Geometria 1 - mod. A - Lezione 12

Note Title

Se $U \leq V$ e $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ genera U e $\mathcal{B}$ è libero allora $\mathcal{B}$ è una base di U

<u>Osservo</u> Se $U = \langle S \rangle$ allora S è una base

$\iff$ ogni vettore di U si scrive in <u>modo unico</u> come comb. lin. di vettori di S.

$S = \{s_1, \dots, s_m\}$

$\Rightarrow)$ $u \in U$ $\quad u = \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_m s_m = \beta_1 s_1 + \dots + \beta_m s_m$

$$\sum \alpha_i s_i = \sum \beta_i s_i \Rightarrow \sum \alpha_i s_i - \sum \beta_i s_i = 0$$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^m (\alpha_i - \beta_i) s_i = 0$ Ma gli $s_1 \dots s_m$ sono l. ind.

$\Rightarrow \alpha_i - \beta_i = 0 \ \forall i \Rightarrow \alpha_i = \beta_i \ \forall i$ (ho unicità di scrittura)

$\Leftarrow)$ $\sum_{i=1}^m \alpha_i s_i = 0 = \sum_{i=1}^m 0 s_i$ per l'unicità della scrittura $\alpha_i = 0 \ \forall i$

$\Rightarrow s_i$ sono l. indip.

Se $s_1, \dots, s_m$ generano U allora essi formano una base $\iff U = \langle s_1 \rangle \oplus \langle s_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle s_m \rangle$

Coordinate

Sia V uno sp. vettoriale fin. generato, sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base <u>ordinata</u>

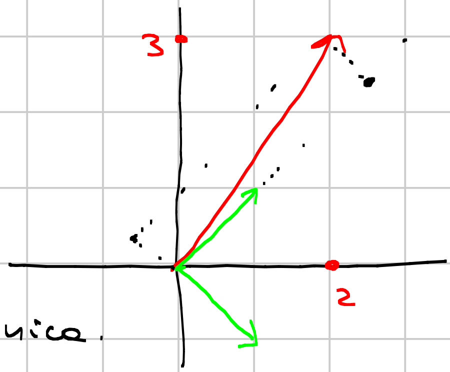
allora ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come

$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

$$V \xrightarrow{\text{biiettiva}} K^n$$

$$v \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$ — coordinate di v nella base $\mathcal{B}$

Esempi $\quad \mathbb{R}^2 \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ risp. alla base canonica.

$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{coordinate}]{} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}'' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha - \beta = y \end{cases}$

$$\begin{cases} 2\alpha = x + y \\ 2\beta = x - y \end{cases} \qquad \alpha = \frac{x+y}{2} \qquad \beta = \frac{x-y}{2}$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ ha coordinate $\begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ risp. alla base $\mathcal{B}''$

Teorema di struttura degli spazi vettoriali

Sia V uno spazio vett. su K.
Allora V ammette una base e due basi distinte hanno lo stesso cardinalità che chiameremo dimensione di V come sp. vett. su K.
(ossia se V è f. gen., il numero di el. di una base è costante)

$\dim_K V$: dimensione di V come sp. v. su K.

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2 \qquad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^5 = 5 \qquad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1 \qquad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

$\dim_{\mathbb{R}} M_{2,2}(\mathbb{R}) = 4 \qquad$ base can. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = 3 \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \qquad \{1, x, x^2\}$

Per dim il teor. di struttura serve il lemma di scambio.

L. di scambio: Sia $V \neq 0$ sp. vett. fin. generato.
Siano $G = \{v_1, \dots, v_n\}$ $n \geq 1$ un insieme di generatori
e sia $L = \{\underset{\neq 0}{w_1}, \dots \underset{\neq 0}{w_m}\}$ $m \geq 1$, ... libero.
Allora $m \leq n$.

Dim "Strategia: sostituire i w_i come generatori e trovare un $G' = \{w_1, \dots w_m, v_{m+1}, \dots v_n\}$ generatore"

$\underset{\neq 0}{w_1} \in L \subseteq V = \langle v_1, \dots v_n \rangle \qquad \underset{\neq 0}{w_1} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

Almeno uno degli α_i è $\neq 0$. A meno di riordinare $v_1, \dots v_n$ posso assumere sia $\alpha_1 \neq 0$

$\frac{1}{\alpha_1} w_1 = \frac{\cancel{\alpha_1}}{\cancel{\alpha_1}} v_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n \qquad \frac{1}{\alpha_1} w_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n = v_1$

$V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle w_1, \underbrace{\cancel{v_1}}_{\text{superfluo}}, \dots v_n \rangle = \langle w_1, v_2, \dots v_n \rangle$

$\underset{\neq 0}{w_2} \in V \Rightarrow \quad w_2 = \alpha w_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \dots + \beta_n v_n$
dove almeno un $\beta_i \neq 0$ (perché altrimenti w_2, w_1 sarebbero lin. dip.)

A meno di riordino posso assumere $\beta_2 \neq 0$

$\frac{1}{\beta_2} w_2 = \frac{\alpha}{\beta_2} w_1 + \frac{\beta_2}{\beta_2} v_2 + \dots + \frac{\beta_n}{\beta_2} v_n$

$V = \langle w_1, v_2, \dots v_n \rangle = \langle w_1, w_2, \cancel{v_2}, v_3 \dots v_n \rangle$

procedendo così dopo m passi ottengo

V è generato da $w_1, w_2, \dots w_m, \underbrace{v_{m+1}, \dots v_n}_{\text{mancano se } n = m}$

In ogni caso $n \geq m$. $\boxed{\text{V}}$

Mostro ora che 2 basi di V f. generato hanno lo stesso numero di elementi

V $\qquad \underset{\uparrow}{\mathcal{B}} = \{v_1, \dots, v_r\} \qquad \mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_s\}$

ins. libero di generatori

$\mathcal{B}$ libero e $\mathcal{B}'$ genera $\xRightarrow{\text{L. di scambio}}$ $r \leq s$

$\mathcal{B}$ genera e $\mathcal{B}'$ è libero $\Longrightarrow$ $s \leq r$

$\left.\begin{matrix} r \leq s \\ s \leq r \end{matrix}\right\} r = s$

Esercizio di ieri: $\dim V_r = \dim V_c = 6 \qquad \dim V_r \cap V_c = 4$

$$V_r \cap V_c \ni \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{11}-a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & -a_{21}-a_{22} \\ -a_{11}-a_{21} & -a_{12}-a_{22} & a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22} \end{pmatrix}.$$

Scrivere una base!
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$V_r + V_c = ?$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{11}-a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & -a_{21}-a_{22} \\ -a_{11}-a_{21} & -a_{12}-a_{22} & a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si scrive in modo unico

$$V_r + V_c = \langle \underbrace{\dots\dots}_{\text{base di } V_r} \underbrace{\dots\dots}_{\text{base di } V_c} \rangle$$

~~generatori~~

12 matrici

Servirà la formula di Grassmann per trovare facilmente la dimensione.