Geometria 1 - mod. A - Lezione 23

Note Title

$f: V \longrightarrow W$ K. lineare $\qquad n = \dim V$

Se f è iniettiva $\left(\Longleftrightarrow \operatorname{Ker} f = 0 \underset{\text{per formula dim.}}{\Longleftrightarrow} \dim \operatorname{Im} f = n = \dim V \Longleftrightarrow f(\text{base di } V) \right.$ è insieme libero in W.)

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[rd, "id"'] & W \arrow[d, "g"] \\
 & V
\end{tikzcd}$$

$v_i \longmapsto w_i = f(v_i)$

$\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$

Posso completare $\underbrace{w_1, \dots, w_n}_{\text{l. ind.}}$ a una base di W

$$\begin{array}{ccccccc}
w_1, & \dots & w_n, & w_{n+1}, & \dots, & w_s \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
v_1 & v_2 & v_n & \underbrace{0 & & 0}_{\text{scelta arbitraria}}
\end{array}$$

$\underset{\substack{\veebar \\ n}}{s} = \dim W$

Definisco g come sopra $g(w_i) = v_i$ se $i \leq n$ e $g(w_i) = 0$ se $i > n$

$$\underset{\substack{\| \\ id_V}}{(g \circ f)}(v_i) = g(\underset{\substack{\| \\ w_i}}{f(v_i)}) = v_i$$

Dunque g è un' inversa sinistra di f (in generale non è inversa destra)

Se f è iniettiva $\Longleftrightarrow$ f ammette inversa sinistra (lineare)

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, hook, "f"] \arrow[rd, "id_V"', "\sim"] & W \arrow[ld, "g"] \\
V &
\end{tikzcd}$$

$g \circ f = id_V$ $\qquad$ vero il viceversa.

(NB) inversa sinistra non è unica in generale (vedi sopra)

Analogamente $f: V \longrightarrow W$ è suriettiva $\Longleftrightarrow$ f ammette inversa dx

Sia f suriettiva e sia $\{w_1, \dots w_m\}$ base di W

Sia $v_i \in f^{-1}(w_i) \neq \emptyset$ (scelta arbitraria)

(NB) $v_1, \dots v_m$ sono l. indip.

$$\left(\sum \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow f(\underset{\substack{\| \\ 0}}{\textstyle\sum \alpha_i v_i}) = \sum \alpha_i w_i \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i \right)$$

Completo $v_1, \dots v_m$ a base $v_1 \dots v_m \underbrace{v_{m+1} \dots v_n}_{\text{arbitrari}}$ di V

(NB) f suriettiva $\Longrightarrow \dim V \geq \dim W$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, two heads] & W \\ W \arrow[u, "g"] \arrow[ur, two heads, "id_W"'] & \end{tikzcd}$$

$f:$ lineare

$f \circ g = id_W$

$w_1 \longrightarrow v_1$
$w_2 \longrightarrow v_2$
$\vdots$
$w_m \longrightarrow v_n$

$f \circ g(w_i) = f(v_i) = w_i$

ⓃⒷ inversa dx in generale non è unica.

- Sia $f: V \longrightarrow W$ isomorfismo (lineare + biettiva) $(\dim V = \dim W)$

f isomorfismo $\Longleftrightarrow$ ammette inversa destra e sinistra.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ W \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "id_W"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "id"'] & W \arrow[d, "g'"] \\ & V \end{tikzcd}$$

__Esercizio__ Che legame c'è tra g e g'?
g è unica? g' è unica?

§ Matrici elementari

$\mathbb{1}_n$ matrice identica $n \times n$ $\quad \mathbb{1}_n = (\delta_{ij})$

matrici elementari

$E(i,j)$ è la matrice ottenuta scambiando le $\overset{\text{colonne}}{\text{righe}}$ i e j in $\mathbb{1}_n$

Ad es. $E(1,2)$ per $n=2$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$E(\underset{\neq 0}{\alpha} | i)$ è la matrice ottenuta moltipl. la $\overset{\text{colonna}}{\text{riga}}$ i-esima di $\mathbb{1}_n$ per $\alpha \neq 0$

$E(i | \alpha, j)$ è la matrice ottenuta da $\mathbb{1}_n$ sommando a riga i-esima la riga j-esima molt. per α

Sia E una matrice elementare $n \times n$ e sia $A \in M_{n,s}(K)$

$EA = A'$

$\hookrightarrow$ ottenuta da A con l'operaz. elem. $\overset{\text{sulle righe}}{\text{corrisp.}}$ ad E

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}-2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \downarrow & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&-4&-10\\3&4&6\end{pmatrix}$ molt 1ª riga per -2

$\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \cdot & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&5\\0&-2&-24\end{pmatrix}$ $II - 3I$

Osservo: Analogamente si ottiene che le operaz. el. sulle colonne corrispondono a molt. a dx per una matrice elementare.

Con attenzione $\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}$ è ottenuto $I_{col} - 3II_{col}$

. . . . $II_{riga} - 3I_{rig}$

Osservaz: Le matrici el. sono invertibili con inverse matrici elementari

$E(i,j)^{-1} = E(i,j)$

$E(\underset{\substack{\neq\\0}}{\alpha}|i)^{-1} = E(\frac{1}{\alpha}|i)$

$E(i|\alpha,j)^{-1} = E(i|-\alpha,j)$

Ricordo: $A \in M_n(K)$ è invertibile $\Leftrightarrow \exists\, B \in M_n(K)$ t.c. $BA = 1_n = AB$

Esercizio Sia $A \in M_n(K)$ invertibile. Mostrare che l'inversa è unica.

Mostrare che se B è inversa sx di $A \Rightarrow B$ è inversa destra di A (e viceversa)

B, B' $\quad BA = 1 = AB' \overset{\text{perché?}}{\Rightarrow} B = B'$

NB $\underset{M_n(K)}{\overset{\cap}{A}}$ è invertibile $\Leftrightarrow$ f_A è invertibile $\Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Ker} f_A = 0$
$\in End(K^n)$ $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f_A = n$
$\Leftrightarrow \operatorname{rk} f_A = n$
$\Leftrightarrow \operatorname{rk} A = n$

Dunque A è invertibile $\Leftrightarrow \operatorname{rk} A =$ massimo possibile ossia n.

$\operatorname{rk}\begin{pmatrix}1&-1&0\\&2&0\\0&&3\end{pmatrix} = 3 \Rightarrow$ invertibile $\qquad \operatorname{rk}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&0&1\\0&0&3\end{pmatrix} = 2 < 3$ No

$M_n(k) \ni A$ invert. $\iff$ $\mathrm{rk}\, A = n$ $\iff$ la matrice a scala associata ad A ha n pivot $\iff$ ha n pivot sulla diagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & * \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} \iff \text{la matrice a scala ridotta associata ad } A \text{ è } \mathbb{1}_n$$

Ora so che $\underbrace{\overbrace{E_k \cdots E_3 E_2 E_1}^{A^{-1}} A}_{\text{con op. elem. sulle righe trasformo } A \text{ in } \mathbb{1}_n} = \mathbb{1}_n$

matr. el

e $E_k \cdot \ldots \cdot E_1 = A^{-1}$

Alg. di Gauss per calcolare A^{-1}

$$\underbrace{(\underset{n\times n}{A} \mid \underset{n\times n}{\mathbb{1}_n})}_{n \times 2n} \overset{1^\circ \text{ op. el}}{\rightsquigarrow} \underbrace{(E_1 A \mid E_1)}_{E_1 (A \mid \mathbb{1}_n)} \overset{2^\circ \text{ op. el.}}{\rightsquigarrow} (E_2 E_1 A \mid E_2 E_1)$$

$$\ldots\ldots \quad (\underbrace{E_k E_{k-1} \cdots E_1 A}_{\mathbb{1}_n} \mid \underbrace{E_k \cdots E_1}_{A^{-1}})$$

Esercizio $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ trovare A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{III - 3I}{\overset{II - 2I}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\frac{1}{6} III}{\overset{III - 2II}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\cancel{6}\ 1} & 1/6 & -2/6 & 1/6 \end{array}\right) \underset{II + 5III}{\overset{I + 2II}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0\ \cancel{-5} & \cancel{-2}\ -7/6 & \cancel{1}\ -2/3 & 0 + 5/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{array}\right)$$

$$\overset{I + 7III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11/6 & -1/3 & 7/6 \\ 0 & 1 & 0 & -7/6 & -2/3 & 5/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & -\frac{1}{3} & 1/6 \end{array}\right)$$

with the right-hand block marked $\underbrace{}_{B}$

Controllare che

$AB = \mathbb{1}_3$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & +7 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{2}\,0 & \cancel{-5}\,{}^{-11} & \cancel{7}\,11 & \cancel{0}\,{}^{-2} & 1 & 0 \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{0} & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & & \end{array}\right) \underset{III+I}{\overset{II-2I}{\sim}} \underset{+\frac{1}{3} III}{\overset{-\frac{1}{11} \cdot II}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & +2/_{11} & 1/_{11} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\overset{III-II}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdot & - & - \\ 0 & 0 & 0 & - & & -\cdot \end{array}\right)$$

$\underbrace{\qquad}_{rg = 2}$ $\Longrightarrow$ la matrice A non è invertibile in questo caso!

~

Esercizio Sia data $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, hook, "f_A"] \arrow[dr, "id"'] & \mathbb{R}^4 \arrow[d, "f_B = g"] \\ & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

$BA = \mathbb{1}_2$ Trovarne una B

Trovarle tutte!

$B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & h & k & j \end{pmatrix}$ $\quad BA = \mathbb{1}_2$ $\quad \Big\}$ 8 eq. 8 incogn.

~

§ Teoremi di isomorfismo.

1° Sia $\varphi : V \longrightarrow W$ lineare. Allora φ induce

una appl lineare $\tilde{\varphi} : V/_{Ker\varphi} \longrightarrow Im\varphi$ che è un isomorfismo.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "{[\ ]}"'] \arrow[dr, "\varphi"] & W \\ V/_{Ker\varphi} \arrow[r, dotted, "\tilde{\varphi}"] & Im\varphi \arrow[u, hook, bend right] \end{tikzcd}$$

$\tilde{\varphi}([v]) = \varphi(v)$

- ben definita. Sia $u \in Ker\varphi \Rightarrow \tilde{\varphi}([v+u]) = \varphi(v+u) = \varphi(v) + \cancel{\varphi(u)}^{0} = \varphi(v)$

  non dipende dal rappresentante!
- iniettiva (se f.gen uso le dimensioni)

  Sia $\tilde{\varphi}([v]) = 0 \Rightarrow \varphi(v) = 0 \Rightarrow v \in Ker\varphi \Rightarrow [v] = 0$
- Etarts-lin

(NB nota la dimost. in algebra, devo solo controllare

$\tilde{\varphi}(\underbrace{\lambda [v]}) \overset{?}{=} \lambda \tilde{\varphi}([v])$

$\tilde{\varphi}([\lambda v]) = \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) = \lambda \tilde{\varphi}([v])$)

So già da Algebra che $\tilde{\varphi}$ esiste ed è omom. di gruppi $\Rightarrow$ rispetta la +

($\tilde{\varphi}([v] + [v']) = \tilde{\varphi}([v + v']) =$
$= \varphi(v + v') = \varphi(v) + \varphi(v') =$
$\tilde{\varphi}[v] + \tilde{\varphi}[v']$.)

2° Teorema. $W_1 , W_2 \leq V$

$$\begin{tikzcd} & W_1 + W_2 & \\ W_1 \arrow[ur, hook] & & W_2 \arrow[ul, hook] \\ & W_1 \cap W_2 \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

$$\frac{W_1+W_2}{W_2} \cong \frac{W_1}{W_1 \cap W_2} \qquad \varphi := \pi' \circ i$$

$$\begin{tikzcd}
W_1 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] \arrow[dr, two heads, "\varphi"] & W_1+W_2 \arrow[d, two heads, "\pi'"] \\
\frac{W_1}{W_1 \cap W_2} \arrow[r, dashed, two heads, "\tilde{\varphi}"'] & \frac{W_1+W_2}{W_2}
\end{tikzcd}$$

$w \longmapsto w+0$

$(\ni \overset{W_1}{\overset{\Psi}{v}} + \overset{W_2}{\overset{\Psi}{w}})$

$\frac{W_1+W_2}{W_2} \ni [v] = [v+w]$ $\quad v \in W_1$, $w \in W_2$

$[v+w] = \varphi(v)$

$\exists\, \tilde{\varphi}$ (da Algebra) t.c. $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$

omom. di gruppi

$\tilde{\varphi}([w_1]) = [w_1]$

- ben definita
- rispetta +
- rispetta prodotto per lo scal.

Suriett. immediata.

Osservo: $\dim \frac{W_1}{W_1 \cap W_2} = \dim W_1 - \dim W_1 \cap W_2$

$$\dim \frac{W_1+W_2}{W_2} = \dim(W_1+W_2) - \dim W_2$$

)) T. Grassmann

Dal fatto che è suriettiva concludo che è iso. (se dimens. finite)

Altrimenti mostro che se $\tilde{\varphi}([w_1]) = 0 \Rightarrow [w_1] = 0 \in \frac{W_1+W_2}{W_2} \Rightarrow w_1 = 0 + w_2$ con $w_2 \in W_2 \Rightarrow w_1 \in W_1 \cap W_2$
$\Rightarrow [w_1] = 0$ in $W_1/W_1 \cap W_2$.

3° Teo. $\quad W_1 \leq W_2 \leq W_3 \leq V$

Esiste un isom. $\quad U = \frac{W_3/W_1}{W_2/W_1} \simeq W_3/W_2$

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dr, "\exists\, \tilde{\varphi}"] & \\
\frac{W_3}{W_1} \arrow[ur, dotted, "\pi"] \arrow[rr, two heads, "\varphi"] & & \frac{W_3}{W_2} \\
\frac{W_2}{W_1} \arrow[u] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

$\varphi: \quad w + W_1 \longmapsto w + W_2$

- φ ben definito perché $W_1 \leq W_2$.
- φ suriettivo $\Rightarrow \tilde{\varphi}$ suriettivo
- $\tilde{\varphi}([w]) := [w]$ ben definito

se $[w] = [w'] \Rightarrow [w] - [w'] \in W_2/W_1$
$\Rightarrow [w-w'] \in W_2/W_1 \Rightarrow w - w' \in W_2 \Rightarrow \varphi[w-w'] = 0$

Se dimensioni finite:

$$\dim U = \dim W_3/W_1 - \dim W_2/W_1 = \dim W_3 - \cancel{\dim W_1} - (\dim W_2 - \cancel{\dim W_1})$$
$$= \dim W_3 - \dim W_2 = \dim W_3/W_2 \Rightarrow \tilde{\varphi} \text{ è iso}$$

Altrimenti dimostro direttamente:

☑

<u>Esercizio</u> $f_\theta = f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad 0 \leq \theta < 2\pi$ fissato

$z \longmapsto e^{i\theta} z \qquad$ è una rotazione nel piano

$z = a+ib$

$e^{i\theta} z = (\cos\theta + i\sin\theta)(a+ib) = a\cos\theta - b\sin\theta + i(a\sin\theta + b\cos\theta)$

$\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}$-sp. vettoriale, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2 \qquad$ Base $\mathcal{E} = \{1, i\}$

f è lineare $\quad \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$1 \longmapsto \cos\theta + i\sin\theta$$

$$i \longmapsto -\sin\theta + i\cos\theta$$

$$a+ib \longmapsto a(\cos\theta + i\sin\theta) + b(-\sin\theta + i\cos\theta)$$

$$\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =: A$$

Matrice rotazione in $\mathbb{R}^2$

Quindi per conoscere la rotazione ↺) di $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ di angolo θ basta considerare $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

□