Geometria 1 - mod. A - Lezione 18

Note Title

Per il compitino: iscriversi alla lista in Moodle. È necessario entrare in Moodle registrandosi e non come guest.
Al compitino non si possono portare libri, fogli, calcolatrici

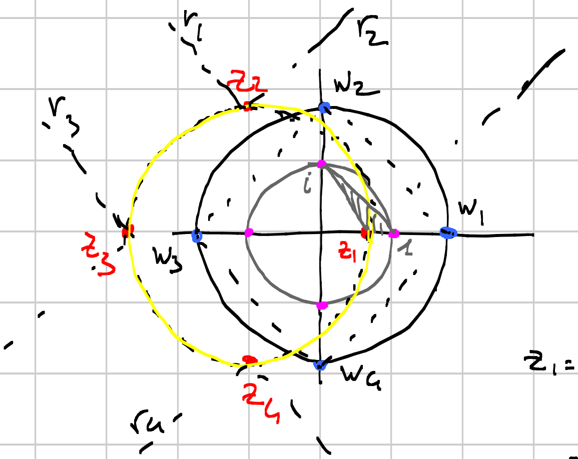
Esercizio. Si trovino le radici del polinomio $(z+1)^4-9$.
Determinare le rette passanti per le 4 radici e le loro inversioni rispetto alla circonferenza unitaria (S^1).
Sia z_1 la radice reale positiva. Disegnare l'immagine tramite l'inversione sopra della superficie racchiusa dal triangolo $z_1, 1, i$

$(z+1)^4 = 9$ $\qquad w = z+1 \Rightarrow z = w-1$ $\qquad w^4 = 9$ $\qquad w_1, w_2, w_3, w_4$

$\boxed{z_i = w_i - 1}$

Studio $w^4 = 9 = 9e^{i\theta}$ $\qquad |w_i| = \sqrt[4]{9} = \sqrt[2]{3}$

$$\theta_i : \underbrace{\frac{\theta}{4}}_{0},\ \underbrace{\frac{\theta}{4}+\frac{2\pi}{4}}_{\frac{\pi}{2}},\ \underbrace{\frac{\theta}{4}+\frac{4\pi}{4}}_{\pi},\ \underbrace{\frac{\theta}{4}+\frac{6\pi}{4}}_{\frac{3\pi}{2}}$$



$w_1 = \sqrt[2]{3}$ $\qquad w_2 = \sqrt[2]{3}\, i$ $\qquad w_3 = -\sqrt[2]{3} \cdot \cancel{i}$

$w_4 = -\sqrt[2]{3}\, i$

$z_i = -1 + w_i$

$z_1 = -1+\sqrt[2]{3}$, $z_2 = -1+\sqrt[2]{3}\, i$, $z_3 = -1-\sqrt[2]{3}$, $z_4 = -1-\sqrt[2]{3}\, i$

retta $z_1 z_2$:
- imporre passaggio per i 2 punti $ax+by+c=0 \rightarrow \bar\alpha z + \alpha \bar z + C = 0$ $\quad \boxed{\alpha = a+ib,\ C = 2c}$
- osservo che è parallela a $w_1 w_2$: $x+y = \sqrt{3}$

$\rightarrow x+y = -1+\sqrt[2]{3}$ (passa per $(-1+\sqrt[2]{3}, 0)$) $\leftarrow z_1$
" " $(-1, \sqrt[2]{3})$ $\leftarrow z_2$

$z_3 z_4 \rightsquigarrow x+y = -1-\sqrt[2]{3}$ (passo per z_3 e z_4) $\rightarrow x+y+1+\sqrt[2]{3} = 0$
parallela a $z_1 z_2$

$r_1 : z_1 z_2$: $x+y+1-\sqrt[2]{3} = 0$ $\qquad \alpha = 1+i$

$\bar\alpha z + \alpha \bar z + 2C = 0 \rightsquigarrow (1-i)z + (1+i)\bar z + 2(1-\sqrt[2]{3}) = 0$

$r_3 : z_3 z_4$ $\qquad (1-i)z + (1+i)\bar z + 2(1+\sqrt[2]{3}) = 0$

Inversione di r_1 risp. a S^1 $\qquad z \xrightarrow{\varphi} 1/\bar{z} \qquad \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$

$$\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + C = 0 \quad \overset{\text{invers.}}{\rightsquigarrow} \quad \bar{\alpha} \frac{1}{\bar{z}} + \alpha \frac{1}{z} + C = 0$$

$$\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + C z\bar{z} = 0$$

se $C = 0$ stesso retto

se $C \neq 0$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{\frac{\bar{\alpha}}{C} z + \frac{\alpha}{C} \bar{z} + z\bar{z} = 0}$

$\varphi(r_1)$ $\qquad \frac{1-i}{2(1-\sqrt{3})} z + \underbrace{\frac{1+i}{2(1-\sqrt{3})}}_{\alpha'} \bar{z} + z\bar{z} = 0$

centro di questa circonf è $-\alpha' = -\frac{1}{2(1-\sqrt{3})} - \frac{i}{2(1-\sqrt{3})} \overset{!}{=} \frac{1}{2(\sqrt{3}-1)} + \frac{i}{2(\sqrt{3}-1)}$

raggio è $|\alpha'|$

e analogamente per r_3

$$\frac{1-i}{2(1+\sqrt{3})} z + \frac{1+i}{2(1+\sqrt{3})} \bar{z} + z\bar{z} = 0 \qquad \text{centro è } -\frac{1+i}{2(1+\sqrt{3})}$$

raggio è $|\alpha'|$

Analogamente per le altre due rette $z_3 z_2$, $z_4 z_1$ $\qquad x - y = ?$

$\alpha = 1 - i$

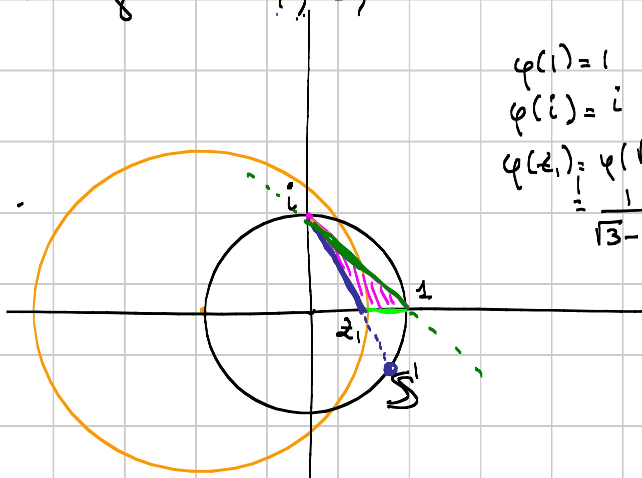
⋮

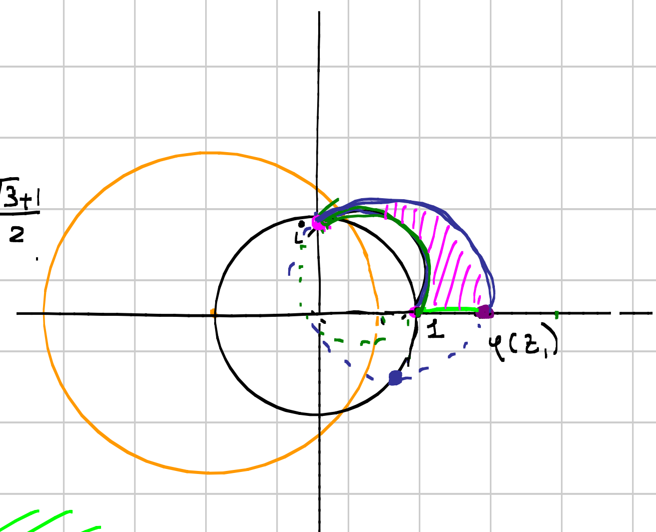
Ora basta applicare quanto visto nella pagina ⊛ al triangolo $z_1, 1, i$

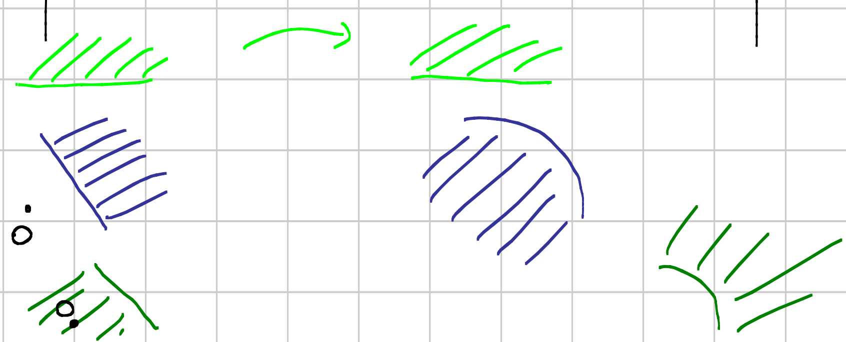
$\varphi(1) = 1$

$\varphi(i) = i$

$\varphi(z_1) = \varphi(\sqrt{3}-1) \overset{!}{=} \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$





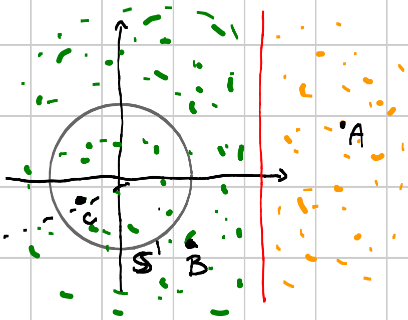


Pagina ⊛ di ripasso

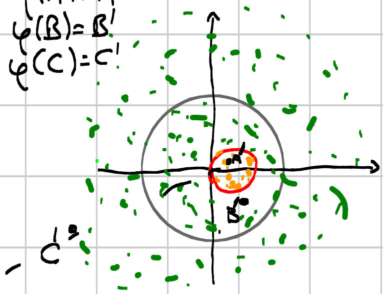
Inversione rispetto alla circonf unitaria $\quad z \longmapsto \frac{1}{z} = \frac{\bar z}{|z|^2}$ in $\mathbb{C}^*$

$z = \rho e^{i\theta} \longmapsto \frac{1}{\rho} e^{i\theta}$,,

$x+iy \longmapsto \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{y}{x^2+y^2}$



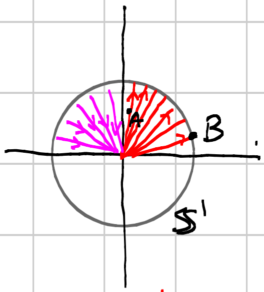
$\varphi(A) = A'$
$\varphi(B) = B'$
$\varphi(C) = C'$

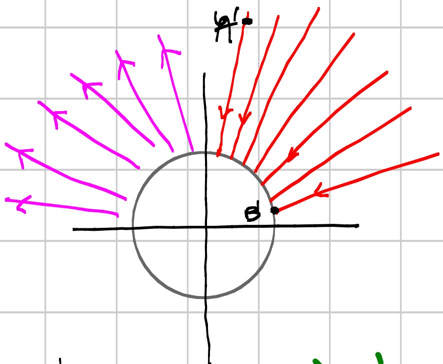


semipiano disgiunto da S^1

$\}$

interno del ○

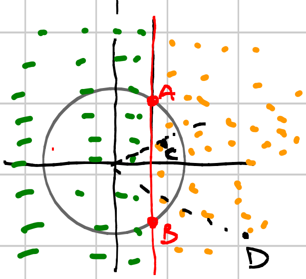




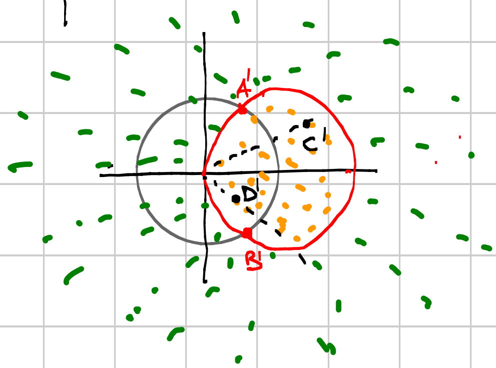
interno S^1

$\}$

esterno S^1



$A = A'$
$B = B'$

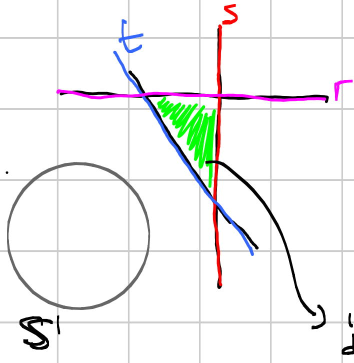


semipiano che interseca S^1 e non contiene Origine

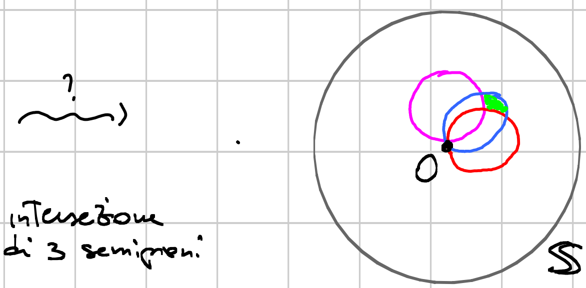
$\}$

interno ○

(AB) rette per O vengono mandate in sé



intersezione di 3 semipiani



esterna a ○
esterna a ○
interna a ○

- ∇ è contenuto nel semipiano che contiene anche l'origine (nemmeno S^1)

Dunque $\varphi(\nabla)$ è esterno a ○ $= \varphi(r)$

- ∇ è contenuto nel semipiano che contiene anche S^1

$\Rightarrow \varphi(\nabla)$ è esterno a ○ $= \varphi(s)$

- ∇ è contenuto nel semipiano che non contiene l'origine

$\Rightarrow \varphi(\nabla)$ è interno a ○ $= \varphi(t)$