f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto Ax$$

$ad-b\overset{=}{c}$

$\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ base di $\mathbb{R}^2$, $0 \neq F \in A^2(\mathbb{R}^2)$

$$\frac{F(f_A(e_1), f_A(e_2))}{F(e_1,e_2)} = \frac{F(ae_1+ce_2, be_1+de_2)}{F(e_1,e_2)}$$

$$= \frac{ab\cancel{F(e_1,e_1)} + cd\cancel{F(e_2,e_2)} + ad\,F(e_1,e_2) + cb\,F(e_2,e_1)}{F(e_1,e_2)} =$$

$$= (ad-bc)\frac{\cancel{F(e_1,e_2)}}{\cancel{F(e_1,e_2)}}$$

Lezione 29. Determinanti III.

075798

Note Title

$\varphi : V \longrightarrow V$ $\quad \mathcal{V} = \{v_1 \dots v_n\}$ base $\quad 0 \neq F \in \Lambda^n(V) = \langle F \rangle$

$$\det \varphi := \frac{F(\varphi(v_1), \dots \varphi(v_n))}{F(v_1, \dots v_n)}$$

$A = (a_{ji}) = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\varphi)$ $\qquad \varphi(v_1) = \sum_{j=1}^{m} a_{j1} v_j$

$\qquad \varphi(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} v_j$

$$F(\varphi(v_1), \dots \varphi(v_n)) = F\Big(\sum_{j_1=1}^{n} a_{j_1,1} v_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{m} a_{j_2,2} v_{j_2}, \dots\dots, \sum_{j_n=1}^{m} a_{j_n,n} v_{j_n}\Big)$$

$$= \sum_{j_1} \sum_{j_2} \dots \sum_{j_n} a_{j_1,1} a_{j_2,2} \dots a_{j_n,n} F(v_{j_1}, v_{j_2}, \dots v_{j_n})$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} \underbrace{F(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots v_{\sigma(n)})}_{\substack{\| \\ \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot F(v_1, \dots, v_n)}}$$

$$= \underbrace{\Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}\Big)}_{\det \varphi} F(v_1, \dots v_n)$$

$$\operatorname{sgn} : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{\pm 1\}$$
$$\sigma \longmapsto (-1)^{\#\text{scambi}}$$

$$\boxed{\det \varphi = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n),n}}$$

sembra dipendere dai coefficienti di $A = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\varphi)$

ma sappiamo che è indipendente. Posso usare i coeff. di qualsiasi matrice $B = \alpha_{\mathcal{V}'\mathcal{V}'}(\varphi)$ $\quad \mathcal{V}'$ base di V.

Sia ora $V = K^n$ $\qquad \overbrace{K^n \times \dots \times K^n}^{n} \xrightarrow{F} K$ $\qquad F \in \Lambda^n(K^n)$

$\qquad\qquad \neq 0$] dipende solo da $F(e_1, \dots, e_n)$

$\varphi = f_A$ con $A \in M_n(K)$

$\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f_A) = A \qquad \det A := \det f_A$

$$F(f_A(e_1),\dots,f_A(e_n)) = \det f_A \cdot F(e_1,\dots,e_n)$$

Scelgo $\overline{F}$ quello per cui $\overline{F}(e_1,\dots,e_n)=1$

$$\overline{F}(1^a \text{ col. di } A,\ 2^a \text{ col } A,\ \dots,\ n\text{-sima col. di } A) = \det A$$

$\overline{F} = \det \;:\; K^n \times K^n \times \dots \times K^n \longrightarrow K$ t.c. $\overline{F}(e_1,\dots,e_n)=1$

$$\begin{tikzcd} 1^a\text{col},\ 2^a\text{col} \arrow[d, phantom, "\|\ \text{biezione}"] & \\ A \arrow[u] \quad M_n(K) \arrow[r, "\det"'] & K \end{tikzcd}$$

Conclusione $\det : M_n(K) \longrightarrow K$ può essere interpretato come una appl. n-multi-lineare alternante sulle n colonne della matrice e t.c. $\det\left(\underset{(e_1 e_2 \dots e_n}{\mathbb{1}_n}\right) = 1$ $\Big]$ *

* aiuto ad

$n=2$ $\qquad \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

$$\overset{\overline{F}}{\overset{\|}{\det}}\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right) = \det(ae_1 + ce_2,\ be_1 + de_2) = ad\,\underset{\mathbb{1}_2}{\underset{\|}{\det(e_1,e_2)}}$$

$$+\, cb\,\underbrace{\det(e_2,e_1)}_{\overset{\|}{-\det(e_1,e_2)}}$$

ottengo $ad - cb$.

$n=3$ $\qquad A : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow$

1 2 3 diag

3 1 2 ⇝ 1 3 2 ⇝ 1 2 3

2 3 1 ⇝ 2 1 3 ⇝ 1 2 3

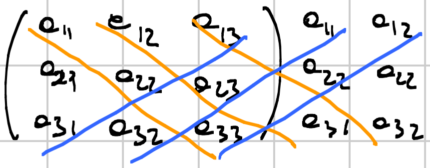
$$\det A = \det\left(\sum_{i=1}^{3} a_{i1} e_i,\ \sum_{j=1}^{3} a_{j2} e_j,\ \sum_{k=1}^{3} a_{k3} e_k\right) =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2}\, a_{\sigma(3)3} \det(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)})$$

$\boxed{\text{Sarrus}}$ $\Big\{ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - \underline{a_{31}a_{22}a_{13}} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$

3 2 1 ⇝ 2 3 1 ⇝ 2 1 3 ⇝ 1 2 3

diagonali − antidiagonali



$n=4$ orribile!

Osservo: $\det A = \det A^t$

$$\begin{aligned} &\det A \\ &\parallel \\ &\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \underbrace{a_{\sigma(1),1} \cdots\cdots a_{\sigma(n),n}}_{\text{riordino}} \\ &\sum_{\sigma^{-1}\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})\, a_{1,\sigma^{-1}(1)}\, a_{2,\sigma^{-1}(2)} \cdots\cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \\ &\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\tau)\, \underbrace{a_{1\,\tau(1)}}_{b_{\tau(1),1}} \cdot \underbrace{\cdots}_{b_{\tau(2),2}} \cdots \underbrace{a_{n\,\tau(n)}}_{b_{\tau(n),n}} \\ &= \det A^t \end{aligned}$$

$$\overset{\sigma^{-1}(1)}{\swarrow}$$
$\sigma(i)=1$

$A=(a_{ij})$

$A^t=(b_{ij})$

$b_{ij}=a_{ji}$

Sia A una matrice triangolare superiore $A=\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots\ a_{nn} \end{pmatrix}$

$a_{j,i}=0$ se $j>i$

$$\begin{aligned} \det A &= \det(a_{11}e_1,\ a_{12}e_1+a_{22}e_2,\ a_{13}e_1+a_{23}e_2+a_{33}e_3,\ \cdots\cdots) \\ &\overset{!}{=} \sout{\det(a_{11}e_1,\ a_{12}e_1,\ a_{13}e_1+a_{23}e_2 - - - - - - -} \quad) \\ &\quad + \det(a_{11}e_1, a_{22}e_2, \cancel{a_{13}e_1} + \cancel{a_{23}e_2} + a_{33}e_3, \cancel{-} \ - \ - \ ) \\ &\ \vdots \\ &= a_{11} \cdots\cdots a_{nn} \end{aligned}$$

Analogamente per matrici triangolari inferiori $\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn} \end{pmatrix}$

per dimostrarlo si parte dall'ultima colonna

oppure uso A^t è triang superiore.

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}}_{\text{diagonale}} = d_1 \cdots d_n = \prod_{i=1}^{n} d_i$$

Esempio $\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\ & 1 & & \\ 1 & 0 & & 0 \end{pmatrix} = ?\ (-1)^{\#\text{scambi}} \qquad = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

con scambi di colonne è $\det(e_1, e_2, \ldots e_n) \overset{1}{\parallel}$
ma gli scambi cambiano il segno

$$e_n\, e_{n-1} \cdots e_1 \overset{n-1 \text{ scambi}}{\rightsquigarrow} \underbrace{e_{n-1}\, e_{n-2} \cdots e_1\, e_n}$$

$$\} \; n-2 \text{ scambi}$$

$$e_{n-2} \cdots e_1\, e_{n-1}\, e_n$$

$$\}$$

$$\vdots$$

$$e_1\, e_2 \cdots e_n$$

$\#$ scambi è $n-1 + n-2 + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$

Analogo $\det \begin{pmatrix} & & d_1 \\ & d_2 & \\ d_n & & \end{pmatrix} = ?$

$\rightsquigarrow$

Operazioni elementari e determinante

$S(i,j)$ sia la matrice ottenuta da $\mathbb{1}_n$ scambiando le colonne (i,j)

(scambiando le righe i,j)

$\det(S(i,j)) = (-1)\det(\mathbb{1}_n) = -1$

$A' = \underset{\nearrow \text{scambiato 2 righe}}{S(i,j)}A \qquad \det A' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Binet}}}{=} (-1)\det A$

$A'' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ho scamb 2 colonne}}}{=} AS(i,j) \qquad \det A'' = -\det A$

$\det(\underbrace{E(i,\alpha)}) = \alpha$

$\hookrightarrow$ ottenuto da $\mathbb{1}_n$ molt. per $\alpha \neq 0$ la $\frac{\text{colonna}}{\text{riga}}$ i-esima

$\det(\underbrace{E(i,j,\alpha)}) = 1$

$\hookrightarrow$ ottengo sommando alla colonna i-esima α volte la j-esima

se A' è ottenuto da A moltipl. una riga o una colonna per α

$\det A' = \alpha \det A$

se A' è ottenuto da A sommando alla $\frac{\text{riga}}{\text{colonna}}$ i-esima α-volte la j-esima

$\Rightarrow \det A' = \det A.$

Lezione 30. Calcolo del determinante 692130

Note Title

§ Determinanti di matrici a blocchi

$$\underset{\overset{\nearrow}{M_n(K)}}{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \boxed{B_{1}} & C \\ \hline \underset{\underset{\in M_{n-r,r}(K)}{\uparrow}}{0} & \boxed{B_2} \end{array}\right) r \end{array}$$

$B_1 \in M_r(K)$

$B_2 \in M_{n-r}(K)$

a) $\det A = \det B_1 \cdot \det B_2$

- Analogamente

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & 0 \\ C' & \boxed{B_2} \end{pmatrix}$$

$B_1 \in M_r(K)$

$B_2 \in M_{n-r}(K)$

$\det A = \det B_1 \cdot \det B_2$ (questo caso è il trasposto del 1°)

- Per induzione si dimostra:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & & * \\ 0 & \boxed{B_2} & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{B_s} \end{pmatrix}$$

$B_i \in M_{m_i}(K)$ $\qquad A \in M_n(K)$

$m_1 + \dots + m_s = n$

$\det A = \det B_1 \cdot \det B_2 \cdot \dots \cdot \det B_s$

Dimostriamo a)

$\mathrm{sgn} : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{\pm 1\}$

$\sigma \longrightarrow 1$ se σ pari

$\sigma \longrightarrow -1$ se σ dispari

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \underset{\underset{(-1)^{\#\text{scambi}} \dots}{\shortparallel}}{\mathrm{sgn}\,\sigma}\; a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \overset{r\times r}{B_1} & * \\ \hline 0 & B_2 \end{array}\right)$$

$\boxed{\text{se } i \leq r}$ $\quad a_{ji} = 0$ quando $j > r$

vuol dire che se $\sigma(i) > r$ $\quad a_{\sigma(i),i} = 0$

Dunque nel prodotto compariranno solo i fattori

dove compaiono $a_{\sigma(i),i}$ con $\sigma(i) \leq r$ se $i \leq r$

ossia $$\det A = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \text{t.c.} \\ \sigma\{1,\dots,r\} = \{1,\dots,r\}}} \mathrm{sgn}\,\sigma\; a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

$$= \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\,\sigma'\; a_{\sigma'(1),1} \cdots a_{\sigma'(r),r} \cdot \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{n-r}} \mathrm{sgn}\,\tau \prod_{i=1}^{n-r} a_{r+\tau(i),\, r+i}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\det B_1}\qquad\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\det B_2.}$$

Esercizio: perché $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma' \cdot \operatorname{sgn}\tau$ x $\sigma' = \sigma|_{\{1,\dots,r\}}$ e $\tau(i) = \sigma(r+\tau i) - r$ per $1 \leq i \leq n-r$?

Esempio $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ -1 & 0 & 27 & 54 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$

$= 2 \cdot 3 = 6$

Esercizio: ritrovarlo con Gauss.

D'ora in poi scriverò anche $|A|$ al posto di $\det A$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

§ Determinanti di Vandermonde

$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{pmatrix} = x_1 - x_0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} \overset{\text{Gauss}}{=} (x_1-x_0)(x_2-x_0)(x_2-x_1) = \prod_{0 \leq i < j \leq 2} (x_j - x_i)$

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & \multicolumn{4}{c}{n+1} \\
 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
 & x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\
n+1 & x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\
 & \vdots & & & \\
 & x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n
\end{array} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

$n = 2$ ✓. Sia $n > 2$

Dimostriamo per induzione. Suppongo vero il risultato per $n-1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & & \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & \cdots & x_n - x_0 \\ & (x_1-x_0)x_{\cancel{0}} & (x_2-x_0)x_2 & & \\ 0 & \underbrace{x_1^{n-1} \cancel{- x_0 x_1^{n-2}}}_{x_1^{n-2}(x_1-x_0)} & & & x_n^{n-1} - x_0 x_n^{n-2} \\ \cancel{x_0^n - x_0} \; 0 & \underbrace{x_1^n - x_0 x_1^{n-1}}_{x_1^{n-1}(x_1-x_0)} & \underbrace{x_2^n - x_0 x_2^{n-1}}_{x_2^{n-1}(x_2-x_0)} & \cdots & \underbrace{x_n^n - x_0 x_n^{n-1}}_{x_n^{n-1}(x_n-x_0)} \end{vmatrix}$$

M

ultima riga $- x_0 \cdot$ la penultima

penultima riga $- x_0$ la terzultima

alla riga i-esima tolgo x_0 volte la precedente

det a blocchi

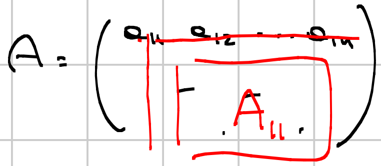
$= 1 \cdot \det M = (x_1-x_0)(x_2-x_0)\cdots(x_n-x_0) \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$

$= \prod_{l=1}^{n} (x_l - x_0) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ ☑

§ Formule di Laplace

Sia $A \in M_n(K)$ $\qquad |A| = \sum_{\sigma\in S_n} \text{segno}\,\sigma \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$

a) Sviluppo di Laplace rispetto alla 1ª riga



$$|A| = a_{11}\cdot|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| \dots$$

$$\det A \overset{!}{=} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j})$$

A_{ij} := sottomatrice di A ottenuta cancell la riga i e la colonna j

b) Sviluppo di Laplace rispetto alla riga i-esima

$$\det A = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

a) è caso particolare di b) con $i=1$

c) Sviluppo di Laplace rispetto alla colonna j-esima

$$\det A = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

c) si ottiene da b) grazie a $\det A \overset{\shortparallel}{} \det A^t$

Tabella dei segni $\begin{pmatrix} + & - & + & - & + \cdot & \pm \\ - & + & - & & & \\ + & & \ddots & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ \pm ? & & & & & + \end{pmatrix}$

Esempio $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ sviluppo di Laplace rispetto alla 3ª colonna

$$\cancel{(-1)}\,\cancel{0\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}} - 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4(-10) - 6 = 40 - 6 = 34$$

Sviluppo risp alla 2° riga

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} = -(-2)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \cancel{0\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}} - 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -6 + 40 = \underline{34.}$$

☒

Dimostriamo.

$$|A| = a_{11}\cdot|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| \dots$$

$$\det A \overset{!}{=} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j})}_{F}$$

Sappiamo che $\det A$ è l'unica forma n-multilineare alternante sulle colonne della matrice che vale 1 se $A = \mathbb{1}_n$

Da mostrare che $F(\mathbb{1}_n)=1$ ed F è n-multilineare alternante. Per induzione.
il caso $n=1$ banale
$\det(a)=a$
e il caso $n=2$ facile
(a mano)

$a_{ij}=x_{ij}$

qui $|\;|$ indica quello che noi abbiamo indicato con F.

$$\text{(4.2.3)} \quad \begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} x_{1,j} A_{1,j} \qquad \text{(Regola di Laplace)},$$

e verifichiamo che questa formula definisce una funzione n-lineare e alternante di K^n che vale 1 quando viene calcolata nei vettori della base canonica, nel loro ordine naturale. Si ha

matrici $(n-1)\times(n-1)$

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,i}+y_{1,i} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,i}+y_{n,i} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} = x_{1,1} \begin{vmatrix} x_{2,2} & \dots & x_{2,i}+y_{2,i} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,2} & \dots & x_{n,i}+y_{n,i} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{i+1}\underline{(x_{1,i}+y_{1,i})} \begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & x_{2,i-1} & x_{2,i+1} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,i-1} & x_{n,i+1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n+1} x_{1,n} \begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & x_{2,i}+y_{2,i} & \dots & x_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,i}+y_{n,i} & \dots & x_{n,n-1} \end{vmatrix}.$$

Ricordando che, in base all'ipotesi induttiva, gli addendi che compaiono a destra del segno di uguale sono funzioni multilineari delle colonne, si ha

per induzione è lineare

$$\begin{vmatrix} x_{2,2} & \dots & x_{2,i}+y_{2,i} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,2} & \dots & x_{n,i}+y_{n,i} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{2,2} & \dots & x_{2,i} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,2} & \dots & x_{n,i} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{2,2} & \dots & y_{2,i} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,2} & \dots & y_{n,i} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & x_{2,i}+y_{2,i} & \dots & x_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,i}+y_{n,i} & \dots & x_{n,n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & x_{2,i} & \dots & x_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,i} & \dots & x_{n,n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & y_{2,i} & \dots & x_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & y_{n,i} & \dots & x_{n,n-1} \end{vmatrix},$$

da cui si deduce che $F(v_1,\dots,v_i+v_i',v_{i+1},\dots v_n) = F(v_1\dots v_i,\dots v_n) + F(v_1,\dots,v_i',\dots v_n)$

rispetto la somma nella colonna j-esima

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,i}+y_{1,i} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,i}+y_{n,i} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,i} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,i} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & y_{1,i} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & y_{n,i} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Analogamente, si ha che

ipotesi induttive

$$\alpha \begin{vmatrix} x_{11} \cdot x_{1i} \, x_{1n} \\ \vdots \\ x_{n1} \dots x_{nn} \end{vmatrix} \overset{?}{=} \begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & \underline{\alpha x_{1,i}} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & \alpha x_{n,i} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} = x_{1,1} \begin{vmatrix} x_{2,2} & \dots & \alpha x_{2,i} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,2} & \dots & \alpha x_{n,i} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$+(-1)^{i+1}\underline{\alpha x_{1,i}} \begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & x_{2,i-1} & x_{2,i+1} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,i-1} & x_{n,i+1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$(-1)^{n+1} x_{1,n} \begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & \alpha x_{2,i} & \dots & x_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & \alpha x_{n,i} & \dots & x_{n,n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha \sum_{j=1}^{n} x_{1j} \det M_{1j}$$

Rimane da verificare che è alternante

$$0 = \begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & y_1 & \dots & y_1 & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ x_{n,1} & \dots & y_n & \dots & y_n & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} = x_{1,1} \cancel{\begin{vmatrix} x_{2,2} & \dots & y_2 & \dots & y_2 & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ x_{n,2} & \dots & y_n & \dots & y_n & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix}} + \dots +$$

i-esima, j-esima

= 0 per ipotesi induttiva

(n−1)×(n−1) e ha 2 col. uguali

$$(-1)^{i+1} y_1 \begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & x_{2,i-1} & x_{2,i+1} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,i-1} & x_{n,i+1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$(-1)^{j+1} y_1 \begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & x_{2,j-1} & x_{2,j+1} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,j-1} & x_{n,j+1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$(-1)^{n+1} x_{1,n} \cancel{\begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & y_2 & \dots & y_2 & \dots & x_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ x_{n,1} & \dots & y_n & \dots & y_n & \dots & x_{n,n-1} \end{vmatrix}}.$$

= 0 idem

Ricordando che, in base all'ipotesi induttiva, gli addendi che compaiono a destra del segno di uguale sono funzioni multilineari alternanti delle colonne, si ha che tutti gli addendi sono certamente nulli, a eccezione di

$$(-1)^{i+1} y_1 \begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & x_{2,i-1} & x_{2,i+1} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \overset{y}{j} & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,i-1} & x_{n,i+1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} \text{ e } (-1)^{j+1} y_1 \begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & x_{2,j-1} & x_{2,j+1} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & \overset{y}{i} & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,j-1} & x_{n,j+1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix}.$$

D'altra parte le due funzioni qui scritte hanno gli stessi argomenti, a eccezione dell'ordine, perché la $(j-1)$-esima colonna della prima coincide con la $(i-1)$-esima della seconda e le altre colonne sono spostate di conseguenza. Quindi, sempre per l'ipotesi induttiva, si ha

$$\begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & x_{2,i-1} & x_{2,i+1} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,i-1} & x_{n,i+1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{j-i-1} \begin{vmatrix} x_{2,1} & \dots & x_{2,j-1} & x_{2,j+1} & \dots & x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,j-1} & x_{n,j+1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix}$$

e quindi, i due addendi rimanenti sono opposti. Abbiamo così verificato che l'applicazione definita in (4.2.3) è multilineare alternante. Infine è immediato dedurre dall'ipotesi induttiva che

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

e ciò conclude la verifica. ☐

§ Sviluppi con cofattori alieni

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})}$$

sviluppo di Laplace risp. alla riga i.

$$\circledast \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{kj} \det(A_{ij})$$

ossia ho a_{kj} al posto di a_{ij}

$k = i$ è lo sviluppo sopra e vale $\det A$.

se $k \neq i$ ⊛ è lo sviluppo di Laplace della matrice B costruita sostituendo alla riga i-esima di A la riga k-esima di A

Dunque le righe di B sono uguali a quelle di A a parte la k-esima e anzi B ha 2 righe $=$

$\Rightarrow \det B = 0 \Rightarrow$ ⊛ $= 0$

Riassumendo: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{kj} \det(A_{ij}) = \delta_{ki} \det A$

Matrice dei complementi algebrici.

Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ $\qquad A^c = (a^c_{ij})$

$a^c_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A_{\underline{\underline{ji}}})$

⚠ allo scambio

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^c = \begin{pmatrix} +d & -b \\ -c & +a \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^c = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$a^c_{11} = (-1)^2 \det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad a^c_{12} = (-1)^{1+2} \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$

$a^c_{32} = (-1) \det(A_{23}) = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$

$\det\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \boxed{4} \end{pmatrix} \overset{\text{operaz.}}{\sim}$ triangol. sup. .

sviluppo con Laplace risp. alla 4ª colonna

$= +4 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \underset{\mathrm{III}_r - 2\mathrm{I}}{\begin{vmatrix} 1 & 6 & \boxed{1} \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -12 & 0 \end{vmatrix}} \overset{\text{Laplace 3ª colonna}}{=} 4 \cdot 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -12 \end{vmatrix} = 4(-24-1) \overset{!}{=} -100$

Lezione 31. Minori e rango. 072321

Note Title

Sia $A=(a_{ij})\in M_n(K)$

Sviluppi con i cofattori alieni
$$\sum_{j=1}^{m}(-1)^{i+j}a_{kj}\det(A_{ij}) = \delta_{ki}\det A$$
$$\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+j}a_{ik}\det(A_{ij}) = \delta_{kj}\det A$$

Matrice dei complementi algebrici. viene detta anche aggiunta

$$A^c=(a^c_{ij}) \qquad a^c_{ij} := (-1)^{i+j}\det(A_{ji})$$

↑ sottomatrice di A ottenuta cancellando riga j e colonna i

Lemma Sia $A\in M_n(K)$. Allora $AA^c = A^cA = \det(A)\mathbb{1}_n = \begin{pmatrix}\det A & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \det A\end{pmatrix}$

(in particolare se $\det A=0$, $AA^c=A^cA=0_{n\times n}$

Dim • $AA^c=(c_{ij})$ $\quad c_{ij}=$ (riga i di A)$\cdot$(colonna j di A^c)

$$=(a_{i1},\dots a_{in})\cdot\begin{pmatrix}a^c_{1j}\\ \vdots\\ a^c_{nj}\end{pmatrix} =$$

$$=\sum_{l=1}^{m} a_{il}a^c_{lj} = \sum_{l=1}^{m} a_{il}(-1)^{l+j}\det(A_{jl})$$
$$= \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+j} a_{il}\det(A_{jl}) = \delta_{ij}\det A$$

Dunque $AA^c = \det A\,\mathbb{1}_n$

• Analogamente si dimostra $A^cA=\det A\,\mathbb{1}_n$ (esercizio)

□

Dal lemma segue che se A è invertibile ossia se $\det A\neq 0$

$$A\frac{A^c}{\det A} = \mathbb{1}_n \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^c$$

← Complicato e rischioso! mai usarlo per calcolare A^{-1} se $n>2$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

↑ vista ieri

Ritrovo la formula nota!

Se A è invertibile $\Rightarrow$ A^c è invertibile

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^c \qquad |A^{-1}| = \underbrace{\left| \frac{1}{\det A} A^c \right|}_{} = \frac{1}{(\det A)^n} |A^c|$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{\det A} \Rightarrow \det A^c = \frac{(\det A)^n}{\det A} = (\det A)^{n-1}$$

Se $\operatorname{rg} A = n \Rightarrow \operatorname{rg} A^c = n$ e $\det A^c = (\det A)^{n-1}$

Se $\operatorname{rg} A < n \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow A \cdot A^c = O_{n \times n}$

$\operatorname{rg} A^c = ?$ (in sospeso)

§ Minori di una matrice.

Def Sia $A \in M_{n,m}(K)$. Un minore di ordine r di A è il determinante di una sottomatrice quadrata di A di ordine r ossia di una sottomatrice ottenuta cancellando $n-r$ righe e $m-r$ colonne.

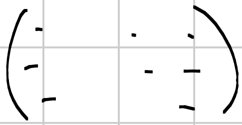
Es $A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{4} & \boxed{5} & \boxed{6} \end{pmatrix}$

6 minori di ordine 1

3 minori di ordine 2

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\quad\ \ \overset{\shortparallel}{-3} \qquad\qquad \overset{\shortparallel}{-6} \qquad\qquad \overset{\shortparallel}{-3}$$

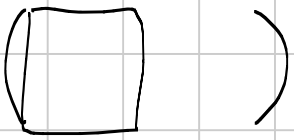
Osservazione Sia $A \in M_{m,n}(K)$. Allora



- $m \cdot n$ minori di ordine 1
- $\binom{m}{2}\binom{n}{2}$ minori di ordine 2

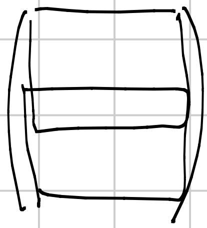
⋮

Il massimo ordine di un minore è il minimo tra m e n



se $m \leq n$

avrò $\binom{n}{m}$ minori di ordine m



$m \geq n$

avrò $\binom{m}{n}$ minori di ordine n.

Sia $A \in M_{m,n}(K)$

Prop a) $\operatorname{rg} A \geq r \iff$ esiste un minore di A di ordine $\geq r$ non nullo.

Equivalentemente b) $\operatorname{rg} A = r \iff$ esiste un minore non nullo di A di ordine r e tutti i minori di ordine $r+1$ $(>r)$ sono nulli
equiv

c) $\operatorname{rg} A < r \iff$ tutti i minori di A di ordine $\geq r$ sono nulli

Esempio $A: \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ $\operatorname{rg} A = 2$

Problemi tecnici. Passare alla pagina successiva.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & \boxed{\begin{matrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \\ 0 & 1 & & \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \qquad rg\, A = 2$$

$\square \longrightarrow$ det $1 \neq 0$ $\qquad rg\, A \geq 1$

$\square$ $\qquad$ det $3 \neq 0$ $\qquad rg\, A \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} = 0$$

Dunque $rg\, A = 2$

Dim ($rg\, A \geq r \iff \exists$ minore non nullo di ordine $\geq r$)

$rg\, A \geq r \iff$ esistono $s \geq r$ colonne lin. indipendenti in $A \in M_{m,n}(K)$

($s \leq \min(m,n)$)

$\Rightarrow$) Considero la sottomatrice di A, sia A', ottenuta tenendo solo queste s colonne $\quad A' \in M_{m,s}(K) \quad rg\, A' = s \Rightarrow$ vuol dire che esistono s righe in A' l. indip.

Sia A'' la sottomatrice di A' ottenuta tenendo queste s righe

$A'' \in M_s(K) \quad rg\, A'' = s \quad \Rightarrow \det A'' \neq 0$

Quindi A'', che è pure sottomatrice di A, ha det $\neq 0$ e dunque ho un minore non nullo di A di ordine $s\, (\geq r)$

$\Leftarrow$) Se A'' è la sottomatrice quadrata di A di ordine $s \geq r$ con $\det A'' \neq 0 \Rightarrow rg\, A'' = s \Rightarrow$ se considero la sottomatrice A' di A ottenuta da A cancellando le colonne che non coinvolgono A''

$\Rightarrow rg\, A' = s \Rightarrow$ in A vi sono s colonne l. indip.

$\Rightarrow rg\, A \geq s \geq r$ $\blacksquare$

Torniamo al $rg\, A^c$
$$rg\, A^c = \begin{cases} \boxed{n \quad \text{se } \det A \neq 0} & \text{visto} \\ 1 \quad \text{se } rg\, A = n-1 \\ \boxed{0 \quad \text{se } rg\, A < n-1} \end{cases} \qquad A \in M_n(K)$$

$a^c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$

- Se $\operatorname{rg} A < n-1$ vuol dire che i minori di A di ordine $n-1$ sono tutti 0 ; dunque $\det A_{ji} = 0 \Rightarrow a^c_{ij} = 0 \ \forall i,j$

$\Rightarrow A^c =$ è la matrice nulla che ha rango 0

Suppongo $\operatorname{rg} A = n-1$. $\quad f_A : K^n \longrightarrow K^n \qquad \operatorname{rg} f_A = n-1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{\dim \operatorname{Im} f_A}$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = n-(n-1) = 1$

$$\begin{tikzcd}K^n \arrow[r, "f_{A^c}"] \arrow[rr, bend left, "0"] & K^n \arrow[r, "f_A"] & K^n\end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto Ax$$

$$x \longrightarrow A^c x \longmapsto AA^c x = (\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\det A}) \cdot 1\!\!1_n x = 0$$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f_{A^c} \subseteq \underset{\overset{\uparrow}{\dim 1}}{\operatorname{Ker} f_A}$

- $\dim \operatorname{Im} f_{A^c} = 0$ ossia $\operatorname{Im} f_{A^c} = 0$ ossia $A^c = 0$
- $\dim \operatorname{Im} f_{A^c} = 1 \Rightarrow \operatorname{rg} f_{A^c} = \operatorname{rg} A^c = 1$

Il primo caso si presenta quando $\operatorname{rg} A < n-1$

Il secondo " " $\operatorname{rg} A = n-1$

Infatti nel secondo caso esiste una sottomatrice quadrata di ordine $n-1$ con determinante $\neq 0 \Rightarrow A^c \neq 0$

~

§ Principio dei minori orlati

Sia $A \in M_{m,n}(K)$ So che A ha rango r se tutti i minori di ordine $r+1$ sono nulli e se c'è uno di ordine r non nullo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

4 det di matrici 3×3 da controllare siano 0 (Troppi!)

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

PMO dice che: $\text{rg} A = r$ se e solo se esiste un minore di ordine r, sia $\det A' \neq 0$ con A' sottom.$^{\text{ce}}$ quadrata di A di ordine r, e sono nulli tutti i minori di ordine $r+1$ che si ottengono da sottomatrici di A che contengono A'

Dim $\Rightarrow$) $\text{rg} A = r$ tutti i minori di ordine $r+1$ sono nulli in particolare quelli che provengono da sottomatrici contenenti A'.

$\Leftarrow$) Osservo che le op. elementari non variano la nullità del determin.

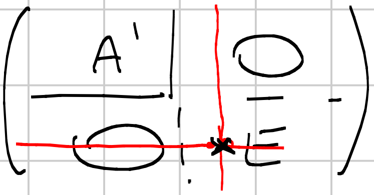
Posso assumere che A' sia ottenuta cancellando le ultime $n-r$ righe e le ultime $n-r$ colonne

$$A = \begin{array}{c|c|c|c} & r & n-r & \\ r & A' & B & r \\ n-r & C & E & n-r \\ & r & n-r & \end{array}$$

$\text{rg} A' = r \Rightarrow \det A' \neq 0$

Con operazioni elementari $\rightsquigarrow$ $C = 0$ perché $\text{rg}\begin{pmatrix} A' \\ \hline C \end{pmatrix} = r$

$B = 0$ $\quad \text{rg}(A' | B) = r$



Se $E \neq 0_m$ $\text{rg} A = r = \text{rg} A'$

Se $E \neq 0_{\text{matr}}$

Se $x = a_{ij}$ con $i > r$ $j > r$ (coeff. in E)

Se orlo A' con la riga i e la colonna j

$$\det \begin{pmatrix} A' & \vdots \\ 0 \cdots 0 & x \end{pmatrix} = \det A' \cdot x \begin{cases} x \neq 0 & \text{è non nullo} \Rightarrow \text{rg} A > r \\ x = 0 & \text{è nullo.} \end{cases}$$

$\text{rg} A = r \iff E = 0 \iff$ tutti i minori ottenuti orlando A' (con righe e colonne che coinvolgono E) sono nulli. $\boxtimes$

Applicaz. Calcolo di eq. cartesiane di sottospazi di K^n

$W = \langle w_1, \ldots, w_r \rangle \leq K^n$ $\quad \dim W = r < n$

$$\text{rg} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & & & \\ \vdots & w_1 & w_2 & \cdots w_r \\ x_n & & & \end{pmatrix}}_{A} = r$$

dipende dai w_i

Individuare un minore non nullo di ordine r nella matrice $(w_1, \cdots w_r)$ e orlare la corrispondente sottomatrice di A imponendo $\det = 0$.

Esempio $W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{R}^4$

$$\text{rg}\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & -1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 \\ x_4 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

anche rispetto a questo stesso risult

Individuo sottomatrice 2×2 di det. ≠ 0

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & -1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \det\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & -1 & 0 \\ x_4 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\boxed{x_3 = 0} \qquad 1.(x_2+x_4) - (-x_1-x_2) = 0$$

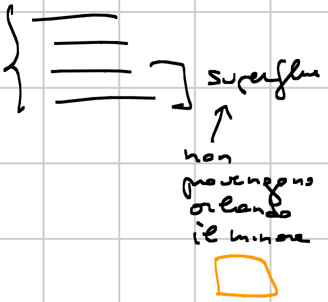
$$\boxed{x_1 + 2x_2 + x_4 = 0}$$

eq cart. di W $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$

Controllo! $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$ sono soluz. del sistema. ✓

Attenzione: non prendere mai ~~il~~ un minore di ordine 2 nullo ossia sottomatrice 2×2 con det 0.

Senza il PMO avrei dovuto imporre 4 det. = 0



{ Regola di Cramer

Sia $A \in M_n(K)$ e sia $Ax = b$, $b \in K^n$, sistema quadrato (n incognite n equazioni)

Se $\det A \neq 0$, A è invertibile $\cancel{A^{-1}A}x = A^{-1}b$

la soluz. del sistema è unica ed è $\boxed{x = A^{-1}b}$

Sia $x = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$ l'unica soluzione del sistema sopra. La regola di Cramer dice

che $x_i = \dfrac{1}{\det A} . \det A_i$ dove A_i è la matrice ottenuta da A sostituendo la colonna i-esima con b (colonna dei termini noti)

Dimostriamola: So che $x = A^{-1}b = \dfrac{1}{\det A} . A^c b$

$$x_i = \frac{1}{\det A} . (\text{riga i-esima di } A^c) . b = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} a^c_{ij} b_j =$$

$$= \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{ji})\, b_j = \frac{1}{\det A} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \overset{a_{ji}}{b_j} \det(A_{ji})}$$

matrice ottenuta cancell. riga j e colonna i di A

lo sviluppo di Laplace rispetto alla colonna i-esima del det della matrice A_i

$$= \frac{\det(A_i)}{\det A}.$$

$\square$

(NB) è più facile risolverlo con Gauss! $n>2$.

~

$f: V \longrightarrow W$

V dim n e W ~~di~~ dim m

$\mathcal{V} \leftarrow$ basi $\rightarrow \mathcal{W}$

$\mathcal{V}' \leftarrow \quad \rightarrow \mathcal{W}'$

$A = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(f)$.

$\}$ legame tra queste matrici?

$B = \alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{W}'}(f)$

Come posso trovare tutte le matrici t.c. rappresentino f per scelta opportuna di basi su V e W?

~

Lezione 32. Autovettori e autovalori

Note Title

§ Forme canoniche di matrici

$f: V \longrightarrow W$ appl. lineare $\qquad \mathcal{V}$ base di V, $\mathcal{W}$ base di W fissate

v ha coord $K^n \ni x$ risp. a $\mathcal{V}$ $\qquad$ $f(v)$ ha coord $y \in K^m$ risp. a $\mathcal{W}$ $\qquad$ $A = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(f) \in M_{m,n}(K)$ $\qquad \boxed{Ax = y}$

se $\mathcal{V}'$ è base di V e $\mathcal{W}'$ è base di W

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V}\ V \arrow[r, "f"] & W\ \mathcal{W} \arrow[d, "id_W"] \\
V \arrow[u, "id_V"] \arrow[r, "f"'] & W \\
\mathcal{V}' & \mathcal{W}'
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{B = \alpha_{\mathcal{V}'\mathcal{W}'}(f) \in M_{m,n}(K) \\ \| \\ = QAP} \ \circledast$$

$P = \alpha_{\mathcal{V}'\mathcal{V}}(id_V) \in GL_n(K)$ $\qquad$ $Q = \alpha_{\mathcal{W}\mathcal{W}'}(id_W) \in GL_m(K)$

Def Siano $A, B \in M_{m,n}(K)$. La matrice B si dice equivalente alla matrice A se esistono $P \in GL_n(K)$, $Q \in GL_m(K)$ t.c. $B = QAP$.

Oss. Questa sopra è una relaz. di equivalenza.

- riflessiva $\quad A = 1\!\!1_m A 1\!\!1_n \quad$ ✓
- simmetrica: $\quad Q^{-1} B P^{-1} = Q^{-1} Q A P P^{-1} \qquad Q^{-1} B P^{-1} = A$
- transitiva: $\quad B = QAP$, $C = KBH \qquad K \in GL_m(K)$, $H \in GL_n(K)$

$$C = KBH = K(QAP)H = (\underset{GL_m(K)}{KQ})A(\underset{GL_n(K)}{PH}).$$

Oss. Se $f: V \longrightarrow W$ lineare e $A = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(f)$, $B = \alpha_{\mathcal{V}'\mathcal{W}'}(f)$, allora A e B sono equivalenti (visto in $\circledast$ sopra).

Vale anche il viceversa. Se C è equivalente ad A,

$C = QAP$, allora $C = \alpha_{\tilde{v},\tilde{w}}(f)$

$\tilde{\mathcal{V}}$ sarà t.c. $\alpha_{\tilde{v}v}(id_V) = P$ e $\alpha_{w,\tilde{w}}(id_W) = Q$

Questo basta perché $\tilde{\mathcal{V}} = \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \dots \tilde{v}_n\}$

: $\tilde{v}_j$ hanno come coordinate risp alla base $\mathcal{V}$ la j-esima colonna di $P = (p_{ij})$

$$\tilde{v}_j = \sum_{i=1}^{m} p_{ij} v_i \qquad \text{se} \qquad \mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$$

Analogamente $\alpha_{\tilde{w}w}(id_W) = Q^{-1}$. Quindi $\tilde{\mathcal{W}}$ è univocam. def. e risulta $C = \alpha_{\tilde{v}\tilde{w}}(f)$. $\boxtimes$

Quando parlo di equivalenza di matrici sto studiando quali matrici rappresentano la stessa appl. lineare

Scopo: cercare rappresentanti "belli" in ogni classe di equivalenza.

<u>Esercizio</u> Sia $f: K[x]_{\le 1} \hookrightarrow K[x]_{\le 2}$ $\qquad \mathcal{E} = \{1, x\} \quad \mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$

$$1 \longmapsto -1+2x$$
$$x \longmapsto 3x^2 - 5x$$

$$\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = A$$

$rg\, f = 2 = rg\, A = 2$

f iniettiva.

Sia $\mathcal{W} = \{-1+2x, 3x^2-5x, 1\}$ base del codominio

$$\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{W}}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbb{1}_2 \qquad 2 = rg\, A$$

<u>Teorema</u> (di classificazione delle matrici a meno di equivalenza)

Due matrici $A, B \in M_{m,n}(K)$ sono equivalenti se e solo se hanno lo stesso rango. In particolare se $rg\, A = r$ allora

A è equivalente a $\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)}_{n} \Big\}m \longrightarrow I'_r$

ⓃⒷ $r \le \min(n, m)$

<u>Dim</u> Iniziamo mostrando che A di rango r è equivalente alla matrice

I'_r.

$$f_A : K^n \longrightarrow K^m \qquad x \longmapsto Ax \qquad \alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f_A) = A.$$

$\operatorname{rg} A = r \iff \operatorname{rg} f_A = r \iff \dim \operatorname{Im} f_A = r \iff \dim \operatorname{Ker} f_A = n-r$.

Sia $\mathcal{V}$ una base di K^n ottenuta completando una base di $\operatorname{Ker} f_A$ come segue $\mathcal{V} = \{v_1, \dots v_r, v_{r+1}, \dots v_n\}$ con $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ base di $\operatorname{Ker} f_A$

(se $r=n$, ossia f_A è iniettiva scelgo una base qualsiasi del dominio)

Ricordo: $f_A(v_1), \dots, f_A(v_r)$ sono l. indip. (generano $\operatorname{Im} f_A$)

Sia $\mathcal{W} = \{f_A(v_1), \dots, f_A(v_r), w_{r+1}, \dots, w_m\}$ (se f_A è suriettiva non serve aggiungere i w_i)

$$\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(f_A) = r\left(\begin{array}{cccc|c} \overset{r}{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbb{1}_r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: I'_r$$

$\uparrow$ coord di $f_A(v_1)$ risp. $\mathcal{W}$

$\uparrow$ notazione non standard

Quindi se A ha rango $r \Rightarrow A$ è eq. a I'_r

se B è un'altra matrice di rango r, B è eq. I'_r

$\overset{\text{(rel. di eq)}}{\Longrightarrow}$ A è equivalente a B.

Viceversa. Siano A e B equivalenti: $B = QAP$.

$\Rightarrow$ A e B hanno lo stesso rango perché rappresentano la stessa appl. lineari risp. a basi diverse e il rg è la dim dell'imag. $\boxed{1}$

Dalla dimostr. sopra vediamo che ogni classe di equivalenza delle matrici $M_{m,n}(K)$ ha un rappresentante "bello" che è $\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

<u>Osservazione</u> Si poteva ottenere lo stesso risultato anche usando l'algor. di Gauss.

Se A ha rango r con operazioni elementari sulle righe

$$\overbrace{E_s \cdots E_3 E_2 \underset{\uparrow \text{ matr el}}{E_1}}^{Q} A = \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * & 0 & * & * \\ 0 & & 1 & * & 0 & - & - \\ & & & & 1 & - & - \\ \vdots & & & 0 & & & \end{pmatrix}$$ avrò r pivot e sopra e sotto i pivot 0 (forma ridotta)

$$Q A \underbrace{E_1' E_2' \cdots}_{P'} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & * \\ 0 & 0 \end{array}\right)$$ con ult. operaz. el. sulle colonne arrivo alla forma $\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$QAP = I_r'$$

Osservazione: • Sia $O \in M_{m,n}(K)$ ha rango 0, $\mathbb{1}_0 \Rightarrow$ non c'è

$QOP = O$. La classe di eq. di O contiene solo O

• $$\begin{tikzcd} M_{m,n}(K) \arrow[r] & \{0,1,\dots,s\} \\ A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, twoheadrightarrow] & \operatorname{rg} A = r \\ M_{m,n}(K) / \text{rel. di eq.} \arrow[ur, "\text{biiezione}"'] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & \\ \left[\begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] & \end{tikzcd}$$ $s := \min(m,n)$

• se $m=n$ tutte le matrici invertibili sono equivalenti:

$$A \text{ è invertibile} \iff \operatorname{rg} A = n$$

* * *

NB Nella descrizione sopra erano ammessi cambi di base sia nel dominio sia nel codominio.

- Cosa succede se tengo bloccata la base nel dominio e cambio solo quella nel codominio? $A \sim QA\mathbb{1}_n$
- Analogo bloccando la base nel codominio e cambiando quella del dominio

$$A \sim \mathbb{1}_m A P$$

* * *

Consideriamo ora endomorfismi: $f: V \longrightarrow V$ e supponiamo di fissare la stessa base nel dominio e nel codominio

$A = \alpha_{vv}(f)$ $\qquad$ $B = \alpha_{v'v'}(f)$

$$\begin{tikzcd} V_v \arrow[r, "f"] & V_v \arrow[d, "id_V"] \\ V_{v'} \arrow[u, "id_V"] \arrow[r, "f"'] & V_{v'} \end{tikzcd}$$

$$B = \underset{\overset{\shortparallel}{P^{-1}}}{\alpha_{vv'}(id_V)} \cdot A \cdot \underbrace{\alpha_{v'v}(id)}_{\overset{\shortparallel}{P}}$$

Due matrici A, B che rappresentano lo stesso endomorfismo risp. ad opportune basi (stessa nel dominio e nel codominio) sono legate da

$$\boxed{B = P^{-1}AP} \quad (**)$$

Def Siano A, B matrici in $M_n(K)$. Si dice che B è simile ad A se esiste una $P \in GL_n(K)$ t.c. $B = P^{-1}AP$

Si verifica che è una rel. di equivalenza.

- rifl. $P = \mathbb{1}_n$
- simmetrica: $B = P^{-1}AP \Rightarrow PBP^{-1} = A$
- transitiva se $B = P^{-1}AP$, $C = Q^{-1}BQ$ allora
  $C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$ ✓

Non è facile classificare le matrici $M_m(K)$ a meno di similitudine

Osservazione. Se A e B in $M_n(K)$ sono simili allora sono equivalenti
$B = \underbrace{P^{-1}}_{Q} AP$. Non vale il viceversa!

- La matrice $\mathbb{1}_n$ è simile solo a se stessa (ma equivalente a tutte le matrici invertibili)
  Infatti $P^{-1}\mathbb{1}_n P = B \Rightarrow P^{-1}P = B \Rightarrow \mathbb{1}_n = B$
- La matrice $0 \in M_n(K)$ è simile solo a se stesso.
- Ogni matrice scalare è simile solo a se stessa $\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$
  $P^{-1}(\lambda\mathbb{1}_n)P = \lambda\mathbb{1}_n$

~

Esempi di matrici "interessanti" quadrate

- matrici diagonali $D = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix}$

Sia $f: V \longrightarrow V$ endomorf con $\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(f) = D$
con $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$

$f(v_1)$ è il vettore che ha coord. $\begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ risp. a $\mathcal{V}$

$\|$

$d_1 v_1$

$$\boxed{f(v_j) = d_j v_j}$$

- matrici triangolari superiori $\quad T = \begin{pmatrix} d_1 & & * \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots \; d_n \end{pmatrix} = (t_{ij})$

$f : V \longrightarrow V$

$\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(f) = T \qquad \mathcal{V} = \{v_1, v_2 \dots\}$

$f(v_1)$ ha coordinate $\begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(v_1) = d_1 v_1 \qquad d_1 = t_{11}$

$f(v_2)$ ha coord. $\begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(v_2) = t_{12} v_1 + t_{22} v_2 \in \langle v_1, v_2 \rangle$

$f\langle v_1 \rangle \subseteq \langle v_1 \rangle \qquad$ (NB $\neq$ se $d_1 = 0$)

$f(\langle v_1, v_2 \rangle) \subseteq \langle v_1, v_2 \rangle$

$f(\langle v_1, \dots v_s \rangle) \subseteq \langle v_1, \dots, v_s \rangle$

f rispetta la bandiera di sottospazi $\langle v_1 \rangle \subseteq \langle v_1, v_2 \rangle \subseteq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subseteq \cdots$

Def a) Una matrice $A \in M_n(K)$ si dice diagonalizzabile (triangolarizzabile) se esiste $H \in GL_n(K)$ t.c. $H^{-1} A H$ è diagonale (triangolare superiore)

b) Un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ si dice diagonalizzabile (triangolarizzabile) se esiste una base $\mathcal{V}$ di V t.c. $\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(f)$ è diagonale (triangolare sup)

Lavoro: Capire quando A (risp. f) è diagonalizz. o triangolarizzabile.

NB diagonalizzabile $\Longrightarrow$ triangolarizzabile.

Def Sia $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo.

- Un vettore $\underset{\neq 0}{v} \in V$ si dice AUTOVETTORE per f se esiste un $\lambda \in K$ t.c. $f(v) = \lambda v$.
- Uno scalare $\lambda \in K$ si dice AUTOVALORE per f se esiste un

$0 \neq v \in V$ t.c. $f(v) = \lambda v$

(brevemente si dirà che $0 \neq v$ è autovettore di autovalore λ per f)

Sia $\lambda \in K$ autovalore per f.

$$V_\lambda(f) = \underset{\uparrow}{V_\lambda} = \{ v \in V \text{ t.c. } f(v) = \lambda v \} = \{0_V\} \cup \{ \text{autovettori di autov. } \lambda \text{ per } f \}$$

Autospazio di autovalore λ per f.

$V_\lambda(f) \leq V$ **Dim:** Siano $v, v' \in V_\lambda$ $\quad \alpha, \alpha' \in K$

$$f(\alpha v + \alpha' v') = \alpha f(v) + \alpha' f(v') = \alpha \lambda v + \alpha' \lambda v' = \lambda(\alpha v + \alpha' v')$$

$$\Longrightarrow \alpha v + \alpha' v' \in V_\lambda$$

Spettro di f = $\{$ insieme degli autovalori per f $\}$ (può essere $\emptyset$)

Lezione 33. Polinomio caratteristico. 617291

Note Title

Sia $A \in M_n(K)$. Se esistono $\lambda \in K$ e un $\underset{\neq 0}{x} \in K^n$ t.c. $Ax = \lambda x$ allora λ si dice autovalore di A e x si dice autovettore di A relativo all'autovalore λ.

$V_\lambda(A) = \{ x \in K^n$ t.c. $Ax = \lambda x \} = \{$ autovettori di autoval. $\lambda \} \cup \{0\}$ è sottosp. vett di K^n detto autospazio

(sono le nozioni analoghe a quelle viste per gli endomorfismi $f = f_A$)

Spettro di $A = \{$ autovalori di A in $K \}$

Osserv: • Se A è diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ lo spettro è dato dagli elementi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (event. con ripetizioni)

- Se $A = 1_n$ spettro è $\{1\}$
  $V_1(A) = K^n$
- Se $A = O_n$ $V_0(A) = K^n$
- Se 1 è un autovalore di A (risp. di $\varphi : V \longrightarrow V$)
  $V_1(A) = \{ x \in K^n$ t.c. $Ax = x \}$
  $V_1(\varphi) = \{ v \in V$ t.c. $\varphi(v) = v \}$ ← $V_1(\varphi)$ è il più grande sottospazio di V sul quale φ si comporta come l'identità
- Se 0 è autovalore di A (risp. di $\varphi : V \longrightarrow V$)
  $V_0(A) = \{ x \in K^n$ t.c. $Ax = \overset{0}{\cancel{0x}} \} = Sol(Ax = 0)$
  $V_0(\varphi) = \{ v \in V$ t.c. $\varphi(v) = \overset{0_V}{\cancel{0v}} \} = \ker \varphi$

In conclusione $0 \in K$ è autovalore di $\varphi \iff \ker \varphi \neq 0 \iff \varphi$ non è iniettiva

Lemma (criterio banale) Un endomorf. $\varphi : V \longrightarrow V$ è diagonalizzabile $\iff$ esiste una base di V formata da autovettori per φ.

Dim $\Leftarrow$) Se esiste $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V formata da autovettori per φ

$$\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ è diagonale

$$\left(\varphi(v_1)=\lambda_1 v_1 \;, \dots \varphi(v_j)=\lambda_j v_j \;\dots\; \varphi(v_n)=\lambda_n v_n\right)$$

dunque φ è diagonalizzabile.

$\Longrightarrow)$ Sia φ diagonalizzabile ossia sia $\mathcal{V} = \{v_1 \dots v_n\}$ base t.c.

$\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\varphi) = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ allora $\varphi(v_j) = \lambda_j v_j$

e dunque essendo $v_j \neq 0$ è un autovettore di autovalore λ_j

e quindi $\mathcal{V}$ è formata da autovettori. ◻

(nel caso delle matrici: A è diagonalizz. $\Longleftrightarrow$ esiste base di K^n formata da autovettori per A)

" idea Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ autovalori di $\varphi : V \longrightarrow V$

$V_{\lambda_i} := V_{\lambda_i}(\varphi)$, $\underbrace{V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s}}_{\text{base data da autovettori}} \leq V$

① $\oplus$

② sotto quali condizioni $\leq$ è $=$?

Se vale $=$ l'unione di basi di V_{λ_i} dà una base di V formata da autovettori per φ. $\Rightarrow$ φ sarà diagonalizz.

NB Se φ non ha autovalori (in K) non c'è speranza di diagonalizzazione. Ad es. · $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ con $\theta \neq k\pi$ non vi sono autovalori reali

· $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ abbiamo autovalori reali, $\lambda = 1$,

$V_1 = \langle e_1 \rangle \neq \mathbb{R}^2$

Lemma Autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti

Dim Sia $\varphi : V \longrightarrow V$ endom, siano $\lambda \neq \mu$ autovalori per φ

e siano $\underset{0}{\underset{\#}{v}} \in V_\lambda$ e $\underset{0}{\underset{\#}{v'}} \in V_\mu$.

(I) $0_V = av + bv'$ con $a, b \in K$

$0_V = \varphi(0_V) = a\varphi(v) + b\varphi(v') = a\lambda v + b\mu v'$ (II)

(II) $-\lambda$(I) $\rightsquigarrow$ $0_V = \cancel{a\lambda v} + b\mu v' - \cancel{\lambda a v} - \lambda b v'$

$0_V = b(\underset{0}{\underset{\#}{\mu - \lambda}})\underset{0_V}{\underset{\#}{v'}}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{b=0}$

Torno in (I) $\underset{\neq 0_V}{a v} = 0_V \Rightarrow \boxed{a=0}$. Dunque v e v' sono l. ind. ▨

Conseguenza: Se $\mu \neq \lambda$ sono autovalori di φ, $V_\lambda \oplus V_\mu$
(esercizio: $V_\lambda \cap V_\mu = \{0\}$)

Lemma Siano $\lambda_1, \dots \lambda_r$ autovalori distinti per $\varphi : V \longrightarrow V$

Allora $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus V_{\lambda_3} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r} \leq V$.

Dim Ricordo che $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_r}$ è diretta se e solo se ogni vettore $v \in \sum_{i=1}^{r} V_{\lambda_i}$ si scrive in modo unico come $v = \sum_{i=1}^{r} v_i$ con $v_i \in V_{\lambda_i}$.

se e solo se ($v_1 + v_2 \cdots + v_r = 0_V$ con $v_i \in V_{\lambda_i}$ se e solo se $v_i = 0_V \ \forall i$)

Siano allora v_i autovettori di autovalore λ_i, $1 \leq i \leq r$

e supponiamo $v_1 + \dots + v_r = 0_V$ (I)

$\varphi(v_1 + \dots + v_r) = \varphi(0_V) = 0_V$

$\|$

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_r v_r = 0_V$ (II)

(II) $- \lambda_r$(I) $(\lambda_1 - \lambda_r) v_1 + (\lambda_2 - \lambda_r) v_2 + \dots (\lambda_{r-1} - \lambda_r) v_{r-1} = 0$

Per induzione si conclude ($r = 2$ noto dal caso precedente)

$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_r)}_{\neq 0} v_1 = 0 \ \cdots \cdots \ (\underbrace{\lambda_{r-1} - \lambda_r}_{\neq 0}) v_{r-1} = 0$

$\Rightarrow v_1 = 0_V = \dots = v_{r-1}$ In (I) rimane $\boxed{v_r = 0_V}$

Lemma (criterio banale) φ è diagonalizzabile $\Longleftrightarrow V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_{\lambda_i}(\varphi)$
con $\lambda_1, \dots \lambda_r$ autovalori di V

Dim $V \geq \bigoplus V_{\lambda_i}(\varphi)$. Dire che esiste base di V formata da autovettori è equivalente a dire che c'è =

Conseguenza Se $\varphi : V \longrightarrow V$ endomorfismo con $\dim V = n$ ha n autovalori distinti allora φ è diagonalizzabile

Dim Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autovalori

$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_n} \leq V$

$\dim V_{\lambda_i} \geq 1$ $\dim \bigoplus V_{\lambda_i} \geq n$ ma $\bigoplus V_{\lambda_i} \leq V \Rightarrow \dim \bigoplus V_{\lambda_i} = n$

$\Rightarrow \bigoplus V_{\lambda_i} = V$ ☒

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ A e quindi $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ha autovalori 1, 2 distinti (lo vedremo)

$Ae_1 = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e_1 è autovettore di autovalore 1

$A\begin{pmatrix} 3 \\ +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore - - - - - 2

$v = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{verificare!})$$

* * *

Osservaz. $\lambda \in K$ è autovalore per A $\iff$ esiste $\underset{\neq 0}{v} \in K^n$ t.c. $Av = \lambda v$

$\iff \exists \underset{\neq 0}{v} \in K^n$ t.c. $Av - \lambda v = 0_V \iff \exists \underset{\neq 0}{v} \in K^n$ t.c. $\underbrace{(A - \lambda 1\!\!1_n)}_{\in M_n(K)} v = 0_V$

$\iff rg(A - \lambda 1\!\!1_n) < n \iff \det(A - \lambda 1\!\!1_n) = 0$

Def Si dice polinomio caratteristico di A il polinomio $\det(x 1\!\!1_n - A) = \underset{\in K[x]}{p_A(x)}$

$$\begin{pmatrix} x & & 0 \\ & x \ddots & \\ 0 & & x \end{pmatrix} - A = \begin{pmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & \vdots \\ -a_{21} & x - a_{22} & & \vdots \\ & & & \vdots \\ \cdots & & & x - a_{nn} \end{pmatrix}$$

$p_A(x) = x^n + \cdots\cdots$ è un polinomio monico di grado n

ⓝⓑ $\det(A - x 1\!\!1_n) = (-1)^n \det(x 1\!\!1_n - A) = (-1)^n p_A(x)$

Lemma Gli autovalori di A sono gli zeri in K del polinomio caratteristico $p_A(x)$

Dim $\lambda \in K$ è autovalore per A $\iff \det(A - \lambda 1\!\!1_n) = 0 \iff \det(\lambda 1\!\!1_n - A) = 0$

$\iff p_A(\lambda) = 0$ ☒

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -3 \\ 0 & x-2 \end{pmatrix} = (x-1)(x-2)$

Gli zeri (≡ gli autovalori) sono 1, 2.

(NB) Se A è triangolare superiore (o inferiore) gli autovalori sono i termini sulla diagonale. In particolare se sono tutti distinti A sarà diagonalizzabile!

Suggerimento: invece di calcolare $p_A(x)$ è meglio calcolare $(-1)^n p_A(x)$

$$\det(A - x\mathbb{1}_n) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots \\ \vdots & a_{22}-x & \\ \vdots & & \ddots & a_{nn}-x \end{pmatrix}$$

Gli autovettori si trovano così:

Sia $\lambda \in K$ autovalore per A $\quad V_\lambda := \{ v \in K^n \text{ t.c. } Av = \lambda v \}$

$= \{ v \in K^n \text{ t.c. } (A - \lambda \mathbb{1}_n)v = 0 \}$

$= \underset{\text{del sis.}}{\text{Sol.}} \left((A - \lambda \mathbb{1}_n)\underline{x} = 0 \right)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$V_1 \quad (A - 1\mathbb{1}_2)\underline{x} = 0 \quad \left(\begin{array}{cc|c} \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$ Sol: $\langle e_1 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

$V_2 \quad \left(A - 2\mathbb{1}_2 \,\middle|\, \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \quad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad -x_1 + 3x_2 = 0 \quad \begin{pmatrix} 3a \\ a \end{pmatrix}$

$L = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

(NB) $p_A(x)$ è invariante per similitudine.

$P^{-1}AP = B$. Mostro che $p_A(x) = p_B(x)$

$$p_B(x) = \det(\underbrace{x\mathbb{1}_n}_{\begin{pmatrix} x & & \\ & \ddots & \\ & & x \end{pmatrix}} - P^{-1}AP) = \det(x\mathbb{1}_n \cdot P^{-1}P - P^{-1}AP) =$$

$$= \det(P^{-1}(x\mathbb{1}_n)P - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(x\mathbb{1}_n - A)P)$$

$$= \underbrace{\det(P^{-1})}_{\cancel{\frac{1}{\det P}}} \cdot \det(x\mathbb{1}_n - A) \cdot \cancel{\det P} = p_A(x)$$

$p_\varphi(x) = p_A(x)$ $\qquad$ $\varphi: V \longrightarrow V$ endom $\qquad$ $A = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\varphi)$

• **Osservazione**: Sia $A = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\varphi)$ $\qquad$ $\varphi: V \longrightarrow V$ $\qquad$ $\mathcal{V}$ base

$\lambda \in K$ è autovalore di $\varphi \iff \lambda$ è autovalore di A

$\iff \lambda$ è zero di $p_\varphi(x)$

$v \in V$ è autovettore di $\varphi \iff$ le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{V}$ è un autovettore di A.

$\lambda \in K$ è autovalore per $\varphi \iff \varphi(v) = \lambda v$ per un $\underset{\neq 0}{v} \in V$

Siano $\underline{y} \in K^n$ le coordinate di $\varphi(v)$ risp. a $\mathcal{V}$

$\underline{x} \in K^n$ . . . . . v . . . . . $\mathcal{V}$

so che $A\underline{x} = \underbrace{\underline{y} = \lambda \underline{x}}_{\text{perché } \varphi(v) = \lambda v}$

~

$$p_A(x) = \det\left(x\mathbb{1}_n - A\right) = \det\begin{pmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & x-a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ -a_{n1} & & & x-a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots\cdots + b_n$$

$b_m =$ termine noto $= p_A(0) = \det(0\mathbb{1}_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A$

NB $\boxed{b_m = 0 \iff \det A = 0} \iff$ (0 è autovalore)

$$b_1 = -a_{11} - a_{22} \cdots - a_{nn} = -\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}}_{\text{traccia}} = -\mathrm{tr}(A)$$

~

{ criterio di triangolarizzabilità

Quando data $A \in M_n(K)$ esiste $P \in GL_n(K)$ t.c. $P^{-1}AP = T$ triang. sup?

Prop $A \in M_n(K)$ è triangolarizzabile $\iff$ "ha tutti gli autovalori in K" significa

i.e. $p_A(x)$ ha tutti gli zeri in K

Dim $\Rightarrow$) banale. Sia $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix} =: T \in M_n(K) \Rightarrow p_A(x) = p_T(x)$

$$p_T(x) = \det \begin{pmatrix} x-\lambda_1 & & * \\ & x-\lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; x-\lambda_n \end{pmatrix} = (x-\lambda_1)\cdots\cdots(x-\lambda_n) \qquad \lambda_i \in K$$

$\Leftarrow$) Per induzione. Se $n=1$ banale ogni matrice 1×1 è triangolare

Suppongo vero per matrici in $M_{n-1}(K)$

So che $p_A(x)$ ha tutti gli zeri in K. Sia $\lambda_1 \in K$ uno di questi. È un autovalore di A. Sia $\underset{0}{v_1} \neq \in K^n$ un autovettore di autovalore λ_1. Sia $\mathcal{V} = \{\underset{\text{autovett.}}{v_1}, \underbrace{v_2 \dots v_n}_{\text{non necess. autovettori}}\}$ base di K^n

$$A' = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & \\ \vdots & \underbrace{\boxed{B}}_{n-1}\;{\scriptstyle n-1} \\ 0 & \end{pmatrix} \qquad P = (v_1, v_2 \dots v_n)$$

$$p_{A'}(x) = p_A(x) = (x-\lambda_1)\cdot p_B(x)$$

ha tutti gli zeri in K

Dunque $p_B(x)$ ha tutti gli zeri in K per ipotesi induttiva B è triangolarizzab.

$\exists\ Q \in GL_{n-1}(K)$ t.c. $Q^{-1}BQ = T$ triangolare in $M_{n-1}(K)$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array}\right) A' \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & Q \\ 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array}\right) \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & b \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right)} =$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & bQ \\ \hline 0 & \\ \vdots & BQ \\ 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & bQ \\ \hline 0 & Q^{-1}BQ \end{array}\right)$$

$$\text{matrice triang superiore} \sim \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & bQ \\ \hline 0 & \\ \vdots & T \\ 0 & \end{array}\right)$$

$\square$

Conseguenza ogni $A \in M_n(\mathbb{C})$ è triangolarizzabile.