

Geometria 1 - mod. A - Lezione 25

Note Title

è Dualità

$$V \xrightarrow{\text{forma}} V \xrightarrow{f} K \quad f \in V^* = \text{Hom}(V, K)$$

$\begin{cases} 0 \\ \text{ker } f = \text{ipercerchio di } V \end{cases}$

$$V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \quad V \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}$$

$$p(x) \mapsto p(0) \quad \begin{matrix} \uparrow \\ a \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

è forma

$\mathcal{U} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di $V \sim \mathcal{U}^* = \{v_i^*\}$ base di V^*

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} \quad \begin{cases} 0 & * i \neq j \\ 1 & * i = j \end{cases}$$

In generale un vettore in V^* viene indicato con v^*

$$v^*: V \rightarrow K$$

$$\varphi: V \rightarrow W \quad K\text{-linear}$$

$$\begin{matrix} \vdots \\ w_1^* \circ \varphi \\ \vdots \\ w_2^* \circ \varphi \\ \vdots \\ \downarrow \\ K \end{matrix} \quad \begin{matrix} \downarrow w^* \\ K \end{matrix}$$

$$\varphi^*: W^* \rightarrow V^*$$

$$\begin{matrix} \downarrow w^* \\ w^* \circ \varphi \\ \downarrow \\ K \end{matrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ K \end{matrix}$$

l'ho definito insieme.

Verifico che φ^* è lineare

Siano $w_1^*, w_2^* \in W^*$, $\alpha, \beta \in K$

$$\varphi^*(\underbrace{\alpha w_1^* + \beta w_2^*}_{w^*}) = (\alpha w_1^* + \beta w_2^*) \circ \varphi = (\alpha w_1^* + \beta w_2^*)(\varphi(-))$$

$$= \underbrace{(\alpha w_1^*)}_{\downarrow}(\varphi(-)) + \underbrace{(\beta w_2^*)}_{\downarrow}(\varphi(-)) = \alpha(w_1^* \circ \varphi) + \beta(w_2^* \circ \varphi) =$$

$$= \alpha \varphi^*(w_1^*) + \beta \varphi^*(w_2^*).$$

Ho quindi definito $\text{Hom}_K(V, W) \xrightarrow{(\quad)^*} \text{Hom}_K(W^*, V^*)$

$$\varphi \longmapsto \varphi^*$$

trasposta di φ

Mostriamo che è lineare. $\varphi, \psi \in V \rightarrow W$

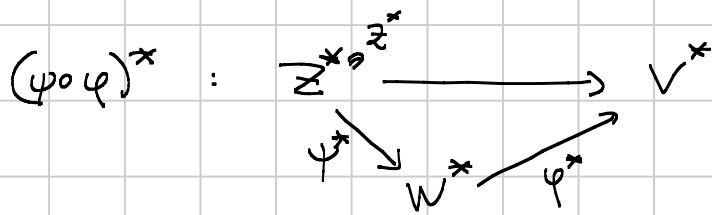
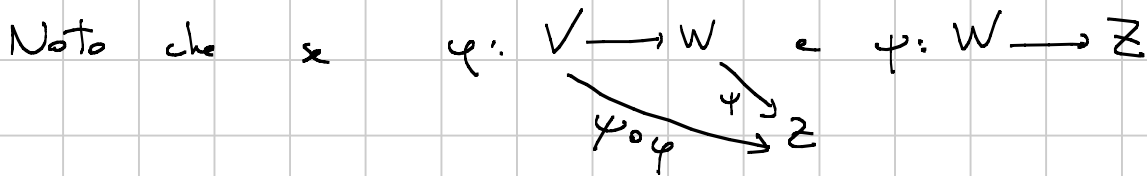
a) $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^* : W^* \rightarrow V^*$ b) $(\alpha\varphi)^* = \alpha\varphi^* \quad \forall \alpha \in K$

a) Sia $w^* \in W^*$ generico vettore

$$(\varphi + \psi)^*(w^*) = w^* \circ (\varphi + \psi) = w^* \circ (\underbrace{\varphi(-) + \psi(-)}_{\text{lineare}}) = w^*(\varphi(-)) + w^*(\psi(-))$$

$$= w^* \circ \varphi + w^* \circ \psi = \varphi^*(w^*) + \psi^*(w^*) \quad \checkmark$$

b) Esercizio.



$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$$

(Ricorda il $(\psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$ ma non sono legati.)

$$(\psi \circ \varphi)^*(z^*) = z^* \circ (\psi \circ \varphi) = (z^* \circ \psi) \circ \varphi = \underbrace{\psi^*(z^*)}_{w^*} \circ \varphi = \varphi^*(\psi^*(z^*))$$

$$= (\varphi^* \circ \psi^*)(z^*)$$

Def Sia $A \in M_{m,n}(K)$ $A = (a_{ij})$

La matrice trasposta di A è la matrice $A^t = (a_{ij}^t) \in M_{n,m}(K)$

con $a_{ij}^t = a_{ji}$

Ad es. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = A$

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

${}^t A = A^T$

Si verifica: $1^t = 1$, D diagonale $\Rightarrow D^t = D$

Ⓢ) Nella trasposizione di matrici quadrate la diagonale rimane fissa.

• La riga i -esima di A^t è la trasposta della colonna i -esima di A .

• $(A^t)^t = A$

• $(AB)^t = B^t A^t$

$C = AB$

C^t

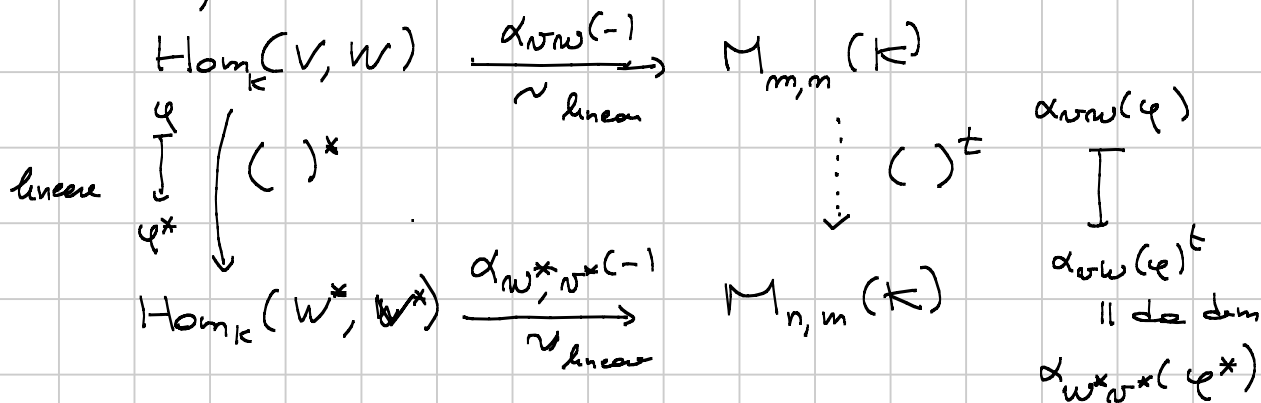
$c_{ij}^t = c_{ji} =$ riga j -esima di A · colonna i -esima di B
 il coeff. di posto i, j di $B^t A^t$ è:
 il prodotto delle riga i -esima di B^t · la colonna j -esima di A^t

Basta mostrare che $\left[(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \right]^t = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \in K$

$= (b_1, \dots, b_n) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$

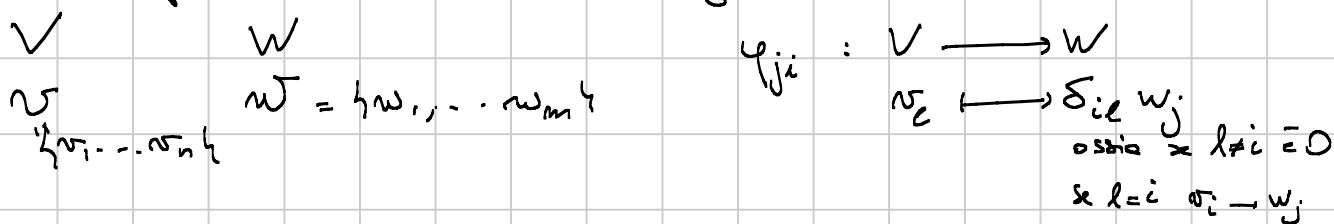
Esercizio Verificare che $(\cdot)^t$ è esercizio. lineare $(A+B)^t = A^t + B^t$ □
 $(\alpha A)^t = \alpha A^t$

Siano V, W K -spazi vettoriali, sono \mathcal{V}, \mathcal{W} basi di V e W
 $\dim V = n, \dim W = m$.



Da dim $\alpha_{W, W}(\varphi)^t = \alpha_{W^*, V^*}(\varphi^*)$

Basta verificare che coincidono sugli elem. di una base.



Rimane da verificare che $\alpha_{W^*, V^*}(\varphi_{ji}^*) = \alpha_{W, W}(\varphi_{ji})^t$ ☒

Esercizio di ripasso $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^3$ la proiezione sul

piano $x+y=0$ nella direzione di e_2

Determinare la matrice di π rispetto alla base canonica
 partendo dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ ottenuto fissando base
 particolare.

⊗ NB $\alpha_{\text{row}}(\varphi_{ji}) = E_{ji}$ matrice in $M_{m,n}(K)$ avente 0 ovunque tranne un 1 in posizione (j,i)

Domque $\alpha_{\text{row}}(\varphi_{ji})^t = E_{ji}^t = E_{ij}$ (1 in posizione (i,j) e 0 altrove)

L'entrata di posto (k,l) di $\alpha_{W^*V^*}(\varphi_{ji}^*)$ è data dalla coordinata k -sima risp. a V^* dell'immagine di $\varphi_{ji}^*(w_l^*)$ \uparrow l -esimo el. della base W^*

Ora $\varphi_{ji}^*(w_l^*) = w_l^* \circ \varphi_{ji} : V \longrightarrow K$ ed è

a) l'applicazione nulla se $l \neq j$

b) v_i^* se $l=j$

In fatti: $\text{Im } \varphi_{ji} = \langle w_j \rangle$ e $w_l^*(w_j) = \delta_{lj}$

Domque se $l \neq j$ $\text{Ker } w_l^* \supseteq \text{Im } \varphi_{ji} \Rightarrow w_l^* \circ \varphi_{ji} = 0$ appl. nulla

Se $l=j$ $w_j^* \circ \varphi_{ji} = v_i^*$

In fatti: $(w_j^* \circ \varphi_{ji})(v_a) = w_j^*(\varphi_{ji}(v_a)) = w_j^*(\delta_{ia} w_j) = \delta_{ia} w_j^*(w_j) = \delta_{ia} = v_i^*(v_a)$

Domque le 2 appl. coincidono sugli elementi di una base e quindi coincidono.