COMPITO DI MICROECONOMIA

Prof. Michele Moretto

Dr Gregorio Morosinotto

22 Novembre 2022

Partizione Q-Z

La prova si considera superata se il punteggio è 17/30
Ci si può ritirare entro primi 10 minuti senza valutazione

A) La vostra funzione di utilità è $U = x^a y^b$ con a e $b \in [0, 1]$, e il vostro reddito è $I = 20$. Il prezzo $p_x = 5$ e $p_y = 2$.

1. Qual è il vostro paniere ottimo.
2. Qual è il nuovo paniere se il prezzo del bene x salisse a $p_x = 10$?
3. Calcolate l'effetto reddito e l'effetto sostituzione dovuto a questa variazione di prezzo ponendo $a = b = 0.5$ usando il metodo di Slutsky.
4. Calcolate la variazione compensativa
5. Infine, dite che tipo di beni sono x e y.

B) Supponete che un'impresa abbia la seguente funzione di produzione $Q = 4KL$, dove K è il capitale e L il lavoro. Se il costo del capitale è $r = 100$ e il costo del lavoro $w = 200$, determinate:

1. I rendimenti di scala della tecnologia posseduta dall'impresa
2. La domanda di fattori per produrre Q unità di prodotto
3. Qual è il costo totale di lungo periodo per produrre Q unità di prodotto?
4. Qual è il costo medio e marginale di lungo periodo per produrre Q unità?
5. Calcolate l'elasticità della funzione di costo al variare della quantità prodotta
6. Infine ritenete che l'impresa abbia delle economie di scala?

Soluzioni
Esercizio A)
Al solito il problema può essere impostato come

$$\max\left[a\log x + b\log y\right] \qquad s.v. \quad p_x x + 2y = 20$$

la soluzione si trova

$$SMS = \frac{a}{b}\frac{y}{x} = \frac{p_x}{p_y} = \frac{p_x}{2}$$

Il sistema è

$$\begin{aligned} 2y &= p_x \frac{b}{a} x \\ p_x x + 2y &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2y &= p_x \frac{b}{a} x \\ p_x x\left(\frac{a}{a+b}\right) &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{20}{p_x}\left(\frac{a}{a+b}\right) \\ y &= 10\left(\frac{b}{a+b}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^* &= 4\left(\frac{a}{a+b}\right) \\ y^* &= 10\left(\frac{b}{a+b}\right) \end{aligned}$$

2) In questo caso il paniere ottimale diventa:

$$\begin{aligned} x^* &= 2\left(\frac{a}{a+b}\right) \\ y^* &= 10\left(\frac{b}{a+b}\right) \end{aligned}$$

3) Se il prezzo di x passa a 10, la compensazione di reddito che permette di ottenere il paniere iniziale è
$I + \Delta I = 30 = 10x + 2y$.
4) Cioè deve ricevere una variazione compensativa si 10.

Poichè Il SMS ora è $\frac{y}{x}$ e il rapporto dei prezzi 5, ottengo $x^c = 1.5, y^c = 7.5$

Da cui si ottiene: Effetto sostituzione

$$\begin{aligned} x^c - x^* &= 1.5 - 2 = -0.5 \\ y^c - y^* &= 7.5 - 5 = 2.5 \end{aligned}$$

Effetto reddito

$$\begin{aligned} x^{**} - x^c &= 1 - 1.5 = -0.5 \\ y^{**} - y^c &= 5 - 7.5 = -2.5 \end{aligned}$$

5) La tipologia di bene deriva dall'effetto reddito. Poichè al diminuire del reddito (dovuto ad un aumento del prezzo) l'effetto reddito è negativo per entrambi i beni, i beni sono normali.

B)

1) Rendimenti di scala

$$Q' = 4(\alpha K)(\alpha L) = 4\alpha^2 KL = \alpha^2 Q \qquad \text{con } \alpha > 1$$

quindi rendimenti di scala crescenti.

2) Usando la condizione di ottimo abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{4K}{4L} &= \frac{w}{r} = \frac{200}{100} = 2 \\ \frac{K}{L} &= 2 \end{aligned}$$

quindi la funzione di produzione può essere scritta come

$$Q = 4KL = 8L^2 \text{ oppure } Q = 2K^2$$

e gli input ottimi

$$L = \sqrt{\frac{Q}{8}}, \qquad K = \sqrt{\frac{Q}{2}}$$

da cui la funzione di costo totale

$$\begin{aligned} C &= rK + wL = 100\sqrt{\frac{Q}{2}} + 200\sqrt{\frac{Q}{8}} \\ &= \frac{100}{\sqrt{2}}\sqrt{Q} + \frac{100}{\sqrt{2}}\sqrt{Q} \\ &= \frac{200}{\sqrt{2}}\sqrt{Q} \end{aligned}$$

2) Costo medio e Marginale

$$AC = \frac{200\sqrt{Q}}{\sqrt{2}Q} = \frac{200}{\sqrt{2}\sqrt{Q}}$$
$$MC = \frac{100}{\sqrt{2}\sqrt{Q}}$$

3) L'elasticità della funzione di costo alla produzione è

$$\varepsilon = \frac{dC}{dQ}\frac{Q}{C} = \frac{200}{2\sqrt{2}}Q^{-\frac{1}{2}}\frac{Q}{\frac{200}{\sqrt{2}}\sqrt{Q}} = \frac{1}{2}$$

4) Coerentemente con la funzione di produzione l'impresa ha economie di scala.