Geometria 1 - mod. A - Lezione 19

Note Title

§ Applicazioni K-lineari

$\varphi: V \longrightarrow W$ lineare se
a) $\varphi(v+v') = \varphi(v) + \varphi(v')$ $\forall v, v' \in V$
b) $\varphi(\alpha v) = \alpha \varphi(v)$ $\alpha \in K$

Osservo (esercizio dimostraz.)

- $\varphi: V \longrightarrow W$ è lineare $\iff$ $\varphi(\alpha v + \mu v') = \alpha\varphi(v) + \mu\varphi(v')$ $\forall \alpha, \mu \in K$ e $\forall v, v' \in V$

rispetta comb. lineari di lungh. 2

$\iff \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(v_i)$ (risp. comb. lineari)
$\forall n \in \mathbb{N}_{>0}$, $\forall v_1 \dots v_n \in V$, $\forall \alpha_i \in K$.

- $\varphi: V \to W$ lineare $\Longrightarrow \varphi(0_V) = 0_W$
$\left(\varphi(0_V) = \varphi(0_K \cdot v)\right.$ $= 0_K \varphi(v) = 0_W$
v qualsiasi in V

NON vale il viceversa.

- $\varphi: V \to W$ lineare $\Longrightarrow \varphi(-v) = -\varphi(v)$ $\forall v \in V$

esercizio!

- Sia $\varphi: V \longrightarrow W$ lineare con $\mathcal{V}$ una base di V.
Allora φ è individuata univocamente dalle immagini $\varphi(v)$ al variare di $v \in \mathcal{V}$.
Infatti: se $v' \in V$, $v' = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ per $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$
con $a_1, \dots a_n$ univoc. determ. da v'

$$\varphi(v') = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(v_i)$$

Ad es. per definire $\varphi: K^3 \longrightarrow K^2$ basta definire chi sono $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$ $\quad \{e_1, e_2, e_3\} = \mathcal{E}$ base canonica
$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \dots$

e anzi comunque scelti $w_1, w_2, w_3 \in K^2$ (non necess. distinti)
$\exists!\ \varphi: K^3 \to K^2$ t.c. $\varphi(e_i) = w_i$

⚠ se invece di una base considero un insieme di generatori

ad es. $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ con $m > \dim_K V$

allora se scelgo $w_1, \dots, w_m \in W$ in generale

non esiste $\varphi : V \longrightarrow W$
$\quad v_i \longmapsto w_i$

Infatti: esiste $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0_V$ con a_i non tutti 0
(v_i sono l. dip.)

Se φ esiste. $\varphi(\sum a_i v_i) = \varphi(0_V) = 0_W$

$$\varphi\left(\sum a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{m} a_i w_i$$

questo ha senso solo se
i w_i sono l. dip.
con la stessa dip. dei v_i

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^3$$

$\mathbb{R}^2 = \langle e_1, e_2, e_1+e_2 \rangle$? φ t.c. $\varphi(e_1) = e_1$, $\varphi(e_2) = e_2$, $\varphi(e_1+e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi(e_1) + \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$ NON esiste!

$\mathbb{R}[x]$ è un $\mathbb{R}$-sp. vettoriale

$$\frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$$
$$\text{cost.} \longmapsto 0$$
$$a x^i \longmapsto i a x^{i-1} \quad i > 0$$

Questa è lineare

e rispetta la $+$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \longmapsto \sum_{i=1}^{m} i a_i x^{i-1}$$

risp. comb. lineari

$$\left(\begin{array}{l} 1 \longrightarrow 0 \\ x^i \longrightarrow i x^{i-1} \quad i > 0 \end{array} \right)$$ def. sulla base

esempio da Analisi.

§ Nucleo e immagine di appl. lineari

$f : V \longrightarrow W$ K-lineare

$\mathrm{Im} f = f(V) \subseteq W$ immagine $= \{ w \in W \text{ t.c. } \exists v \in V \text{ con } f(v) = w \}$

$V \supseteq \mathrm{Ker} f = \{ v \in V \text{ t.c. } f(v) = 0_W \}$ nucleo (Kernel) diretta (usando i criteri)

__Esercizio__ dimostrare che $\mathrm{Im} f$ e $\mathrm{Ker} f$ sono sottospazi rispettiv. di W e di V

Dim. indiretta.

__Lemma__ Sia $f: V \to W$ lineare.

a) Se $U \leq V \Rightarrow f(U) \leq W$.

b) Se $Z \leq W \Rightarrow f^{-1}(Z) = f^{\leftarrow}(Z) \leq V$

$$\underbrace{\{ v \in V \text{ t.c. } f(v) \in Z \}}_{\text{mai vuoto}}$$

NB $0_W \in W$, $f(0_V) = 0_W \in \mathrm{Im} f \Rightarrow W \cap \mathrm{Im} f \neq \emptyset$

__Dim__ a) $u_1, u_2 \in U$, $\lambda, \mu \in K$, $w_1 = f(u_1)$ $w_2 = f(u_2)$ (sono in $f(U)$)

$\lambda w_1 + \mu w_2 = \lambda f(u_1) + \mu f(u_2) = f(\underbrace{\lambda u_1 + \mu u_2}_{\in U}) \in f(U)$

$\cap ?$ $f(U)$

è un sottosp

$\Rightarrow f(U)$ è sottosp. per il II criterio

b) Siano $v_1, v_2 \in f^{-1}(Z)$ e siano $\lambda, \mu \in K$

$f(v_1) = z_1$ $f(v_2) = z_2$ con $z_i \in Z$

Voglio mostrare che $\lambda v_1 + \mu v_2 \in f^{-1}(Z)$ $(\Leftrightarrow f(\lambda v_1 + \mu v_2) \in Z)$

$f(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2) = \lambda z_1 + \mu z_2 \in Z$.

$\Rightarrow f^{-1}(Z)$ sottosp. per II criterio. $\boxed{F}$

__Conseguenze__. • se prendo $U = V$ in a) deduco che $f(V) = \mathrm{Im} f \leq W$

• se prendo $Z = \{0\}$ in b) deduco che $f^{-1}(\{0\}) = \mathrm{Ker} f \leq V$

__Def__ • $f: V \to W$ K-lineare si dice iniettiva se $f(v) = f(v') \Rightarrow v = v'$

• f si dice suriettiva se $f(V) = W$.

stessa def. del caso insiemistico

__Lemma__ $f: V \to W$ lineare è iniettiva $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = 0$

__Dim__ $\Rightarrow$) Sia f iniettiva e ~~sia~~ $v \in \mathrm{Ker} f$.

So che $0_V \in \mathrm{Ker} f$ e quindi $f(v) = 0_W = f(0_V)$

Per l'iniett. $v = 0_V$

$\Leftarrow$ Suppongo $\operatorname{Ker} f = 0$

Siano $v, v' \in V$ t.c. $f(v) = w = f(v')$

Allora $f(v - v') = f(v) - f(v') = w - w = 0_W$. Allora $v - v' \in \underset{\{0\}}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{Ker} f}}$

$\Longrightarrow v = v'$

Dunque f è iniettiva. $\boxtimes$