# Geometria 1 - mod. A - Lezione 14

Note Title

Esempio $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\5\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^4$ $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\5\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} \\ \| & \| & \| \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{array}$$

$\cancel{0}$
$\cancel{1}$
$2$
$3$

$v_1, v_2, v_3$ sono l. ind. ?

$\Updownarrow$

$v_3 \ v_1 \ v_2$

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\5\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} \\ v_3 & v_1 - v_3 & v_2 - v_3 \\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\2\\-1\\6\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\2\end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} v_3 & v_3 - v_2 & \cancel{v_1 - v_3} & v_1 - v_3 - 2(v_3 - v_2) \\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-2\end{pmatrix} & \cancel{\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\6\end{pmatrix}} & \begin{pmatrix}0\\0\\1\\10\end{pmatrix} \\ w_1 & w_2 & & w_3 \end{array}$$

$W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ e $v_1, v_2, v_3$ sono l. ind $\Leftrightarrow$ $w_1, w_2, w_3$ lo sono

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\\10\end{pmatrix}$$

$$a w_1 + b w_2 + c w_3 = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} a = b = c = 0$$

$$\begin{cases} a + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 0 = 0 \\ 0 \cdot a - b + c = 0 \\ -a - 2b + 10c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{a = 0} \\ \boxed{b = 0} \\ -\cancel{b} + \boxed{c = 0} \\ -a - 2b + 10c = 0 \end{cases}$$

E se $v_1 \ v_2 \ v_3$ non fossero stati l. indip ?

l. dip. $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\3\\-5\end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ formano base?

$v_1 \quad v_2 \quad v_3$

$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\-3\\5\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\3\\-5\end{pmatrix}$

$v_1 \quad v_2-2v_1 \quad v_3$ } $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$v_1, \quad v_2-2v_1, \quad \boxed{v_3+v_2-2v_1}$ sono l. dip.

$v_3+v_2-2v_1=0$

$(-2)v_1+1\cdot v_2+1\, v_3=0$

Formula di Grassmann.

**Prop** Sia $V$ uno sp. vettoriale (f. gen) e siano $W_1, W_2$ sottospazi finit. generati. Allora

$$\dim(W_1+W_2)=\underbrace{\dim W_1}_{r}+\underbrace{\dim W_2}_{s}-\underbrace{\dim(W_1\cap W_2)}_{t}$$

**Dim** Da dimostrare $\dim(W_1+W_2)=r+s-t$

Sia $v_1,\dots,v_t$ una base di $W_1\cap W_2$ $\left(\begin{matrix}\leq W_1\\ \leq W_2\end{matrix}\right)$

Completo tale base ad una base di $W_1$

$v_1,\dots,v_t,v_{t+1},\dots,v_r$ $\qquad W_1=\langle v_1,\dots v_t,v_{t+1},\dots,v_r\rangle$

Completo $v_1,\dots,v_t$ a una base di $W_2$:

$v_1,\dots,v_t,w_{t+1},\dots,w_s$ $\qquad W_2=\langle v_1,\dots v_t,w_{t+1},\dots w_s\rangle$

$$W_1+W_2=\langle \{v_1,\dots v_t,\dots v_r\}\cup\{v_1,\dots v_t,w_{t+1},\dots w_s\}\rangle$$

$$=\langle v_1,\dots v_t,v_{t+1},\dots v_r,w_{t+1},\dots,w_s\rangle$$

sono $\cancel{t}+(r-\cancel{t})+(s-t)=r+s-t$ generatori.

Resta da mostrare che sono l. indip.

$$\underbrace{\alpha_1 v_1+\dots\alpha_t v_t+\beta_{t+1}v_{t+1}+\dots\beta_r v_r}_{u\in W_1}+\underbrace{\gamma_{t+1}w_{t+1}+\dots+\gamma_s w_s}_{\in W_2}=0$$

$$\underset{W_1 \cap W_2}{\underset{\cap}{u}} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_t v_t + \beta_{t+1} v_{t+1} + \dots + \beta_r v_r = -\gamma_{t+1} w_{t+1} - \dots - \gamma_s w_s$$

Dunque $u = \sum_{i=1}^{t} \delta_i v_i \in W_1 \cap W_2$

$$\delta_1 v_1 + \dots + \delta_t v_t = -\gamma_{t+1} w_{t+1} - \dots - \gamma_s w_s$$

$$\delta_1 v_1 + \dots + \delta_t v_t + \gamma_{t+1} w_{t+1} \dots + \gamma_s w_s = 0$$

$\Rightarrow \delta_1 = \dots = \delta_t = 0 = \gamma_{t+1} = \dots = \gamma_s$ perché

$v_1, \dots v_t, w_{t+1}, \dots w_s$ sono l. indip. in quanto elem. di base di $W_2$

Dunque $u = 0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_t v_t + \beta_{t+1} v_{t+1} + \dots + \beta_r v_r$

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_t = 0 \quad \beta_{t+1} = 0 \dots = \beta_r$ perché

$v_1, \dots v_t, v_{t+1}, \dots v_r$ sono el. di una base di $W_1$

Dunque $\alpha_i = 0, \beta_j = 0, \gamma_k = 0 \ \forall i, j, k \Rightarrow$ i vettori sono l. ind (e generatori) $\Rightarrow$ formano base di $W_1 + W_2$

Conseguenza $\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$

Esempio $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a-b \\ b \\ 2a+b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$; $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } 2x - y = z \right\}$

determinare basi e dimensioni di $W_1, W_2, W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$

$W_1 \ni a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad W_1 = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}$

$\underbrace{\text{l. ind.}}_{\text{non proporz.}}$ e generatori $\Rightarrow$ formano basi

$\Rightarrow \dim W_1 = 2$

$W_2$ ha eq. cartesiana $z = 2x - y$ $\qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 2\alpha - \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

$W_2$ ha eq. param. $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 2\alpha - \beta \end{cases}$

$W_2 = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}$ formano base di $W_2 \Rightarrow \dim W_2 = 2$

$$W_1 + W_2 = \left\langle \underset{w_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}}, \cancel{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}}, \underset{w_3}{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}} \right\rangle \leq \mathbb{R}^3$$

ha dim compreso tra 2 e 3

$$\underset{w_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}} \quad \underset{w_2+w_1}{\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}} \quad \cancel{\underset{w_3}{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}} \rightsquigarrow \underset{w_3-(w_1+w_2)}{\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}} \Rightarrow$$ in scala $\Rightarrow$ l. indip. (e generatori)

$$\dim(W_1+W_2) = 3 \quad \Rightarrow \quad W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$$

Grassmann.

$W_1 \cap W_2 = ?$ $$\underset{1}{\dim(W_1 \cap W_2)} \overset{G}{=} \underset{2}{\dim W_1} + \underset{2}{\dim W_2} - \underset{3}{\dim(W_1+W_2)}$$

$$\left( \dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1+W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) \right)$$

NB $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \right\rangle \leq W_1 \cap W_2$

hanno stesso dim dunque =

Esercizio (per casa).

1. Determinare eq. cartesiana di $W_1$
2. Ritrovare $W_1 \cap W_2$ risolvendo il sistema $\begin{cases} \text{eq. di } W_1 \\ \text{eq di } W_2 \end{cases}$
3. Ritrovare $W_1 \cap W_2$ trovando i vettori $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ che posso scrivere come $a\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

Determinare un complementare di $W_1$, uno di $W_2$ e uno di $W_1 \cap W_2$.

$$V = U \oplus W$$

$U$, $W$ si dicono complementari in $V$

Fissato $U$ non c'è un unico complementare in generale

$$V = V \oplus 0 \quad \text{unicità}$$
$$\overset{!}{=} 0 \oplus V$$

altrimenti più complementari

$$\mathbb{R}^3 = \langle \underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}} \rangle \oplus \; ? \langle \overset{\neq 0}{v} \rangle$$

dim 1

baste prendere un $v \notin W_1$ : in tal modo $v_1, v_2, w$ saranno l. ind. . Ad esempio $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \notin W_1$ e posso prendere $v = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\mathbb{R}^3 = \langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}_{W_2} \rangle \oplus \langle v \rangle$$

?

$2x + y - z = 0$

$v = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ è ok

$v = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ va bene.

posso prendere qualunque vettore che non annulla l'equazione

$\begin{pmatrix}1\\27\\48\end{pmatrix}$

$\langle v \rangle \oplus \langle w \rangle$

$$\mathbb{R}^3 = \langle \underset{W_1 \cap W_2}{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}} \rangle \oplus \; ? \langle v, w \rangle$$

dim 2

$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, v, w \right\}$ formano base di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \underset{v}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = w$$

$\cancel{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}$ non va bene

# Matrici e riduzione di Gauss

A. Bertapelle
7 novembre 2022

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

### Definizione

*Fissati due interi positivi $m$ ed $n$, chiameremo* **matrice** *di ordine $m \times n$, a elementi nel campo $K$, ogni tabella di scalari del tipo*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m, \\ 1 \le j \le n}}$$

*ove $a_{ij}$ indica l'elemento posto nella $i$-esima riga e nella $j$-esima colonna della tabella.*

## Somma di matrici

$$+ : M_{m\times n}(K) \times M_{m\times n}(K) \longrightarrow M_{m\times n}(K)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$



## Prodotto per uno scalare

$$+ : \; K \times M_{m\times n}(K) \longrightarrow M_{m\times n}(K)$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$M_{m\times n}(K)$ con $+$ e $\cdot$ appena definite è uno spazio vettoriale su $K$.

Sia $E(r,s)$ la matrice avente tutti coefficienti 0 tranne il coefficiente di posto $r, s$ che è 1; ossia

$$E(r,s) = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$$

ove $a_{rs} = 1$ e $a_{ij} = 0$ se $(i,j) \neq (r,s)$.

La **base canonica** di $M_{m\times n}(K)$ è data dalle matrici $E(r,s)$ al variare di $1 \leq r \leq m$ e $1 \leq s \leq n$.

Pertanto $dim_K M_{m\times n}(K) = mn$.



# Esempio

$M_{2\times 3}(K)$ ha dimensione $2 \cdot 3 = 6$ e la sua base canonica è

$$E(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; E(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; E(1,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E(2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; E(2,2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; E(2,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Matrici quadrate

Una matrice $m \times n$ si dice **quadrata** (di ordine $n$) se $m = n$.
Esempi:

$$(2), \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$M_n(K) := M_{n \times n}(K)$.



# Matrici diagonali

Una matrice quadrata $(a_{ij})$ di ordine $n$ si dice **diagonale** se $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Esempi:

$$\mathbf{0}, \ \mathbf{1}_n, \quad (2), \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le matrici diagonali di ordine $n$ fissato formano un sottospazio vettoriale di $M_n(K)$ di dimensione $n$.

Una sua base è data dalle matrici $E(i, i)$ per $1 \leq i \leq n$.

# Matrici triangolari

Una matrice quadrata $(a_{ij})$ di ordine $n$ si dice **triangolare superiore** se $a_{ij} = 0$ se $i > j$.

$$(2), \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio: Dimostrare che le matrici triangolari superiori di ordine $n$ formano un sottospazio vettoriale di $M_n(K)$; determinarne una base e la dimensione.



# Matrici triangolari

Una matrice quadrata $(a_{ij})$ di ordine $n$ si dice **triangolare inferiore** se $a_{ij} = 0$ se $i < j$.

$$(2), \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le matrici triangolari inferiori di ordine $n$ formano un sottospazio vettoriale di $M_n(K)$.

# Prodotto di una matrice riga con una matrice colonna

Siano $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M_{1\times n}(K)$ e
$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n = M_{n\times 1}(K)$.

Il prodotto della matrice riga $A$ con la matrice colonna $B$ è lo scalare

$$p = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$



# Prodotto di due matrici

Siano $A \in M_{m\times n}(K)$ e $B \in M_{n\times t}(C)$.
Il **prodotto righe per colonne** della matrice $A$ con la matrice $B$ è la matrice $m \times t$

$$AB = P = (p_{ij}) \qquad \text{ove}$$

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1}, & \ldots, & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} := a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{in} b_{nj}.$$

è il prodotto della riga $i$-esima di $A$ per la colonna $j$-esima di $B$.

# Esempi

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

poiché

$(3\ 1)\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) = 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = 6 - 2 = 4,$

$(3\ 1)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -4 \end{smallmatrix}\right) = 3 \cdot 0 + 1 \cdot (-4) = -4,$ ecc.



# Proprietà del prodotto di matrici

Siano $A, A' \in M_{m\times n}(K)$, $B, B' \in M_{n\times t}(K)$, $D \in M_{t\times h}(K)$. Allora

- $A(B + B') = AB + AB'$,
- $(A + A')B = AB + A'B$,
- $(AB)D = A(BD)$,
- $A\mathbf{1}_n = A = \mathbf{1}_m A$.
- $A\mathbf{0} = \mathbf{0} = \mathbf{0}A$.

Le dimostreremo più avanti.

Attenzione: il prodotto $BA$ non esiste se $m \neq t$.
Anche se $m = n = t$ si ha $AB \neq BA$ in generale.

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 0-1 \\ 0+0 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 2+0 \\ 0+0 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



Le uniche matrici che commutano con tutte le matrici quadrate di ordine $n$ sono le matrici **scalari** di ordine $n$ ossia le matrici del tipo $\lambda \mathbf{1}_n$ per un qualche $\lambda \in K$ (sono le matrici diagonali con $\lambda$ sulla diagonale).

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Vale $(\lambda \mathbf{1}_n)A = \lambda A = A(\lambda \mathbf{1}_n)$.

## Matrici invertibili

**Definizione**

*Una matrice $A$, quadrata di ordine $n$, si dice* **invertibile** *se esiste una matrice quadrata $B$ (sempre di ordine $n$) tale che $BA = AB = \mathbf{1}_n$; in tal caso, si scrive $A^{-1}$ in luogo di $B$.*

La matrice nulla NON è invertibile.

La matrice identica $\mathbf{1}_n$ è invertibile e coincide con la propria inversa.

Una matrice scalare $\lambda\mathbf{1}_n$ è invertibile se e solo se $\lambda \neq 0$ e in tal caso $\frac{1}{\lambda}\mathbf{1}_n$ è l'inversa.



## Rango

**Definizione**

*Sia $A \in M_{m,n}(K)$. Si definisce* **rango (per colonna)** *di $A$ la dimensione del sottospazio di $K^m$ generato dalle colonne di $A$.*

*Si definisce* **rango (per riga)** *di $A$ la dimensione sottospazio di $K^n$ generato dalle righe di $A$ (viste come vettori di $K^n$).*

Dimostreremo che il rango per riga e il rango per colonna coincidono e vengono indicati con $\operatorname{rk} A$.

# Matrice a scala

**Definizione**

*Una matrice $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(C)$ si dice* **in forma a scala (per righe)** *se per ogni riga $r$, se $a_{r,j_r}$ è il primo elemento non nullo della riga $r$-esima, allora tutti i coefficienti a sinistra e in basso rispetto al termine $a_{r,j_r}$ sono nulli (ossia, $a_{i,j} = 0$ ogni volta che $i \geq r$ e $j \leq j_r$, a parte il caso $i = r$ e $j = j_r$). I primi termini non nulli (da sinistra) di ciascuna riga si dicono* **pivot** *o* **termini direttori** *della matrice a scala.*

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$



# Matrice a scala speciale

**Definizione**

*Una matrice si dice in* **forma speciale a scala (per righe)** *se è in forma a scala e tutti i pivot sono uguali a 1.*
*Una matrice si dice in* **forma a scala ridotta** *se è in forma speciale e ogni pivot è l'unico elemento non nullo della sua colonna.*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le prime due sono speciali, la terza è anche ridotta.

## Osservazione

*Il rango per riga di una matrice a scala è dato dal numero delle righe non nulle, ossia dal numero dei pivot.*

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad dim_K \langle \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle = 3$$



# Operazioni elementari sulle riga di una matrice

Sia $A \in M_{m \times n}(K)$. Si considerino le seguenti operazioni:

i) moltiplicazione di tutti i coefficienti di una riga per una costante $\alpha \in K$ diversa da zero;

ii) scambio di due righe;

iii) sostituzione di una riga con la somma della stessa con un multiplo di una riga che la precede.

iii') sostituzione di una riga con la somma della stessa con un multiplo di un'altra riga.

# Algoritmo di Gauss

È la dimostrazione costruttiva della seguente affermazione:

**Teorema**

*Tramite operazioni elementari sulle righe di tipo ii) e iii) ogni matrice può essere ridotta in forma a scala (per righe); usando anche operazioni elementari di tipo i) ogni matrice può essere trasformata in una matrice a scala speciale e in una a scala ridotta.*

Le operazioni elementari sulle righe di una matrice $A$ non cambiano il rango per riga. Dunque per calcolare il rango per riga di una matrice si applica l'algoritmo di Gauss producendo una matrice a scala e si contano i pivot.