Geometria 1 - mod. A - Lezione 21

Note Title

Sia $f: K^n \longrightarrow K^m$ K-lineare. Essa è del tipo $\underset{\overset{\Downarrow}{K^n}}{x} \to Ax$

(NB) $A = \alpha_{EE}(f)$ con $A \in M_{m,n}(K)$

Infatti sia $A = (A_1, \dots, A_n)$ $A_i = f(e_i)$ colonna $\in K^m$

Posso considerare $f_A : K^n \longrightarrow K^m$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto Ax = \sum x_i A_i.$$

Noto che $f_A(e_i) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← i-esima entrata $= A_i = f(e_i)$

Dunque $f = f_A$ perché coincidono sulla base canonica.

<u>Conseg</u>: Ogni $f: K^n \to K^m$ lineare è del tipo $x \to Ax$

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & K^m \arrow[r, "g"] & K^r \end{tikzcd}$$

$A = \alpha_{EE}(f)$ matrice assoc. ad f

$B = \alpha_{EE}(g)$

$C = \alpha_{EE}(g \circ f)$

Voglio mostrare che $C = BA$; $A = (A_1, \dots, A_n)$

$C = (C_1, \dots, C_r)$

Basta mostrare che la colonna i-esima di C è la colonna i-esima di BA.

$$C_i = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ c_{ri} \end{pmatrix} = (g \circ f)(e_i) = g(f(e_i)) = g(A_i) = BA_i$$

$c_{1i} = (\text{riga } 1 \text{ di } B) \cdot A_i$

$c_{2i} = (\text{riga } 2 \dots) \cdot A_i$ $\Rightarrow$ colonna i-esima di (BA)

$\vdots$

$c_{ri} = (\text{riga } r \dots) \cdot A_i$

$$\mathrm{Hom}(K^n, K^m) \xleftrightarrow{\alpha} M_{m,n}(K) \quad \text{biiettiva}$$

$\{\text{appl. lineari } K^n \to K^m\}$ $f \longmapsto \alpha_{EE}(f)$ $\quad f_1, f_2 \to A \Rightarrow f_1 = f_2$

Ricordo . $A(BC) \overset{*}{=} (AB)C$ prop. associativa (se moltiplicabili)

Siano f_A f_B f_C le applicaz. lin associate ad A, B, C risp. $\begin{pmatrix} x \mapsto Ax \\ y \mapsto By \\ z \mapsto Cz \end{pmatrix}$

$*$ vale $\Leftrightarrow$ $f_A \circ (f_B \circ f_C) = (f_A \circ f_B) \circ f_C$

NOTA da teoria degli insiemi. ☑

$\overline{\quad\circ\quad}$

$\mathrm{Hom}(\underset{V}{K^n}, \underset{W}{K^m}) \ni f : \underset{V}{K^n} \longrightarrow \underset{W}{K^m}$ lineare

$\}$ ha struttura di sp. vett su K

$f, g : \underset{V}{K^n} \longrightarrow \underset{W}{K^m}$ lineari, $(f+g)(\underset{K^n\,V}{\underset{\cap}{v}}) = f(v) + g(v)$

$(\lambda f)(v) = \lambda f(v)$ $\forall v \in \underset{V}{K^n}$

con queste def è sp vett.

Lemma $\alpha : \mathrm{Hom}(K^n, K^m) \xrightarrow{\sim} M_{m,n}(K)$ è lineare

e anzi isomorfismo

Da verificare. $\alpha(f+g) = \underbrace{\alpha(f)}_{A} + \underbrace{\alpha(g)}_{B}$

. $\alpha(\lambda f) = \lambda\, \alpha(f)$

È immediato [basta vedere $(f+g)(e_i) = f(e_i) + g(e_i) = A_i + B_i \overset{!}{=} (A+B)_i$

$(\lambda f)(e_i) = \lambda f(e_i) = \lambda A_i = (\lambda A)_i$]

☑

• $A \cdot (B+C) \overset{**}{=} AB + AC$

$**$ è equivalente a vedere che $f_A \circ (f_B + f_C) = f_A \circ f_B + f_A \circ f_C$

è si verifica subito! $f_B, f_C : K^s \longrightarrow K^r$
$\downarrow f_A$
K^m

sia $v \in K^s$

$(f_A \circ (f_B + f_C))(v) = f_A((f_B + f_C)(v)) = f_A(f_B(v) + f_C(v))$

$= f_A(f_B(v)) + f_A(f_C(v)) = (f_A \circ f_B)(v) + (f_A \circ f_C)(v)$

Esercizio $(B+C)A = BA + CA$

$\left[\ \underset{\substack{\| \\ I_m \\ \uparrow}}{\mathbb{1}_m} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ M_{m,n}(K)}}{A} = A \qquad id \circ f_A = f_A \ \right]$

matrice identica.

Sia $f : V \longrightarrow W$ lineare tra spazi vett. di dim finita

Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

Sia $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ . . . . W

Sia A la matrice t.c. A_i siano le coordinate del vettore $f(v_i)$ nella base $\mathcal{W}$.

$\overset{\|}{(A_1, \dots, A_n)}$

Allora se $v \in V$ ha coordinate $x \in K^n$

$f(v) \in W$ ha coordinate $y \in K^m$ con $y = Ax$

$$\begin{tikzcd}
v \arrow[d, mapsto] \arrow[rrrr, bend left] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_{\mathcal{V}}"', "\wr"] & W \arrow[d, "\alpha_{\mathcal{W}}", "\wr"'] & w = f(v) \arrow[d, mapsto] \\
 & K^n \arrow[r, "f_A"'] & K^m & y \text{ coordinate di } w \\
x \text{ coord. di } v \arrow[rrr, bend right] & x \arrow[r, mapsto] & Ax & Ax
\end{tikzcd}$$

$\| \,?$ vero $\iff$ il quadrato commuta.

ossia $\alpha_{\mathcal{W}} \circ f = f_A \circ \alpha_{\mathcal{V}}$

$(\alpha_{\mathcal{W}} \circ f)(v_i) = \alpha_{\mathcal{W}}(f(v_i)) =$ coordinate di $f(v_i)$ risp alla base $\mathcal{W}$

per definizione di A

$(f_A \circ \alpha_{\mathcal{V}})(v_i) = f_A(e_i) = A_i$

$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Dunque $\alpha_{\mathcal{W}} \circ f = f_A \circ \alpha_{\mathcal{V}}$ perché coincidono sui vettori di $\mathcal{V}$.

Riassunto
- $K^n \xrightarrow{f} K^m$ lineare è del tipo $x \longmapsto Ax$ $\quad Hom(K^n, K^m) \overset{d_{\mathcal{E}\mathcal{E}}}{\underset{\text{iso di sp. vettori.}}{\cong}} M_{m,n}(K)$

  (NB) $A = \alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = A_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f)$. $\qquad f \longmapsto A$
- $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ fissati

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_{\mathcal{V}}"', "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & W \arrow[d, "\alpha_{\mathcal{W}}", "\wr"'] \\
K^n \arrow[r, "f_A"'] & K^m
\end{tikzcd}$$

dimostrazione!

$Hom(V, W) \xrightarrow[\text{iso}]{\sim} M_{m,n}(K)$

$f \longmapsto \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(f) = A_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(f) = A$

si verifica come nel caso di sp. vett. standard.

Osservo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f \rightsquigarrow A = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(f)"] \arrow[d, "\alpha_{\mathcal{V}}"'] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha_{\mathcal{W}}"] & Z \arrow[d, "\alpha_{\mathcal{Z}}"] \\ K^n \arrow[r, "A = \alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f_A)", "f_A"'] \arrow[rr, bend right, "f_C"'] & K^m \arrow[r, "f_B"'] & K^l \end{tikzcd}$$

f, g lineari

$\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{Z}$ basi di V, W, Z risp.

Allora $\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{Z}}(g \circ f) = BA$

$$\begin{matrix} \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{Z}}(g \circ f) = BA \\ \shortparallel \\ \alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\underbrace{f_B \circ f_A}_{f_{BA}}) = \underset{\substack{\shortparallel \\ C}}{BA} \end{matrix}$$

<u>Def</u> Siano $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ basi di V

La matrice $\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}'}(id_V)$ si dice matrice di cambio di base

$\{v_i\} = \mathcal{V}$ $\qquad$ $\mathcal{V}' = \{v_1', \dots v_n'\}$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "id"] & V \\ v \arrow[r, mapsto] & v \end{tikzcd}$$

$$\sum x_i v_i \qquad\qquad \sum y_i v_i'$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$A = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}'}(id)$

Nota le coord. x di v risp. a $\mathcal{V}$

Ax dà le coord di v risp a $\mathcal{V}'$

$$\begin{tikzcd} \overset{\mathcal{V}}{V} \arrow[r, "id", "A"'] \arrow[rr, bend right, "C = \mathbb{1}_n"'] & \overset{\mathcal{V}'}{V} \arrow[r, "id", "B"'] & \overset{\mathcal{V}}{V} \end{tikzcd}$$

$A = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}'}(id_V)$ $\qquad$ $B = \alpha_{\mathcal{V}'\mathcal{V}}(id)$

$\Rightarrow B \cdot A = C = \mathbb{1}_n$

$\Rightarrow B = A^{-1}$

$$\begin{tikzcd} v = \sum x_i v_i \arrow[r, mapsto, "id"] & v = \sum x_i v_i \end{tikzcd}$$

coord $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(Riprendo domani!)

$f: V \longrightarrow W$ K-lineare, sia $w \in W$

$$f^{-1}(\{w\}) = f^{-1}(w) \begin{cases} \emptyset & \text{se } w \notin \operatorname{Im} f = f(V) \quad \text{noto (risultato insiemi)} \\ \underbrace{v + \operatorname{Ker} f}_{=\{v+u \text{ con } u \in \operatorname{Ker} f\} \subseteq V} \text{ con } f(v)=w & \text{se } w \in \operatorname{Im} f \end{cases}$$

$\uparrow$ no sottosp. in generale se $w \neq 0$

Infatti: • sia $v \in f^{-1}(w)$ e sia $u \in \operatorname{Ker} f$

$$f(v+u) = f(v) + f(u) = w + 0 = w \implies v + \operatorname{Ker} f \subseteq f^{-1}(w)$$

• sia $v' \in f^{-1}(w)$, sia $u := v' - v$ allora

$$f(u) = f(v' - v) = f(v') - f(v) = w - w = 0 \implies u \in \operatorname{Ker} f$$

$$\implies v' = v + u \in v + \operatorname{Ker} f.$$

Osservo $f_A: K^n \longrightarrow K^m$, $x \longmapsto Ax$ sia $w = b$

$$f_A^{-1}(b) = \{x \text{ t.c. } Ax = b\} = \operatorname{Sol}(Ax=b)$$

$$\operatorname{Ker} f_A = \operatorname{Sol}(Ax = 0)$$

(confrontare con dim di R.C.)

§ ranghi

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_v", "\wr"'] & W \arrow[d, "\alpha_w"', "\wr"] \\ K^n \arrow[r, "f_A"', "x \mapsto Ax"] & K^m \end{tikzcd} \qquad (\text{basi } v,\ w) \qquad A = \alpha_{vw}(f)$$

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Im} f \arrow[r, "\sim"] & \operatorname{Im} f_A \\ W \arrow[u, phantom, "\supseteq"] \arrow[r, "\alpha_w", "\sim"'] & K^m \arrow[u, phantom, "\supseteq"] \end{tikzcd}$$

$$\implies \underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{=\operatorname{rk} f} = \dim \operatorname{Im} f_A = \dim \langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle = \operatorname{rk}_{col} A$$

Quindi $\operatorname{rk} f = \operatorname{rk}_{col} A$ $\qquad A = \alpha_{vw}(f)$

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$$

$$n = \dim K^n = \dim \operatorname{Ker} f_A + \dim \operatorname{Im} f_A$$

n $\qquad\qquad$ $rk_{col} A$

$$\dim \operatorname{Ker} f = n - rk_{col} A =$$
$$\overset{\|}{\dim \operatorname{Ker} f_A}$$
$$\overset{\|}{\dim \operatorname{Sol}(Ax=0)} = n - rk_{rig} A$$

$\Rightarrow$ $\boxed{rk_{rig} A = rk_{col} A.}$

(una delle possibili dim)

§ proiezioni e simmetrie

$$\begin{tikzcd} V = U \oplus W \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi'"] & U \\ W & \end{tikzcd}$$

$$v = u + w \longmapsto u$$
$$v \longmapsto w$$

π, π' lineari suriettive

$\operatorname{Ker} \pi = W$

$\operatorname{Ker} \pi' = U$

D'ora in poi, indicherò con $\pi_U^W : V \longrightarrow V$ endomorf
$$u + w \longmapsto u$$

$\operatorname{Ker} \pi_U^W = W$ $\qquad$ $\operatorname{Im} \pi_U^W = U$

$$\boxed{\pi_U^W = \underbrace{\pi_U^W \circ \pi_U^W}_{(\pi_U^W)^2 = \pi_U^W}}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] & V \arrow[r] & V \\ u+w \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "\pi_U^W"'] & \underset{u+0}{\overset{u}{\|}} \arrow[r, mapsto] & u \end{tikzcd}$$

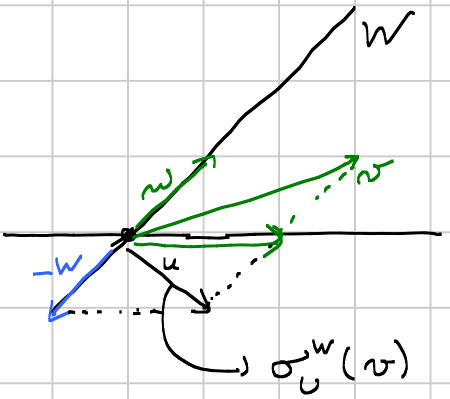
• $\underset{id(v)}{\overset{\|}{v}} = u + w = \pi_U^W(v) + \pi_W^U(v)$ $\Rightarrow$ $\boxed{id_V = \pi_U^W + \pi_W^U}$ *

in $\operatorname{Hom}(V, V)$

$id - \pi_W^U = \pi_U^W$

$V = U \oplus W$ $\qquad$ $\sigma_U^W : V \longrightarrow V$
$$\underset{v}{\overset{}{u+w}} \longmapsto u - w$$

simmetria di asse U e direzione W



si dimostra che è

• lineare
• biettiva

} automorfismo

• $(\sigma_U^W)^{-1} = \sigma_U^W$

ossia $(\sigma_U^W)^2 = id$

$$(\sigma_U^W)^2 = (\sigma_U^W)(\sigma_U^W(u+w)) = \sigma_U^W(u \underbrace{- w}_{+(-w)}) = u + w$$

- $(\sigma_U^W)^2 = id$
- $\sigma_U^W(u+w) = u-w = \pi_U^W(v) - \pi_W^U(v)$

$$\sigma_U^W = \pi_U^W - \pi_W^U \underset{\circledast}{=} id - \pi_W^U - \pi_W^U = id - 2\pi_W^U$$

<u>Esercizio</u>

$$\mathbb{R}^2 = \underbrace{<\overbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}^{=u_1}>}_{U} \oplus \underbrace{<\overbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}^{=u_2}>}_{W} \qquad \mathcal{U} = \{u_1, u_2\}$$

$f = \pi_U^W$

$\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = ?$ $\qquad \alpha_{\mathcal{U}\mathcal{U}}(f) = ?$