Geometria 1 - mod. A - Lezione 20

Note Title

- $f: V \longrightarrow W$ è <u>K-lineare</u> se $f(v+v') = f(v)+f(v')$
  $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ $\forall v, v' \in V$ $\forall \alpha \in K$
- $\operatorname{Ker} f = \{ v \in V \text{ t.c. } f(v) = 0_W \} = f^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(0)$
  è sottospazio vett. di V e la sua dimensione è detta
  <u>nullità</u> di f = $\operatorname{null} f$
- $\operatorname{Im} f = f(V)$ è sottosp. vett. di W e la sua dimens. è
  detta <u>rango di f</u> $\operatorname{rg} f = \operatorname{rk} f$.

<u>Osservo</u>: se $U \leq V \implies f(U) \leq W$ (visto)

se $U = \langle u_1, \dots, u_r \rangle \implies f(U) = \langle f(u_1), \dots, f(u_r) \rangle$

$\left(\text{sia } w \in f(U), \quad w = f(u) \text{ con } u = \sum a_i u_i \in U \right.$
$\left. \qquad \qquad = f(\sum a_i u_i) = \sum a_i f(u_i) \right)$

Formula delle dimensione (nullità + rango)

<u>Teo</u> Sia $f: V \longrightarrow W$ appl. K-lineare con V fin. generato.

Allora $\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$
$= \operatorname{null} f + \operatorname{rk} f$.

<u>Dim</u> Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base del $\operatorname{Ker} f$ ($\underset{n=0}{\emptyset}$ se f è iniett.)

La completo ad una base di V. $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots v_m$
(se $n=0$ prendo base qualsiasi di V)

$V = \langle v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots v_m \rangle$ $\dim V = m$

$\operatorname{Im} f = f(V) = \langle \underset{0}{\underset{\parallel}{f(v_1)}}, \underset{0}{\underset{\parallel}{f(v_2)}}, \dots \underset{0}{\underset{\parallel}{f(v_n)}}, \underbrace{f(v_{n+1}), \dots f(v_m)}_{m-n} \rangle$

Se gli $m-n$ vettori $f(v_i)$ rimasti sono l. indip. $\Rightarrow$
$\dim \operatorname{Im} f = m-n = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f$ e ho finito.

Dimostro allora: $\sum_{i=n+1}^{m} \alpha_i f(v_i) = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i$

$$0 = \sum_{i=n+1}^{m} \alpha_i f(v_i) = f\left(\sum_{i=n+1}^{m} \alpha_i v_i\right) \Longrightarrow \sum_{i=n+1}^{m} \alpha_i v_i \in \ker f$$

$$\Rightarrow \sum_{i=n+1}^{m} \alpha_i v_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} (-\beta_j) v_j + \sum_{i=n+1}^{m} \alpha_i v_i = 0$$

Ma $v_1, \dots, v_m$ sono l. indip (base di V)

$\Rightarrow \beta_j = 0 \ \forall j$ e $\alpha_i = 0 \ \forall i$ $\boxtimes$

$$\dim V = \text{null} f + \text{rk} f$$

<u>Conseguenze</u>.

- se f è iniettiva $\Longrightarrow \dim V = \dim \operatorname{Im} f$
- f è biiettiva $\Longrightarrow \dim V \underset{*}{=} \dim W$ $\quad (W = \operatorname{Im} f)$

Una appl. lineare f biiettiva ha come inversa una appl lineare

$f : V \longrightarrow W$ lineare e biiettiva $\Rightarrow f^{-1}$ lineare (e biiettiva)

<u>Dim</u> $g := f^{-1}$ Devo mostrare che $g(\alpha w + \beta w') = \alpha g(w) + \beta g(w')$

$\forall \ w, w' \in W, \ \alpha, \beta \in K$.

Essendo g biiettiva basta mostrare che $f(g(\alpha w + \beta w')) = f(\alpha g(w) + \beta g(w'))$

$f(g(\alpha w + \beta w')) = \alpha w + \beta w'$

$f(\alpha g(w) + \beta g(w')) \overset{f \text{ lineare}}{=} \alpha f(g(w)) + \beta f(g(w')) = \alpha w + \beta w'$ $\boxtimes$

- $f : V \longrightarrow W$ biiettiva e lineare si dice <u>isomorfismo</u>
- $f : V \longrightarrow V$ " .... <u>automorfismo</u>
- $f : V \longrightarrow V$ lineare si dice <u>endomorfismo</u>.

- Suppongo di sapere che $f : V \longrightarrow W$ è tale che
  - $\dim V = \dim W$ e f è suriettiva

$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \ker f + \dim W$

$\Longrightarrow \dim \ker f = 0 \Longrightarrow \ker f$ è $0 \Longrightarrow f$ è iniettiva.

• $\dim V = \dim W$ e f è iniettiva

$\Rightarrow \dim V = \cancel{\dim \operatorname{Ker} f} + \dim \operatorname{Im} f \Rightarrow \dim W = \dim \operatorname{Im} f \Rightarrow f$ suriett.

Osservazione: $f: V \longrightarrow W$ lineare $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

a) f è iniettiva $\overset{\text{Esercizio}}{\Longleftrightarrow}$ $f(v_1), \dots f(v_n)$ è base di $\operatorname{Im} f$ (dalla formula delle dimensioni / o applicando la formula)

$\Rightarrow$ sono vettori l. ind. in W

b) f è suriettiva $\overset{\text{Esercizio}}{\Longleftrightarrow}$ $f(v_1), \dots f(v_n)$ genera W

c) f è isomorfismo $\overset{\text{Esercizio}}{\Longleftrightarrow}$ $f(v_1), \dots f(v_n)$ formano base di W

Dunque isomorfismi mandano basi di V in basi di W e viceversa.

Osservo: $\alpha_{\mathcal{V}}: V \longrightarrow K^n$

$$v \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$ coordinate di v nella base $\mathcal{V}$

è biettiva e K-lineare $\Rightarrow$ isomorfismo.

$\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$

$v_1 = 1v_1 + 0v_2 + \dots 0v_n$

$\alpha_{\mathcal{V}}(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$

$\alpha_{\mathcal{V}}(v_2) = e_2$

$\vdots$

$\alpha_{\mathcal{V}}(v_n) = e_n$

$\alpha_{\mathcal{V}}$ manda $\mathcal{V}$ in $\mathcal{E} = \{e_1, \dots e_n\}$ base canonica di K^n

---

$f_A = f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ -y \\ 2x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0x & -y \\ 2x & -y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ lineare

$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ t.c. } A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & +1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{III+3II}{\overset{III-2I}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & \cancel{-3}\,0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x+y=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$\underline{\mathrm{rk}\, f} = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \mathrm{Ker} f = 2 - 0 = \underline{2}$

$\Rightarrow f$ no suriettiva $\mathrm{Im} f$ ha dim $2 < \dim \mathbb{R}^3$

Siano V, W due K-sp. vettoriali

$V \times W = \{ (v, w) \text{ con } v \in V, w \in W \}$ prodotto cartes. di insiemi.

ha struttura di K-sp. vett. "detta componente per compon"

$(v, w) + (v', w') := (v + v', w + w')$

$\lambda \cdot (v, w) := (\lambda v, \lambda w)$

} si verifica che dà struttura di K-sp. vett.

$$V \times W \xrightarrow{pr_1} V \qquad (v, w) \longmapsto v$$

$$V \times W \xrightarrow{pr_2} W \qquad (v, w) \longmapsto w$$

sono lineari e suriettive. $(v, 0_W) \longmapsto v$

$\dim(V \times W) = ?$

Siano $\dim V = n$ $\qquad \dim W = m$

$\mathcal{V} = \{ v_1, \dots, v_n \}$ $\qquad \mathcal{W} = \{ w_1, \dots, w_m \}$ base di W

Gli elementi $(v_1, 0_W), \dots, (v_n, 0), (0_V, w_1), \dots (0, w_m)$

formano base di $V \times W$.

$$V \times W \ni (v, w) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j \right) = \left(\sum \alpha_i v_i, 0 \right) + \left(0, \sum \beta_j w_j \right)$$

$$(v, w) = (v, 0) + (0, w)$$

$$= \underbrace{\sum \alpha_i (v_i, 0) + \sum \beta_j (0, w_j)}_{\text{i vettori dati sono generatori}}$$

Verificare che sono l. ind.

(esercizio!)

Dunque $\dim(V \times W) = n + m = \dim V + \dim W$

$$V \times W \xrightarrow{pr_1} V$$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\, pr_1 = (n + m) - n = m$

$\{ (v, w) \in V \times W \text{ t.c. } pr_1(v, w) = 0 \} = \mathrm{Ker}\, pr_1$

$pr_1(v, w) = 0_V \iff v = 0$

Dunque $\mathrm{Ker}\, pr_1 = \{(0_V, w) \mid w \in W\} < V \times W$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}\, pr_1 & & (0,w) \\ \uparrow\downarrow & & \updownarrow \\ W & & w \end{array}$$

lineare

isomorfismo

Analogamente con $pr_2 : V \times W \twoheadrightarrow W$

$\mathrm{Ker}\, pr_2$ è isomorfo a V (ha dim n)

$U \leq V$ sp. vett. su K

$$V \xrightarrow{\;p\;} V/U = V/_{\sim}$$
$$v \longmapsto [v]$$

$v \sim v' \iff v - v' \in U$

p è una appl. K-lineare suriettiva.

anche insiemistic.

$\underbrace{[v+v']}_{p(v+v')} := \underbrace{[v]}_{p(v)} + \underbrace{[v']}_{p(v')}$ $\qquad \underbrace{\lambda[v]}_{\lambda p(v)} := \underbrace{[\lambda v]}_{p(\lambda v)}$

- Struttura di sp. vett su V/U è stata definita in modo tale che p sia lineare!
- Sia $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_m\}$ base di U

e sia $\mathcal{V} = \{u_1, \dots u_m, v_{m+1}, \dots v_n\}$ completamento a base di V

$$V/U = \langle \underset{0}{\overset{\shortparallel}{p(u_1)}}, \dots \underset{0}{\overset{\shortparallel}{p(u_m)}}, \underbrace{p(v_{m+1}), \dots p(v_n)}_{\overset{\shortparallel}{[v_{m+1}], \dots, [v_n]}} \rangle$$

generatori e sono l. indip. (esercizio!)

$u \in U$ $p(u) = [u]$

$0_{V/U} = \{v$ che sono $\sim$ a $0\} = \{v \in U\} = U$

$0 = \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_i [v_j]$ . . .

$$\overset{n}{V} \xrightarrow{\;p\;} \overset{n-m}{V/U}$$

$\dim \mathrm{Ker}\, p = m$

$\mathrm{Ker}\, p \leq V$ $\qquad U \leq \mathrm{Ker}\, p$ $\qquad p(u) = [u] = 0_{V/U}$

$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Ker}\, p = U}$

§ Matrice associata ad una applicazione lineare

Sia $f: V \longrightarrow W$ K-lineare

Siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V
$\mathcal{W} = \{w_1, \dots w_m\}$ - - - - W } FISSATE ordinate

$A_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(f) :=$ matrice che ha per colonne $(C_1, \dots, C_n)$ le coordinate di $f(v_i)$ rispetto alla base $\mathcal{W}$

$$v_1 \longmapsto \underset{W}{\underset{\cap}{f(v_1)}} = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m$$

$$f(v_k) = a_{1k}w_1 + a_{2k}w_2 + \dots a_{mk}w_m$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
$$\quad \underbrace{\ }_{C_1} \qquad \underbrace{\ }_{C_k} \qquad \underbrace{\ }_{C_n}$$

$A = A_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(f)$ è importante per il fatto seguente.

Se $v \in V$ ha coordinate $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ risp. a $\mathcal{V}$ allora
$f(v) \in W$ - - - - - $y = Ax \in K^m$ risp. a $\mathcal{W}$

$$\boxed{y = Ax}$$

<u>Esempio</u> $\frac{d}{dx} = f : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$
$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \longmapsto a_1 + 2a_2 x$$

$\mathcal{V} = \mathcal{W} = \{\underset{v_1 = w_1}{1}, x, x^2\}$

$$1 \longmapsto 0 = 0 \cdot 1 + 0x + 0x^2$$
$$x \longmapsto 1 = 1 \cdot 1 + 0x + 0x^2$$
$$x^2 \longmapsto 2x = 0 \cdot 1 + 2x + 0x^2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$v = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \xrightarrow{\text{coord}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$f(v) = a_1 + 2a_2 x \overset{\text{coord}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

- Esercizio

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = ?$$

$V = U \oplus W$ $\qquad$ U e W sono complementari

$$\underset{\displaystyle v}{\ni} \ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{è unica}}}{=} \ u + w \qquad u \in U \quad w \in W$$

$$V \xrightarrow{\pi} U$$
$$v = u + w \longmapsto u$$

$$V \xrightarrow{\pi'} W$$
$$v = u + w \longmapsto w$$

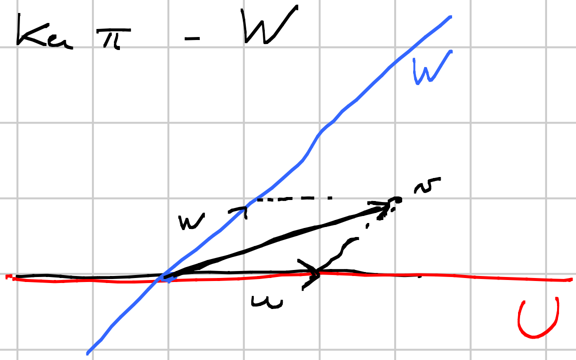
Si dimostra che sono lineari e suriettive.

dim $W = m$, dim $U = n$ $\Longrightarrow$ dim V = dim $(U \oplus W) = n + m$

noto che dim V = $\underset{\text{rk di } \pi}{\underset{\parallel}{\text{dim } U}}$ + null π $\Longrightarrow$

dim Ker π = m = dim W

e Ker π = W $\qquad$ $u + w \longrightarrow u = 0 \iff \cancel{X} + w \in W$



$$\mathbb{R}^2 = \underset{\displaystyle U}{\underset{\parallel}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}} \oplus \underset{\displaystyle W}{\underset{\parallel}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}}$$
$$\downarrow$$
$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$