$v_1 = e_1 - 3e_3,\ v_2 = e_3 - e_2,\ v_3 = 2e_1 + e_2 + e_3,\ v_4 = 2e_1 + e_3$ in $\mathbb{R}^3$

i. Relazione lineare non banale tra $v_1, \dots, v_4$.

N.B. Sappiamo già che i vettori sono dipendenti, poiché sono 4 in $\mathbb{R}^3$.

$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$: imponiamo che $av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 = 0$.

$$\begin{cases} a+2c+2d=0 \Rightarrow a=-2c-2d \\ -b+c=0 \Rightarrow b=c \\ -3a+b+c+d=0 \Rightarrow -3a+2c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=7 \\ c=7 \\ d=-8 \end{cases}$$

Dunque la relazione è $2v_1 + 7v_2 + 7v_3 - 8v_4 = 0$.

ii. $U = \langle v_1, v_2 \rangle, W = \langle v_3, v_4 \rangle$: dimensione e base di $U+W$ e $U \cap W$. È vero che $U+W = U \oplus W$?

Chiaramente v_1 e v_2 sono indipendenti (non sono proporzionali), e lo stesso vale per v_3 e v_4 $\Rightarrow \dim U = 2 = \dim W$.

Per trovare un vettore in $U \cap W$, sfruttiamo la relazione $2v_1 + 7v_2 + 7v_3 - 8v_4 = 0$: abbiamo $\overbrace{2v_1 + 7v_2}^{\in U} = \overbrace{7v_3 + 8v_4}^{\in W}$, dunque

questo vettore appartiene a $U \cap W \Rightarrow U \cap W = \langle 2v_1 + 7v_2 \rangle$ e $\dim U \cap W = 1$ (<2, altrimenti avremmo $U \cap W = U = W$ $\lightning$).

Formula di Grassmann: $\dim U+W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 2+2-1 = 3 \Rightarrow U+W = \mathbb{R}^3$.

$v_1, \dots, v_4$ sono generatori di $U+W$, ma non sono una base poiché sono dipendenti: possiamo toglierne uno a piacimento, poiché compaiono tutti nella relazione lineare $\Rightarrow U+W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

La somma di U e W non è diretta, poiché $U \cap W \neq \langle 0 \rangle$.

iii. $v = 2e_1 - 3e_2 + e_3 \in U, U \cap W, U+W$?

Equazione cartesiana di U:

$U = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} x_1 = a \\ x_2 = -b \\ x_3 = -3a+b \end{matrix} \right\}$ combinazioni lineari di v_1 e v_2 $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = -b \\ x_3 = -3x_1 - x_2 \end{cases}$

↳ L'equazione è $3x_1 + x_2 + x_3 = 0$, e v non la soddisfa $\Rightarrow v \notin U$

Poiché $v \notin U$, allora $v \notin U \cap W$. Oppure, ciò si può vedere dal fatto che $2v_1 + 7v_2 = 2e_1 - 7e_2 + e_3$, e tale vettore ha due coordinate uguali a v, ma la terza no.

Poiché $U+W = \mathbb{R}^3$, certamente $v \in U+W$.

iv. Esiste un sottospazio L di $\mathbb{R}^3$ t.c. $U \oplus L = W \oplus L = \mathbb{R}^3$?

U e W sono due piani passanti per l'origine di $\mathbb{R}^3$ che si intersecano in una retta ($\dim U \cap W$)=1.

Per Grassmann, imponendo la somma diretta (i.e. $\dim U \cap L = 0 = \dim W \cap L$), otteniamo $\dim L = 1$ $\Rightarrow$ ci chiediamo allora se esiste una retta per l'origine non contenuta nell'unione dei due piani.

Prendiamo un vettore che non appartiene né a U né a W, ad es. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$: $L = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$.