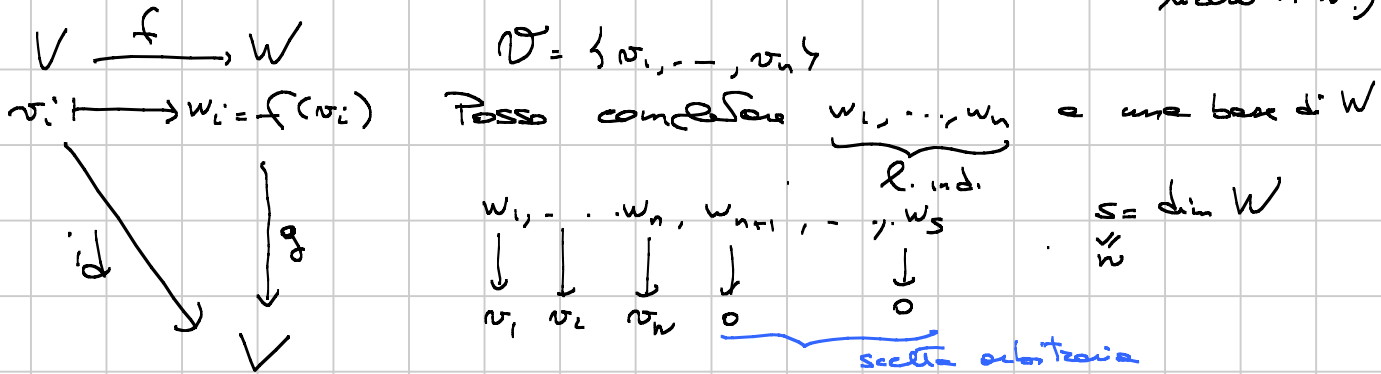


Geometria 1 - mod. A - Lezione 23

Note Title

$$f: V \longrightarrow W \quad K\text{-lineare} \quad n = \dim V$$

Se f è iniettiva $(\Leftrightarrow \text{Ker } f = 0 \Leftrightarrow \dim \text{Im } f = n = \dim V \Leftrightarrow f(\text{base di } V) \text{ è insieme libero in } W)$
per formula dim.

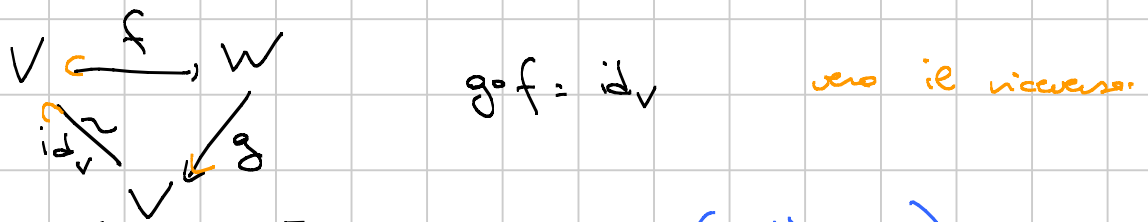


Definisco g come sopra $g(w_i) = v_i$ se $i \leq n$ e $g(w_i) = 0$ se $i > n$

$$(g \circ f)(v_i) = g(f(v_i)) = g(w_i) = v_i$$

Donque g è un'inversa sinistra di f (in generale non è inversa destra)

Se f è iniettiva $\Leftrightarrow f$ ammette inversa sinistra (lineare)



(NB) inversa sinistra non è unica in generale (vedi sopra)

Analogamente $f: V \longrightarrow W$ è suriettiva $\Leftrightarrow f$ ammette inversa dx

Sia f suriettiva e sia $\{w_1, \dots, w_m\}$ base di W

Sia $v_i \in f^{-1}(w_i) \neq \emptyset$ (scelta arbitraria)

(NB) v_1, \dots, v_m sono r. indip.

$$\left(\sum \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow f\left(\sum \alpha_i v_i\right) = \sum \alpha_i w_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \forall i \right)$$

Completato v_1, \dots, v_m a base $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n$ di V

(NB) f suriettiva $\Rightarrow \dim V \geq \dim W$

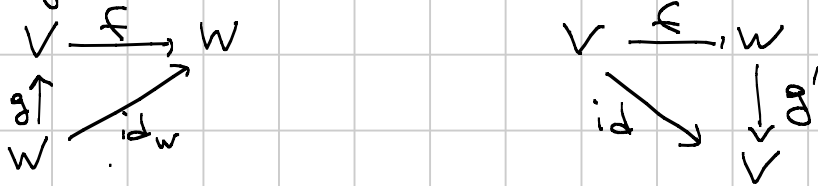


$$f \circ g(w_i) = f(w_i) = w_i$$

(15) Inverse dx in generale non è unica.

• Sia $f: V \rightarrow W$ isomorfismo (lineare + biettiva)
 ($\dim V = \dim W$)

f isomorfismo \Leftrightarrow ammette inversa destra e sinistra.



Esercizio Che legame c'è tra g e g' ?
 g è unica? g' è unica?

§ Matrici elementari

1_n matrice identica $n \times n$ $1_n = (\delta_{ij})$

$E(i, j)$ è la matrice ottenuta scambiando le colonne i e j in 1_n

Ad es. $E(1, 2)$ per $n=2$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$E(d|i)$ è la matrice ottenuta moltiplicando la colonna i -esima di 1_n per $d \neq 0$

$E(i|d, j)$ è la matrice ottenuta da 1_n sommando a riga i -esima la riga j -esima mult. per d

Se E è una matrice elementare $n \times n$ e sia $A \in M_{n, s}(K)$

$EA = A'$, ottenuta da A con l'operaz. elem. sulle righe ed E conisa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \downarrow \\ \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -10 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{met } 1^{\text{a}} \text{ riga per } -2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \downarrow \\ \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -24 \end{pmatrix} \quad \text{II} - 3\text{I}$$

Osserva: Analogamente si ottiene che le operazioni sulla colonna corrispondono a molt. a dx per una matrice elementare.

Con attenzione $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ è ottenuta $\text{I}_{col} - 3\text{II}_{col}$
 $\dots \dots \text{II}_{riga} - 3\text{I}_{riga}$

Osserva: Le matrici el. sono invertibili con inverse

$$E(i, j)^{-1} = E(i, j) \quad \text{matrici elementari}$$

$$E\left(\frac{d}{\neq 0} | i\right)^{-1} = E\left(\frac{1}{d} | i\right)$$

$$E(i | d, j)^{-1} = E(i | -d, j)$$

Ricordo: $A \in M_n(K)$ è invertibile $\Leftrightarrow \exists B \in M_n(K)$
 t.c. $BA = 1_n = AB$

Esercizio Sia $A \in M_n(K)$ invertibile. Mostrare che l'inversa è unica.

Mostrare che se B è inversa sx di $A \Rightarrow B$ è inversa destra di A (e viceversa)

$$B, B' \quad BA = 1 = AB' \quad \text{perché?} \Rightarrow B = B'$$

$$\textcircled{\text{NB}} \quad \begin{matrix} A \text{ è invertibile} \\ \uparrow \\ M_n(K) \end{matrix} \Leftrightarrow f_A \text{ è invertibile} \Leftrightarrow \dim \text{Ker } f_A = 0$$

$$\Leftrightarrow \dim \text{Im } f_A = n$$

$$\Leftrightarrow \text{rk } f_A = n$$

$$\Leftrightarrow \text{rk } A = n$$

Dunque A è invertibile $\Leftrightarrow \text{rk } A =$ massimo possibile ossia n .

$$\text{rk} \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \text{invertibile}$$

$$\text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2 < 3 \quad \underline{\text{No}}$$

$M_n(K) \ni A$ invert. $\Leftrightarrow \exists kA = u \Leftrightarrow$ la matrice a scala associata ad A ha n pivot \Leftrightarrow ha n pivot sulla diagonale

$\begin{pmatrix} \times & & \\ & \times & \\ & & \times \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ la matrice a scala ridotta associata ad A è $\mathbb{1}_n$

Ora so che $E_r \dots E_3 E_2 E_1 A = \mathbb{1}_n$
 con op. elem. sulle righe trasformo A in $\mathbb{1}_n$

e $E_r \dots E_1 = A^{-1}$

Alg. di Gauss per calcolare A^{-1}

$$\underbrace{\left(A \mid \mathbb{1}_n \right)}_{n \times 2n} \xrightarrow{1^{\circ} \text{ op. el.}} \underbrace{\left(E_1 A \mid E_1 \right)}_{E_1(A \mid \mathbb{1}_n)} \xrightarrow{2^{\circ} \text{ op. el.}} \left(E_2 E_1 A \mid E_2 E_1 \right)$$

$$\dots \left(E_r E_{r-1} \dots E_1 A \mid E_r \dots E_1 \right)$$

$\mathbb{1}_n \qquad A^{-1}$

Esercizio

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ trovare A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{II} - 2\text{I} \\ \text{III} - 3\text{I} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \text{III} - 2\text{II} \\ \frac{1}{6}\text{III} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{I} + 2\text{II} \\ \text{II} + 5\text{III} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \right)$$

$$\text{I} + 7\text{III} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{11}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \right)$$

B

Controllare che

$AB = \mathbb{1}_3$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{II} - 2\text{I} \\ \text{III} + \text{I}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-1 \cdot \text{II} \\ +1 \cdot \text{III}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{III} - \text{II}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\text{rank}} = 2 \Rightarrow$ la matrice A non è invertibile in questo caso!

Esercizio Sia data $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $f_A: \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$
 $\downarrow \cong \mathbb{R}^2 = g$

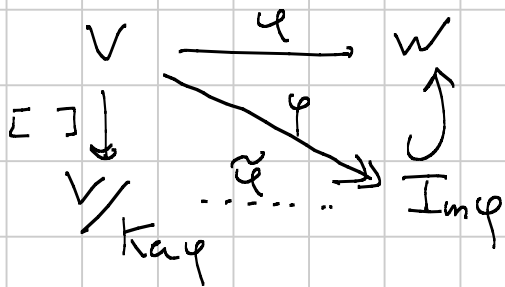
$BA = \mathbb{1}_2$ Trovare una B
 Trovare tutte!

$B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & h & k & j \end{pmatrix}$ $BA = \mathbb{1}_2$ $\left. \begin{array}{l} 8 \text{ eq.} \\ 8 \text{ incogn.} \end{array} \right\}$

§ Teoremi di isomorfismo.

1° Sia $\varphi: V \rightarrow W$ lineare. Allora φ induce

una eqe lineare $\tilde{\varphi}: V / \text{Ker} \varphi \rightarrow \text{Im} \varphi$ che è un isomorfismo.



$$\tilde{\varphi}([v]) = \varphi(v)$$

- ben definita. Sia $u \in \text{Ker} \varphi \Rightarrow \tilde{\varphi}([v+u]) = \varphi(v+u) = \varphi(v) + \varphi(u) = \varphi(v)$ (non dipende dal rappresentante!)
- iniettiva (si f. gen. uso le dimensioni)
 Sia $\tilde{\varphi}([v]) = 0 \Rightarrow \varphi(v) = 0 \Rightarrow v \in \text{Ker} \varphi \Rightarrow [v] = 0$
- $\text{Ker} \tilde{\varphi} = 0$

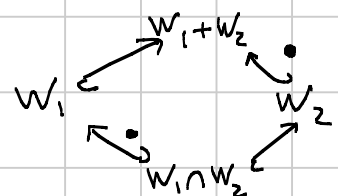
(*) nota la dimostr. in algebra, dove solo controes. non si può dare.

$$\tilde{\varphi}(d[v]) \stackrel{?}{=} d \tilde{\varphi}([v])$$

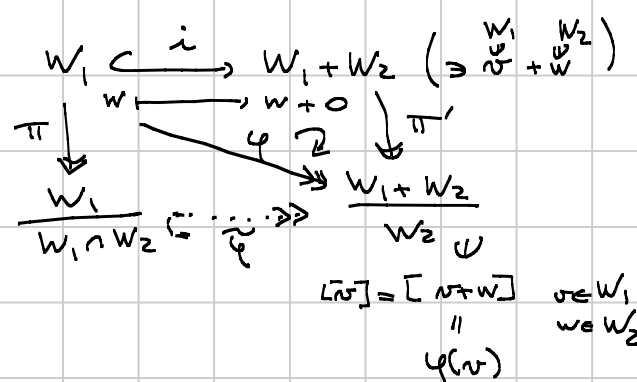
$$\tilde{\varphi}([dv]) = \varphi(dv) = d \varphi(v) = d \tilde{\varphi}([v])$$

Se $\tilde{\varphi}$ da Algebra che $\tilde{\varphi}$ esiste ed è unom. di gruppi \Rightarrow rispetta la +
 $(\tilde{\varphi}([v]+[v']) = \tilde{\varphi}([v+v']) = \varphi(v+v') = \varphi(v) + \varphi(v') = \tilde{\varphi}([v]) + \tilde{\varphi}([v']).)$

2° Teorema. $W_1, W_2 \subseteq V$



$$\frac{W_1 + W_2}{W_2} \cong \frac{W_1}{W_1 \cap W_2} \quad \varphi := \pi'_0 \circ \pi$$



\$\exists \varphi\$ (da Algebra) + c. \$\varphi \circ \pi = \varphi\$

omom. di gruppi
 $\varphi([w, \cdot]) = [w, \cdot]$

- ben definita
- rispetta +
- rispetta prodotto per lo scal

$$[w] = [w+0] \quad \forall w \in W_1$$

$$\parallel$$

$$\varphi(w)$$

Suicid. immediato.

Ossewo: $\dim \frac{W_1}{W_1 \cap W_2} = \dim W_1 - \dim W_1 \cap W_2$

Grossmann

$$\dim \frac{W_1 + W_2}{W_2} = \dim (W_1 + W_2) - \dim W_2$$

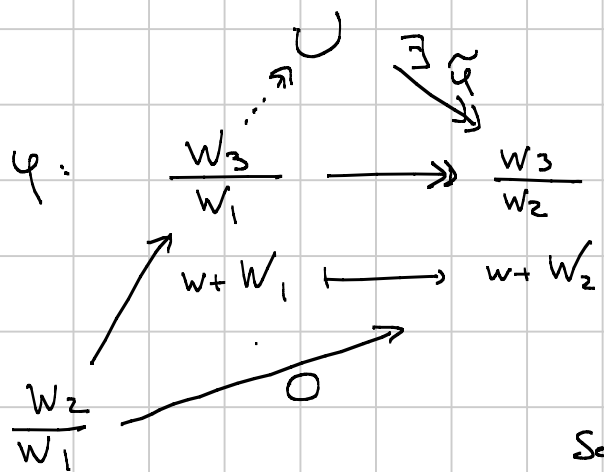
Del fatto che \$\varphi\$ su \$\frac{W_1}{W_1 \cap W_2}\$ conclude che \$\varphi\$ iso. (se dimens. finite)

Altrimenti, mostro che \$\varphi([w]) = 0 \Rightarrow [w] = 0 \in \frac{W_1 + W_2}{W_2} \Rightarrow w_1 = 0 + w_2\$ con \$w_2 \in W_2 \Rightarrow w_1 \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow [w] = 0\$ in \$\frac{W_1}{W_1 \cap W_2}\$.

3° Teor. $W_1 \leq W_2 \leq W_3 \leq V$

Esiste un isom.

$$U = \frac{W_3/W_1}{W_2/W_1} \cong W_3/W_2$$



- \$\varphi\$ ben definito perché \$W_1 \leq W_2\$.
- \$\varphi\$ suriettivo \$\Rightarrow \tilde{\varphi}\$ suriettivo
- \$\tilde{\varphi}([w]) := [w]\$ ben definito
- \$\tilde{\varphi}([w]) = [w'] \Rightarrow [w] - [w'] \in W_2/W_1\$
- \$\Rightarrow [w - w'] \in W_2/W_1 \Rightarrow w - w' \in W_2 \Rightarrow \varphi([w - w']) = 0\$

Se dimensioni finite:

$$\dim U = \dim W_3/W_1 - \dim W_2/W_1 = \dim W_3 - \dim W_1 - (\dim W_2 - \dim W_1)$$

$$= \dim W_3 - \dim W_2 = \dim W_3/W_2 \quad \Rightarrow \varphi \text{ \u00e8 iso}$$

Altrimenti, dimostro direttamente:

\$\square\$

Esercizio \$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}\$

$$a+ib \mapsto e^{i\theta} z = (\cos \theta + i \sin \theta)(a+ib)$$

$$= a \cos \theta - b \sin \theta + i(a \sin \theta + b \cos \theta)$$

\$0 \leq \theta < 2\pi\$ fissato
 \$z\$ una rotazione nel piano

\$\mathbb{C}\$ come \$\mathbb{R}\$-vettore, \$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2\$ Base \$e = \{1, i\}\$

f è lineare

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$1 \longmapsto \cos\theta + i\sin\theta$$

$$i \longmapsto -\sin\theta + i\cos\theta$$

$$a+ib \longmapsto a(\cos\theta + i\sin\theta) + b(-\sin\theta + i\cos\theta)$$

$$d_{\mathbb{R}\mathbb{R}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = A \quad \begin{array}{l} \text{Matrice} \\ \text{rotazione in } \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Quindi per conoscere la rotazione di $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ di angolo θ
basta considerare $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ □