Geometria 1 - mod. A - Lezione 32

Note Title

$\varphi: V \longrightarrow V$ endom. $\left\langle \begin{array}{l} \text{autovalore} \in K \\ \text{autovettore} \in V \end{array} \right.$

$\left(\begin{array}{l} A \in M_n(K) \\ f_A : K^n \longrightarrow K^n \\ \text{autov* di } A \text{ sono} \\ \text{gli autov* di } f_A \end{array} \right)$

Se $\exists\, v \neq 0$ t.c. $\varphi(v) = \lambda v$, si dice che λ è autovalore e v è un autovettore rel. a λ

Se λ è un autovalore di φ

$$V_\lambda(\varphi) = \{ v \in V \text{ t.c. } \varphi(v) = \lambda v \}$$

$$: \{0\} \cup \{\text{autovettori di } V \text{ relativi a } \lambda\}$$

$1 \leq \dim V_\lambda$ si dice nullità di λ o ~~anche~~ molteplicità geometrica di λ

<u>autospazio</u> relativo all'autovalore λ

$\angle$ si dimostra che $V_\lambda(\varphi)$ è sottosp. vett. di V

se $v_1, v_2 \in V_\lambda$ e $\alpha, \beta \in K$

$$\varphi(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha \varphi(v_1) + \beta \varphi(v_2) = \alpha \lambda v_1 + \beta \lambda v_2$$

$$= \lambda(\alpha v_1 + \beta v_2) \Longrightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in V_\lambda$$

Ricordo: autovettori relativi ad autovalori distinti sono l. indip.

$u_1, \dots, u_m \in V$ $\quad \varphi(u_i) = \lambda_i u_i$ $\quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in K$ sono a 2 a 2 distinti

allora $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m = 0 \Longrightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i$

Esercizio: ridimostrarlo "a mano" per induzione

$\circledast$ $u_1 + u_2 = 0 \Longrightarrow \varphi(u_1 + u_2) = 0$

$$\varphi(u_1) + \varphi(u_2) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$$

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0 \longleftarrow$ tolgo λ_1 volte la $\circledast$

$\cancel{\lambda_1 u_1 - \lambda_1 u_1} + \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} u_2 = 0 \Longrightarrow u_2 = 0 \Rightarrow$ abbiamo che

$u_1 + u_2 = 0 \iff u_1 = 0,\ u_2 = 0$

$u_1 + u_2 + \dots + u_m = 0 \iff u_1 = 0 = u_2 \dots = u_m$ per induzione

Quanto visto si può riscrivere nel modo seguente:

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$ autovalori a 2 a 2 distinti di φ

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_m} \leq V$$

Noto che φ è diagonalizzabile $\iff$ V ammette una base formata da autovettori di φ

$\iff$ detti $\lambda_1, \dots \lambda_m$ tutti gli autovalori di φ si ha $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_m} = V$

Infatti: una base di V si ottiene unendo basi dei V_{λ_i}

$V = \underset{\neq 0}{U} \oplus \underset{\neq 0}{W}$ $\qquad \pi_U^W : V \longrightarrow V$, $\quad u+w \longmapsto u$

$\operatorname{Ker} \pi_U^W = W \overset{!}{=} V_0$

($\varphi : V \longrightarrow V$ se $0 \neq \underset{\underset{V_0(\varphi)}{\|}}{\operatorname{Ker}\varphi} = \{v \in V \text{ t.c. } \varphi(v) = \underset{\underset{0 \cdot v}{\|}}{0_V}\}$

se $\operatorname{Ker}\varphi \neq 0$ allora 0 è un autovalore e i vettori del nucleo non nulli sono autovettori di autovalore 0)

$u \in U$

$\pi_U^W(u) = u = 1 \cdot u$

Dunque $U \subseteq V_1(\pi_U^W)$ $=$

NB se $\pi_U^W(u+w) = u+w$ $\iff$ $w = 0$

$V = V_1 \oplus V_0$ dunque π_U^W è diagonalizzabile

scegliendo base di V $\quad \mathcal{B} = \{u_1, \dots u_m, w_1, \dots w_r\}$
con $\{u_1, \dots u_m\}$ base di U e $\{w_1, \dots w_r\}$ base di W

$$\alpha_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\pi_U^W) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_m & 0 \\ 0 & 0_r \end{pmatrix} \leftarrow \text{diagonale!}$$

<u>Esercizio</u> Capire cosa succede σ_U^W $\qquad V = U \oplus W$

$u \in U \qquad \sigma_U^W(u) = 1 \cdot u = u$

$w \in W \qquad \sigma_U^W(w) = (-1)w$

Esercizio Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $f_A : K^4 \longrightarrow K^4$

$A = \alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f_A)$

Domanda: A è diagonalizzabile? Se sì trovare una base $\mathcal{B}$ di K^4 formata da autovettori e scrivere $\alpha_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f_A)$

$$\operatorname{rk} A = 4 \iff \det A \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

$$+3 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)(-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-2) = -6 \neq 0$$

Ho capito che non c'è autovalore 0

Passo 1: cerco autovalori come zeri di $p_A(x) = |x \mathbb{1}_4 - A|$

$$= \det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ -2 & x+3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & x-3 \end{pmatrix}$$

(molto più semplice: $p_A(x) = \pm |A - x \mathbb{1}_4|$, $\pm = (-1)^n$) $A \in M_n(K)$

gli zeri dei due polinomi sono gli stessi.

$$\det \begin{pmatrix} 0-x & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-x & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3-x \end{pmatrix} =$$

$$= (3-x) \begin{vmatrix} -x & -1 & 0 \\ 2 & -3-x & 0 \\ 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = (3-x)(-1-x) \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 2 & -3-x \end{vmatrix}$$

$$= (3-x)(-1-x)\left[-x(-3-x) + 2\right]$$

$$= (3-x)(-1-x)\left[\underbrace{3x + x^2 + 2}_{(x+2)(x+1)}\right]$$

$$p_A(x) = (x-3)^1 (x+1)^2 (x+2)^1$$

1 = molteplicità algebrica di -2

2 = molt. alg. di -1

1 = ... di 3

Autovalori di A: $\{-2, -1, 3\}$ ← spettro di A (insieme degli autovalori)

Deduco che A è triangolarizzabile.

Cambio orario:

Mercoledì 21/12 annullata

Giovedì 22/12 da fissare 8:30 - 10:15? o 11:30-12:15 (da decidere)

Ricevimento Merc. 21/12 sospeso.

Trovo gli autospazi ossia devo ~~trov~~ descrivere gli ~~autovalori~~ autovettori di A

$\lambda = -2$ $\quad A v = -2v = (-2)\mathbb{1}v \quad (A-(-2)\mathbb{1}_4)v = 0$

$V_{-2} = Sol[(A+2\mathbb{1}_4)x = 0] \neq 0$ (perché -2 è autovalore)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 = \frac{1}{2}x_2 = -\frac{5}{4}a$

$x_2 = -\frac{5}{2}a$

$x_3 = 0$

$x_4 = a$

ad es. $a = 4$

$\dim V_{-2} = 4 - 3 = 1$ ← nullità dell'autovalore -1

$$V_{-2} = \left\langle \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}}_{= v_1} \right\rangle$$

$$A\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

verificato!

[se $p_A(x) = (x-\lambda)^m \cdot q(x)$ con $q(\lambda) \neq 0$ ($\Leftrightarrow$ $x-\lambda$ non divide $q(x)$)
m si dice molteplicità algebrica dell'autovalore λ]

Studio V_{-1}

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)}_{A+\mathbb{1}_4}$$

rango 2 $\Rightarrow$ $\dim V_{-1} = 4-2=2$ ← nullità di -1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 = -2b$

$x_2 = -2b$

$x_3 = a$

$x_4 = b$

$$V_{-1} \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ \cancel{2}x_2 + \cancel{4}^{2}x_4 = 0 \end{cases}$$

$$= \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} +2 \\ +2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{= v_3} \right\rangle$$

verifico: $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A v_3 = -v_3$

$$V_3 = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= v_4} \right\rangle$$

molt. geom. di 3 è 1

$$\overbrace{V_{-2} \oplus V_{-1} \oplus V_3}^{\text{dim } 4} \;\leq\; K^4$$

V_{-2}: dim 1, V_{-1}: dim 2, V_3: dim 1

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è base di K^4 formata da autovettori

$$\alpha_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D \quad \leftarrow \text{ diagonale}$$

$$\boxed{\underbrace{P^{-1}}_{\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(id)} \underbrace{A}_{\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f_A)} \underbrace{P}_{\alpha_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(id)} = \underbrace{D}_{\alpha_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f_A)}}$$

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 10 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

P non è unica: scelte altre basi degli autospazi trovo ~~...~~ altre matrici possibili.

<u>Teorema</u> (1° criterio di diagonalizzabilità)

$A \in M_n(K)$ è diagonalizzabile se e solo se

① $p_A(x)$ ha tutti gli zeri in K (A ha tutti gli autovalori in K)

② $\underbrace{\text{molteplicità algebrica di } \lambda}_{M(\lambda)} = \underbrace{\overset{\text{molt. geom}}{\text{molt. di } \lambda}}_{N(\lambda)}$

per ogni autovalore λ di A

NB Nell'esercizio preced. siamo in questa situazione

<u>Dim</u> Suppongo A diagonalizzabile

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda'_1 & & & 0 \\ & \lambda'_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda'_n \end{pmatrix} = D \quad \text{con } \lambda'_i \text{ non necess distinti}$$

diagonale.

$$p_A(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - \lambda'_i) \implies ① \text{ ok}$$

noto che se $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è la base di K^n t.c. $\alpha_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f_A) = D$

allora $f_A(v_i) = \lambda_i' v_i \implies v_i$ è autovettore

$\mathcal{B}$ sarà è base di autovettori

A meno di riordinare la base, posso supporre

$$D = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_1}^{M(\lambda_1)} & & & \\ & \overbrace{\lambda_2 \cdots \lambda_2}^{M(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overbrace{\lambda_s \cdots \lambda_s}^{M(\lambda_s)} \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sono a 2 a 2 distinti

$$M(\lambda_1) + \dots + M(\lambda_s) = n = \text{ord} A$$

$V_{\lambda_1} = \langle v_1, \dots, v_{M(\lambda_1)} \rangle$ $\quad V_{\lambda_2} = \langle v_{M(\lambda_1)+1}, \dots, v_{M(\lambda_1)+M(\lambda_2)} \rangle$ e

così via

$\Rightarrow \dim V_{\lambda_1} = M(\lambda_1)$

NB $\dim V_{\lambda_i} \geq M(\lambda_i)$ e siccome

$$\sum_{i=1}^{s} \dim V_{\lambda_i} = n = \sum_{i=1}^{s} M(\lambda_i) \implies \text{ottengo l'uguagl.}$$

$\Leftarrow)$ Suppongo che $M(\lambda_i) = N(\lambda_i)$ $\forall$ autovalore λ_i

$$P_A(x) = \prod (x - \lambda_i)^{M(\lambda_i)}$$

$$\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_s} = \sum_{i=1}^{s} N(\lambda_i) = \sum M(\lambda_i) = n$$

$$\underbrace{V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s}}_{\dim n} \leq V = K^n \implies =$$

dunque f_A è diagonalizz. perché esiste base formata da autovettori $\boxtimes$