Geometria 1 - mod. A - Lezione 24

Note Title

(Lavoro con sp. vett di dim finita quando uso la dimensione)

§ Dualità $\qquad V, W$ K-spazi

$$\mathrm{Hom}_K(V,W) = \{ f : V \xrightarrow[K\text{-lineare}]{} W \}$$

$+$ è puntuale

$\alpha \cdot$

Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V e sia $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W

$f \in \mathrm{Hom}(V,W) \qquad f \longleftrightarrow \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(f) = (a_{ij}) = A \in M_{m,n}(K)$

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

Definisco $f_{ij} : V \longrightarrow W$ come l'applicazione lineare t.c.

$f_{ij} \neq 0$

$$f_{ij}(v_k) = \delta_{jk} w_i = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k \\ w_i & \text{se } j = k \end{cases}$$

$\mathrm{Ker} f_{ij} = \langle v_k, k \neq j \rangle$

Osservo che $f = \sum_{i,j} a_{ij} f_{ij}$ Infatti

$$f(v_\ell) \stackrel{?}{=} \Big(\sum_{i,j} a_{ij} f_{ij}\Big)(v_\ell) = \sum_{i,j} a_{ij} \underbrace{f_{ij}(v_\ell)}_{} \quad \begin{cases} 0 & j \neq \ell \\ w_i & \text{se } j = \ell \end{cases}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{i\ell} w_i \quad \text{sì}$$

Dunque f_{ij} generano $\mathrm{Hom}_K(V,W)$

Sono l. indipendenti ?

$$\underbrace{0 = \sum_{i,j} \alpha_{ij} f_{ij}}_{} \qquad 0_W = 0(v_\ell) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} f_{ij}(v_\ell) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i\ell} w_i$$

$\Longrightarrow \alpha_{i\ell} = 0 \quad \forall i$ in quanto $\mathcal{W}$ è base

Poiché è vero per ogni ℓ $\Longrightarrow \alpha_{i\ell} = 0 \quad \forall i, \ell$

$\Longrightarrow f_{ij}$ sono l. ind.

Caso particolare: $\quad W = K$

$V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K)$ è detto <u>spazio duale</u> (di V)

$\varphi : V \longrightarrow K$ lineari dette <u>forme lineari</u> o covettori

Osservo: φ forma lineare
- $0 : V \longrightarrow K$, $v \longmapsto 0$, $\mathrm{Ker}\, 0 = V$
- è suriettiva ($\mathrm{Im}\,\varphi = K$). In tal caso $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = n-1$ ove $n = \dim V$

Iperpiano in V è un sottospazio di dimensione $\dim V - 1$

Dunque se $\varphi \neq 0$ forma di $V \Rightarrow \mathrm{Ker}\,\varphi$ è un iperpiano di V

Sia $\varphi : V \longrightarrow K$ forma, $\varphi \neq 0$, $U = \mathrm{Ker}\,\varphi = \langle \underbrace{v_1, \dots, v_{n-1}}_{\text{base di } U} \rangle$

Completo: $\{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n\} = \mathcal{V}$ base di V

$\varphi(v_i) = 0$ se $i \leq n-1$ e $\varphi(v_n) = \alpha \neq 0$

Rispetto a questa base U ha equazione $x_n = 0$

e quindi $v \in U \iff$ le sue coordinate sono soluz. di $x_n = 0$.

Voglio vedere che c'è una applicazione suriettiva

$$V^* \setminus \{0\} \xrightarrow{\Psi} \{\text{iperpiani di } V\}$$
$$\varphi \longmapsto \mathrm{Ker}\,\varphi$$

e due forme φ e φ' danno lo stesso iperpiano $\iff \varphi' = \alpha\varphi$ $\exists\, \alpha \in K^*$

Mostriamo che $\Psi(\varphi) = \Psi(\varphi') \iff \mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\varphi' \iff \varphi' = \alpha\varphi$ $\exists\, \alpha \in K^*$

$\Leftarrow$) banale $\mathrm{Ker}\,\varphi' = \{v \in V \text{ t.c. } \varphi'(v) = 0\} = \{v \in V \text{ t.c. } \alpha\varphi(v) = 0\}$
$= \mathrm{Ker}\,\varphi$

$\Rightarrow$) $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\varphi' = U$ Sia $v_1, \dots, v_{n-1}$ base di U come sopra

e completo a $v_1, \dots v_n$ base di V come sopra.

$\varphi(v_i) = 0 = \varphi'(v_i)$ $\forall\, i \leq n-1$

$\varphi(v_n) \neq 0$ $\quad \varphi'(v_n) \neq 0$ $\qquad \varphi'(v_n) = \dfrac{\varphi'(v_n)}{\varphi(v_n)} \cdot \varphi(v_n)$

$\underbrace{\varphi'}_{} = \underbrace{\alpha\varphi}_{}$ coincidono su una base $\qquad : \alpha \neq 0$

perché

☑

NB $\varphi : \underset{\mathcal{E}}{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \underset{\mathcal{E}}{\mathbb{R}}$ forma non nulla.

$\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\varphi) = (a_1, a_2, a_3) = A$

$\operatorname{Ker}\varphi$ piano in $\mathbb{R}^3$: è dato dagli $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x$ t.c.

$\underbrace{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3}_{Ax} = 0$ $\to$ equazione del piano $\operatorname{Ker}\varphi$

$\varphi \rightsquigarrow (a_1, a_2, a_3)$ $\longrightarrow$ numeri

$V^* = \operatorname{Hom}_K(V, K)$ è uno spazio vettoriale

Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V $\rightsquigarrow$ $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ base di V^*

v_i^* giocano il ruolo degli f_{ji} di prima ($\cancel{1 \le j \le 1}$) perché $W = K$

$$v_i^*(v_k) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k \\ 1 & \text{se } i = k \end{cases}$$

Ogni forma $\varphi : V \longrightarrow K$ si scrive (in modo unico) come $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \underset{?}{\underline{a_i}} v_i^*$ una volta fissato $\mathcal{V}$ base di V

$$\varphi(v_k) = \left(\sum a_i v_i^*\right)(v_k) = \sum a_i \underbrace{v_i^*(v_k)} = a_k \underbrace{v_k^*(v_k)}_{1}$$

Quindi i coeff $a_1, \dots, a_n$ sono quelli della matrice

$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\varphi) = (a_1, \dots, a_n)$

In particolare $\dim V^* = \dim V$. Dunque

$V \cong V^*$ ad esempio $f : V \longrightarrow V^*$, $v_i \longmapsto v_i^*$, $v_i \in \mathcal{V}$, $v_i^* \in \mathcal{V}^*$

Se cambio $\mathcal{V}$ cambio applicazione.

Non c'è isomorfismo <u>CANONICO</u>

<u>Esercizio</u> Sia $\varphi : V \longrightarrow W$ lineare. Mostrare che

$$\varphi^*: W^* \longrightarrow V^* \quad \text{è lineare}$$
$$f \longmapsto f\circ\varphi \quad \text{ben definita e}$$

Esercizi su inverse dx e sx

$A = \begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$ Determinare tutte $B \in M_{2,4}(\mathbb{R})$ t.c.
$$BA = \mathbb{1}_2$$

NB $\operatorname{rg} A = 2$ (f_A è iniettiva)

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, hook, "f_A"] \arrow[rr, bend right, "id"'] & \mathbb{R}^4 \arrow[r, "f_B"] & \mathbb{R}^2 \\
x \arrow[r, mapsto] & Ax \arrow[r, mapsto] & Bx
\end{tikzcd}$$

Se A fosse $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\ \multicolumn{2}{c}{0}\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} \boxed{1} & 0 & 1 & & & \\ -1 & 1 & & 1 & & \\ 0 & 1 & & & 1 & \\ 1 & 1 & & & & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & B \\ 0 & 1 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & C \end{array}\right)$$

$\begin{cases} II + I \\ IV - I \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 1&0&1&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&1&-1&0&0&1 \end{array}\right) \underset{IV-II}{\overset{III-II}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cccc} 1&0&1&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0\\ 0&0&-1&-1&1&0\\ 0&0&-2&-1&0&1 \end{array}\right)$$

B' = (1 0 0 0; 1 1 0 0), R_1 = (−1 −1 1 0), R_2 = (−2 −1 0 1)

$$R_1 \cdot A = (0,0) \qquad R_2 \cdot A = (0,0)$$
$$(-1\ -1\ 1\ 0)\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$$

Dunque se ho una matrice del tipo
$$\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 \\ \beta_1 R_1 + \beta_2 R_2\end{pmatrix}}_{2\times 4} \cdot A = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Dunque le matrici B t.c. $B\cdot A = \mathbb{1}_2$ sono del tipo
$$\underbrace{B'}_{\text{soluz particolare}} + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}R_1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}R_2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\R_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\R_2\end{pmatrix} \right\rangle}_{\text{matrici } B \text{ t.c. } BA = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}} \subseteq M_{2,4}(\mathbb{R})$$

Esercizio Trovare le inverse destre di $A = \begin{pmatrix}1&1&-1&3\\1&0&2&1\end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^4 \arrow[r, "f_A"] & \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \arrow[ur, "f_B"] \arrow[urr, bend right, "id"'] & & \end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto Ax \qquad x \longmapsto Bx$$

? B t.c. $AB = \mathbb{1}_2$

$rg\, A = 2 \Rightarrow f_A$ suriett.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{sulle colonne}}{\overset{\text{operaz}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & ? & \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} II_c - I_c \\ III_c + I_c \\ IV_c - 3I_c \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{+1} & 3 & -2 \\ 1 & +1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{IV + 2II}{\overset{III - 3II}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{I_c - II_c}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{}_{B'} \; \underbrace{}_{C_1} \; \underbrace{}_{C_2}$$

Osservo che $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\uparrow$ soluz. particolare

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdot\, C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

B t.c. $AB = \mathbb{1}_2$ è del tipo $B' + \alpha_1 \overset{M_1}{\overbrace{\left(C_1, \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}} + \alpha_2 \overset{M_2}{\overbrace{\left(C_2, \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}} + \beta_1 \underset{M_3}{\underbrace{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} C_1\right)}} + \beta_2 \underset{M_4}{\underbrace{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} C_2\right)}}$

$$\in B' + \langle \underbrace{M_1, M_2, M_3, M_4}_{\ni D \text{ è t.c. } AD = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \rangle$$

Sia $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \longmapsto a_2 - (a_1 + a_3)x + a_1 x^2 - a_3 x^3$$

$$\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A$$

coord $f(e_1)$

$e_1 \longmapsto f(e_1) = -x + x^2$; $e_2 \mapsto 1$, $e_3 \longmapsto -x - x^3$

Sia $\mathcal{B} = \{ \underbrace{1-x}_{v_1}, \underbrace{1+x^2}_{v_2}, \underbrace{x}_{v_3}, \underbrace{x^3+x^2}_{v_4} \}$ base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

Trovare la matrice $\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(f) = B$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3_{\mathcal{E}} & \xrightarrow{\ f\ \ A\ } & \mathbb{R}[x]_{\leq 3}\ \mathcal{E} \\ & \searrow^{f}_{B\,?} & \downarrow \mathrm{id} \\ & & \mathcal{B}\ \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \end{array}$$

$B = PA$

con $P = \alpha_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(\mathrm{id})$

NB $P^{-1} = \alpha_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(\mathrm{id})$ facile. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

m. Gauss. $(P^{-1})^{-1} = P$ ...

2° metodo: cercare di scrivere diretti. $f(e_1) = p_{11} v_1 + p_{21} v_2 + \dots p_{41} v_4$

p_{i1} coeff della 1ª colonna di P.