Geometria 1 - mod. A - Lezione 15

Note Title

Alg di Gauss: è possibile ridursi a una forma a scala applicando scambi di riga (i) e $r + \alpha r'$ $r \neq r'$ (operaz. iii)) r' sopra r

E se applico anche ii) αr $\alpha \neq 0$ posso ridursi a una forma a scala speciale e anzi ridotta

Dim. Sia A una matrice non nulla. Si procede per induzione sul numero delle righe. Se la matrice ha una sola riga, abbiamo finito perché è già a scala. Se vi sono più di una riga, a meno di un'operazione elementare del tipo i) possiamo supporre che la prima colonna non nulla abbia il primo termine dall'alto non nullo, sia a_{1,j_1}. Allora tramite operazioni elementari del tipo iii) possiamo fare in modo che tutti gli altri termini di quella colonna diventino nulli. Ora si procede per induzione sulla sottomatrice che si ottiene cancellando la prima riga e le prime j_1 colonne, ossia la colonna che contiene a_{1,j_1} e tutte quelle a sinistra di questa. Si ottiene così una matrice con un numero inferiore di righe e per induzione concludiamo che il processo si arresta dopo un numero finito di passi arrivando ad una matrice a scala. A questo punto dividendo ciascuna riga che contiene il pivot per il pivot (ossia con una operazione di tipo ii) in cui si moltiplica la riga per l'inverso del pivot in essa contenuto) otteniamo una matrice speciale. Data poi una matrice in forma a scala speciale, sempre per induzione, possiamo tramite operazioni di tipo iii') rendere nulli tutti i termini che stanno nella colonna di un pivot, a parte il pivot stesso. $\square$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \underset{III-3I}{\overset{II-2I}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 4 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -5 \\ 0 & 2 & -12 & -4 \end{pmatrix}$$

lavoro su questa sottomatrice

$$\underset{III-2II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 4 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{-6} & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

è a scala.

Pivot: 1, 1, -6

$$\xrightarrow{-\frac{1}{6}III} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 4 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{pmatrix}$$ forma a scala speciale

$$\xrightarrow[II+3III]{I-4III} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+2II} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -9 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -8 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{pmatrix}$$

forma ridotta per riga

ha rango 3

le 3 righe, viste come vettori di $\mathbb{R}^4$ sono l. indip. $\Longrightarrow$ anche A ha rango 3

(osservo che anche il rango per colonne è 3)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV-3I]{I \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ \cancel{3} \; 0 & \cancel{0} \; 3 & \cancel{4} \; -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[IV-3II]{II \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \cancel{3} \; 0 & \cancel{-2} \; -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV+11III} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{rango } 3$$

NB se # righe > # colonne sicuramente avrò righe nulle nella forma a scala.

Esercizio Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ $\quad$ $\dim V = 5$ $\quad$ $1, x, x^2, x^3, x^4$

$V_1 = \{ p(x) \in V \text{ t.c. } p(1) = 0 \}$

$V_{-1} = \{ p(x) \in V \text{ t.c. } p(-1) = 0 \}$

sono sottospazi di V (scrivere la dim.)

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

NB $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$ sono le coord di p nella base canonica

$$0 = p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ equazione cartesiana di V_1

Ad es. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\leadsto$ sono le coord. di un polinomio in V_1? $\quad$ $1 + 0 \dots + 0 \neq 0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono coord. di pol. in V_1

$x_0 = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4$ $\quad\quad\quad$ $(\boxed{1} \; 1 \; 1 \; 1 \; 1 \mid 0)$

$$\begin{pmatrix} -a-b-c-d \\ a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$ coordinate di vettori in V_1

$$\left\{ a\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

coordinate dei vettori in V_1

$V_1 = \langle -1+x, \underline{-1+x^2}, -1+x^3, \underline{-1+x^4} \rangle$ $\quad$ $\dim V_1 = 4$

$\overset{\cup}{x - x^3}$

(NB 5 incognite, $\operatorname{rk} A = 1$, $\dim \operatorname{Sol}(Ax=0) = 4 = 5-1$)

$V_{-1} = \langle 1+x, \underline{1-x^2}, 1+x^3, \underline{1-x^4} \rangle$ $\quad$ $\dim V_{-1} = 4$ $\quad$ $x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$

$\cup$ $x - x^3$ $\quad\quad$ $x_0 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$

$$\dim(V_1 \cap V_{-1}) = \underset{\substack{\uparrow \\ 4}}{\dim V_1} + \underset{\substack{\Updownarrow \\ 4}}{\dim V_{-1}} - \underbrace{\dim(V_1 + V_{-1})}_{4 \leq \; \leq 5}$$

$\vee$
0

$4 \Updownarrow V_1 = V_{-1} = V_1 + V_{-1}$

NON è vero!

ovvio $1-x$ non si annulla in -1

$\dim(V_1 \cap V_{-1}) = 3$

NB Se $V_1 = V_{-1}$ $\quad$ $1-x \in V_1$ $\quad$ Ma anche $1+x \in V_1$

$\downarrow$ dim. lungo

$\Rightarrow 1 - \cancel{x} + 1 + \cancel{x} \in V_1 \Rightarrow 2 \in V_1 \Rightarrow 1 \in V_1$

$\Rightarrow 1 + (-1+x) = x \in V_1, \; x^2 \in V_1, \ldots \ldots \; x^4 \in V_1$

$\Rightarrow V_1 = V$

Possiamo determinare $V_1 \cap V_{-1}$ come soluz. $\quad \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

ha coord. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ che sono soluz.

oppure vedo che $1-x^2, 1-x^4, x-x^3 \in V_1 \cap V_{-1}$ e sono l. indip.

$\Rightarrow$ formano base di $V_1 \cap V_{-1}$

Sistemi lineari

A. Bertapelle
8 novembre 2022

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Sistemi lineari

Definizione

Un sistema di m equazioni lineari (o brevemente **sistema lineare***) nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n$, a coefficienti nel campo K, è una scrittura del tipo*

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ove i **coefficienti** *a_{ij} e i* **termini noti** *b_i, $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$ sono elementi di K.*

Soluzioni di un sistema lineare

Con **soluzione** del sistema lineare

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

si intende una n-upla $(\alpha_i) \in K^n$ tale che sostituendo ordinatamente gli scalari α_i alle incognite x_i nelle equazioni del sistema S si ottengano delle identità.

Matrice incompleta e matrice completa di S

Dato

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Poniamo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

A è detta **matrice incompleta del sistema** mentre $(A|b)$ viene detta **matrice completa**.

Esempio

Dato il sistema

$$S: \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 - x_2 - x_4 = -3 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Scrittura compatta di S

Dato un sistema

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

e indicate con $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ ed $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ rispettivamente la colonna dei termini noti e la

colonna delle incognite, possiamo scrivere

$$S: \quad Ax = b.$$

Esempi

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

si scrive come

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mentre $\begin{cases} 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_3 = 2 \end{cases}$ si scrive come

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sistema lineare omogeneo

Un sistema lineare $Ax = b$ si dice **omogeneo** se $b_1 = \cdots = b_m = 0$, ossia tutti i termini noti sono nulli.
Dato un sistema $Ax = b$ il **sistema omogeneo associato** è il sistema $Ax = 0$ ossia

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Dato il sistema

$$S: \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

la terna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è soluzione di S mentre le terne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ non lo sono.

$$S': \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

è il sistema omogeneo associato a S.

Una terna a_1, a_2, a_3 è soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

se e solo se

$$a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ossia se e solo se la colonna dei termini noti è combinazione lineare delle colonne della matrice incompleta A con coefficienti proprio le soluzioni a_1, a_2, a_3.

Più in generale ritroviamo quanto già usato:
fissati vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n \in K^m$, un vettore $v \in K^m$ è c.l. dei v_i (ossia $v \in \langle v_1 \ldots, v_n \rangle$) se e solo se il sistema ad m righe ed n incognite

$$Ax = v$$

ha soluzione dove A è la matrice le cui colonne sono date dai vettori $v_1, \ldots, v_n$. Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ha soluzione.

Sistemi equivalenti

Definizione

Due sistemi lineari

$$S_1 : A_1 x = b_1, \qquad S_2 : A_2 x = b_2$$

a coefficienti in K, entrambi nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n$, si dicono **equivalenti** *se hanno lo stesso insieme di soluzioni.*

Eventualmente aggiungendo eq. del tipo $0 = 0$ ad uno dei sistemi posso assumere che A_1, A_2 abbiano lo stesso ordine $m \times n$ e che $b_1, b_2 \in K^m$.

Rango

Definizione

Sia $A \in M_{m,n}(K)$. Si definisce **rango (per colonna)** *di A la dimensione del sottospazio di K^m generato dalle colonne di A.*

Si definisce **rango (per riga)** *di A la dimensione sottospazio di K^n generato dalle righe di A (viste come vettori di K^n).*

Dimostreremo che il rango per riga e il rango per colonna coincidono e vengono indicati con $\mathrm{rk}\, A$.

Matrice a scala

Definizione

Una matrice $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(C)$ si dice **in forma a scala (per righe)** *se per ogni riga r, se a_{r,j_r} è il primo elemento non nullo della riga r-esima, allora tutti i coefficienti a sinistra e in basso rispetto al termine a_{r,j_r} sono nulli (ossia, $a_{i,j} = 0$ ogni volta che $i \geq r$ e $j \leq j_r$, a parte il caso $i = r$ e $j = j_r$). I primi termini non nulli (da sinistra) di ciascuna riga si dicono* **pivot** *o* **termini direttori** *della matrice a scala.*

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Matrice a scala speciale

Definizione

Una matrice si dice in **forma speciale a scala (per righe)** *se è in forma a scala e tutti i pivot sono uguali a* 1*.*
Una matrice si dice in **forma a scala ridotta** *se è in forma speciale e ogni pivot è l'unico elemento non nullo della sua colonna.*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le prime due sono speciali, la terza è anche ridotta.

Soluzioni di un sistema con $(A|b)$ a scala

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 = 2 \\ 0 = -2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Non ha soluzioni.

Noto che $rk(A) < rk(A|b)$

Soluzioni di un sistema con $(A|b)$ a scala

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 = 2 \\ -x_3 + x_4 = -2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

con sostituzione dal basso otteniamo i sistemi equivalenti

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 = 2 \\ x_3 = 2 + x_4 \end{cases}, \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_4 = 1 \\ x_2 = 4 + x_4 \\ x_3 = 2 + x_4 \end{cases}, \begin{cases} 2x_1 = 5 + 2x_4 \\ x_2 = 4 + x_4 \\ x_3 = 2 + x_4 \end{cases}$$

da cui otteniamo che le soluzioni sono del tipo

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} + a \\ 4 + a \\ 2 + a \\ a \end{pmatrix}, \quad \textit{ossia} \quad Sol = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Soluzioni quando $(A|b)$ è a scala speciale

e ridotta

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_5 = 2 \\ x_3 + 2x_5 = 3 \\ x_4 - x_5 = -1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Porto a destra le indeterminate non legate ai pivot.

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2x_2 - x_5 \\ x_3 = 3 - 2x_5 \\ x_4 = -1 + x_5 \end{cases} \qquad \text{Queste diventano parametri nelle soluzioni.}$$

$$\mathbf{Sol} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 + 2a - b \\ a \\ 3 - 2b \\ -1 + b \\ b \end{pmatrix}, a, b \in K \right\} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Esempio 2

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_1 = 1 - 3x_3 - 5x_4 \\ x_2 = -x_3 - 4x_4 \\ x_5 = 2 \\ x_6 = -1 \end{cases}$$

da cui otteniamo che le soluzioni sono

$$\textbf{Sol} = \left\{ \begin{pmatrix} 1-3a-5b \\ -a-4b \\ a \\ b \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, a, b \in K \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Esempio 3

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 - x_6 = 1 \\ x_4 + 2x_6 = 4 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Lo riscrivo: $\begin{cases} x_2 = 1 + 2x_3 + x_6 \\ x_4 = 4 - 2x_6 \end{cases}$ e le soluzioni sono:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ 1+2b+d \\ b \\ 4-2d \\ c \\ d \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Operazioni elementari su un sistema

Sia $S\colon Ax = b$. Si considerino le seguenti **operazioni elementari**:

i) scambio di posto due equazioni nel sistema;

ii) moltiplicazione di tutti i coefficienti (e del termine noto) di un'equazione per una costante $\alpha \in K$ diversa da zero;

iii) sostituzione di un'equazione con la somma della stessa con un multiplo di una equazione che la precede.

iii') sostituzione di un'equazione con la somma della stessa con un multiplo di un'altra equazione.

Le operazioni elementari trasformano S in un sistema equivalente.

Che i) e ii) non cambino le soluzioni è immediato.
Per iii), si considerino i sistemi

$$S_1 : \begin{cases} p(x) = 0 \\ q(x) = 0 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} p(x) = 0 \\ q(x) + \alpha p(x) = 0 \end{cases}$$

$p(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n - b$, $q(x) = a'_1 x_1 + \cdots + a'_n x_n - b'$,
$a_i, a'_i, b, b', \alpha \in K$.

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \in Sol(S_1) \Leftrightarrow p(\bar{x}) = 0 = q(\bar{x}) \Leftrightarrow$$

in colonna

$$\Leftrightarrow p(\bar{x}) = 0 \text{ e } q(\bar{x}) + \alpha p(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} \in Sol(S_2).$$

Il caso di sistemi con più di due equazioni è analogo perché solo due equazioni vengono interessate dall'operazione.

Legame con operazioni el. sulle righe di $(A|b)$

Ricordiamo le operazioni elementari sulle righe di una matrice:

i) scambio di due righe;

ii) moltiplicazione di tutti i coefficienti di una riga per una costante $\alpha \in K$ diversa da zero;

iii) sostituzione di una riga con la somma della stessa con un multiplo di una riga che la precede.

iii') sostituzione di una riga con la somma della stessa con un multiplo di un'altra riga.

Un'operazione elementare sul sistema $Ax = b$ produce un sistema $A'x = b'$ ove la matrice $(A'|b')$ si ottiene da $(A|b)$ applicando la corrispondente operazione elementare. Analoga affermazione per le matrici incomplete.

Esempio i)

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases} \text{di matrice compl.} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

Scambiando le due righe si ha:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \text{di matrice compl.} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

e ovviamente le soluzioni del sistema non cambiano.

Esempio ii)

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{di matrice compl.} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Moltiplicando la prima riga per -2 si ha:

$$\begin{cases} -2(2x_1 - 3x_2 + x_3) = -2 \\ 3x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{di matr. compl.} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 6 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

e ancora le soluzioni del sistema non cambiano.

Esempio iii)

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \text{di matrice compl.} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Sommando alla seconda riga -2 volte la prima, si ha:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2(2x_1 - 3x_2 + x_3) = 0 - 2 \end{cases}$$

$$\text{ossia} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases} \text{di matr.} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

e ancora le soluzioni del sistema non cambiano (ma dobbiamo trovarle!).

Esempio iii)

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \text{di matrice compl.} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Sommando alla seconda riga $-3/2$ volte la prima, si ha:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 3/2(2x_1 - 3x_2 + x_3) = 0 - 3/2 \end{cases} \text{ossia}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 7/2x_2 - 5/2x_3 = -3/2 \end{cases} \text{di matr.} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 7/2 & -5/2 & 3/2 \end{array}\right)$$

Quest'ultimo sistema è di più facile soluzione.

Moltiplicando la seconda riga per 2 ottengo:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 7x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases} \text{di matr.} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -3 \end{array}\right)$$

e poi sommando alla prima la seconda moltiplicata per 3/7:

$$\begin{cases} 2x_1 - \frac{8}{7}x_3 = -\frac{2}{7} \\ 7x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases} \text{di matr.} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -\frac{8}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 7 & -5 & -3 \end{array}\right)$$

Dividendo la prima riga per 2 e la seconda per 7 ottengo

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{7}x_3 - \frac{1}{7} \\ x_2 = \frac{5}{7}x_3 - \frac{3}{7} \end{cases} \quad \text{di matr.} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \end{array}\right)$$

ossia

$$Sol = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} + \frac{4}{7}a \\ -\frac{3}{7} + \frac{5}{7}a \\ a \end{pmatrix}, a \in K \right\} = \begin{pmatrix} -1/7 \\ -3/7 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 4/7 \\ 5/7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Algoritmo di Gauss applicato ai sistemi

Attraverso operazioni elementari si vuole costruire a partire da un sistema S un sistema equivalente la cui matrice associata sia a scala (eventualmente ridotta). Come visto dagli esempi sarà facile determinare le soluzioni di quest'ultimo sistema (che coincidono con le soluzioni del sistema di partenza!).

Teorema (Rouché-Capelli)

Il sistema $S\colon\ Ax = b$ *di* m *equazioni in* n *incognite a coefficienti nel campo* K *ha soluzione se, e solo se,* $\mathrm{rk}(A|b) = \mathrm{rk}\,A$*. In tal caso*

$$Sol(Ax = b) = x' + Sol(Ax = 0),$$

ossia l'insieme, $Sol(A|b)$*, delle sue soluzioni si ottiene sommando a una soluzione particolare del sistema,* x'*, una soluzione del sistema omogeneo associato* $Ax = 0$*. Le soluzioni di questo sistema omogeneo formano uno spazio vettoriale di dimensione* $n - \mathrm{rk}\,A$*. In particolare, se* $n = \mathrm{rk}\,A = rk(A|b)$ *il sistema* $Ax = b$ *ammette un'unica soluzione.*