Geometria 1 - mod. A - Lezione 16

Note Title

$Ax = b$ sist. lineare $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$A \in M_{m,n}(K)$

matrice incompleta del sistema, $(A|b)$ è la matrice compl.

$A = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ $\quad C_i$ colonna i-esima di A.

$Ax = b$

$x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_n C_n = b$

Dunque $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ danno soluz. $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ del sistema $Ax = b$

$\Longleftrightarrow \sum \alpha_i C_i = b \Longleftrightarrow$ le comb. lineare delle C_i con coeff. α_i dà $b \in K^m$

Dunque il sistema ha soluzioni $\Longleftrightarrow b \in \langle C_1, \dots, C_n \rangle \leq K^m$

$\Longleftrightarrow \langle C_1, \dots, C_n \rangle = \langle C_1, \dots, C_n, b \rangle$

$$\Longleftrightarrow \underset{\text{dim.}}{\mathrm{rg}_{\text{colonna}} A} = \underset{\text{dim.}}{\mathrm{rg}_{\text{colonna}} (A|b)}$$

$$\mathrm{rg}_{\text{riga}} A \qquad \mathrm{rg}_{\text{riga}} (A|b) \qquad \mathrm{rg} = \mathrm{rk}$$

Con questo ho dimostrato 1ª parte del T. di R.-C.

(*) " $Ax = b$ ha soluzioni $\Longleftrightarrow \mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}(A|b)$ "

Dim alternativa (*).

$Ax = b \xrightarrow{\text{op. el.}}$ sistema eq. $A'x = b'$ con $(A'|b')$ a scala ridotta.

$Ax = b$ ammette sol. $\Longleftrightarrow A'x = b'$ ammette soluz.

Posso assumere $(A|b)$ sia a scala ridotta.

$rg\,A < rg(A|b)$ $\begin{pmatrix} 0\,1 & \ldots & & \\ & & \ldots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ un pivot cade sulla colonna dei termini noti b

$\Leftrightarrow$ ho un'eq. $0 = 1$ $\Rightarrow$ il sistema non ammette soluz.

$r = rg\,A = rg(A|b) \Leftrightarrow$ I pivot cadono tutti in A

$$\begin{array}{c} \quad j_1 \quad j_2 \qquad\quad j_r \\ \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \boxed{1} & * & & & & b_1 \\ \vdots & 0 & 0 & \boxed{1} & * & & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & \boxed{1} & \vdots \\ 0 & & & & 0 & 0 & b_m \end{array}\right) \end{array} \qquad \begin{cases} x_{j_1} = \text{qualcosa che dip. dalle indeterminate } x_i,\ i \notin J \ + b_1 \\ x_{j_2} = \text{iden} \ + b_2 \\ x_{j_m} = \ldots \ + b_m \end{cases}$$

$r = \#\text{pivot}$ $\quad J = \{j_1, \ldots, j_r\}$ $\quad \#(\{1, \ldots, n\} \setminus J) = n - r$

Se pongo a zero tutte le x_i per $i \notin J$

$x_{j_1} = b_1,\ x_{j_2} = b_2, \ldots\ x_{j_m} = b_m$

E questo da' una soluzione del sistema.

Ora bisogna descrivere tutte le soluzioni quando $rk\,A = rk(A|b)$

$$\boxed{Sol(Ax = b) = \underbrace{x' + Sol(Ax = 0)}_{\{x' + y,\ y \in Sol(Ax=0)\} \subseteq K^m}}$$

ove x' è una soluzione particolare di $Ax = b$

$Sol(Ax=0) \subseteq K^m$; non sottosp. in generale

$\supseteq$ Sia y t.c. $Ay = 0$. Mostriamo che $A(x' + y) = b$ ossia $x' + y \in Sol(Ax = b)$

$$A(x' + y) = Ax' + Ay = Ax' + 0 = b + 0 = b$$

$\subseteq$ Sia $x'' \in Sol(Ax = b)$. Mostro che $\underbrace{x'' - x'}_{y} \in Sol(Ax = 0)$

$$A(x'' - x') = Ax'' - Ax' = b - b = 0$$

Dunque $x'' = x' + y$ con $y \in Sol(Ax = 0)$.

NB Sia n il # delle indeterminate

$r = rg\, A = rg(A|b)$

Allora $\dim Sol(Ax=0) = n - r$

Infatti $n-r$ sono i parametri che descrivono le soluzioni

(riprendere dopo aver studiato le appl. lineari!)

Esempio

$x_3 - x_4 = 3$ in 5 indeterminate

$$\begin{array}{cccccc} & x_2 & x_3 & x_4 & & \\ \end{array} \quad (0\ 0\ \boxed{1}\ -1\ 0\ |\ 3)$$

$rg A = 1 = rg(A|b)$

$Sol(A|b) = x' + Sol(Ax=0) \longrightarrow x_3 - x_4 = 0$

$\dim = 5-1 = 4$

ad es pongo $=0$ le indeterm. che non corrisp. al pivot

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a \\ x_2 = b \\ x_4 = c \\ x_5 = d \end{array}\right\} = 0 \qquad x_3 = 3$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x'$$

$x_3 = x_4$

$$Sol(Ax=0) = Sol(x_3 - x_4 = 0) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ c \\ d \end{pmatrix},\ a,b,c,d \in K \right\} \leq K^5$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leadsto \text{ha dim } 4$$

Sia $Ax = b$ sistema con matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & -k & 0 \\ k^2 & 1 & k^2 & 0 \end{array}\right)$$

dire per quali valori di k il sistema ammette soluzioni e poi trovarle!

$$\begin{array}{c} II - kI \\ \leadsto \\ III - k^2 I \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & -2k & -k \\ 0 & \underbrace{1-k^2}_{(1-k)(1+k)} & 0 & -k^2 \end{array}\right)$$

se $k = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \qquad rg A = 2 < rg(A|b) = 3$$

No soluzioni

$\boxed{\text{se } k \neq 1}$

$III - \widetilde{(k+1)}\, II$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1-k} & -2k & -k \\ 0 & 0 & * & \underbrace{-k^2 + k(k+1)}_{k} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & -2k & -k \\ 0 & 0 & 2k(k+1) & k \end{array}\right)$$

Devo discutere $2k(k+1)$

$2k(k+1) \neq 0$ (ossia $k \neq 0$ e $k \neq -1$) (nella sit. $k \notin \{-1, 0, 1\}$)

allora il sistema ammette soluz. ed è unica perché $r = 3$

$k = 0$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ammette soluz $x' + \langle (\ ) \rangle$

$k = -1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \end{array}\right)$ non ammette soluz.

Trovate per $k \notin \{-1, 0, 1\}$ → dipende da parametro.

. - - - $k = 0$