$$\boxed{P(x) = x^6 + 7i x^3 + 8}$$

$x^3 = t$

$$t^2 + 7it + 8 \Rightarrow -8i \text{ e } i \qquad \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-7i \pm \sqrt{49 i^2 - 32}}{2} = \frac{-7i \pm \sqrt{-81}}{2} = \frac{-7i \pm 9i}{2}$$

$i^2 \to -1$

1 $\quad -8i = z^3$

$\underbrace{-8i}_{\text{modulo } 8} \Rightarrow z = 2$

$\mathrm{Arg}(-8i) = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \mathrm{Arg}(z) = \frac{3}{2}\pi \cdot \frac{1}{3} + \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$

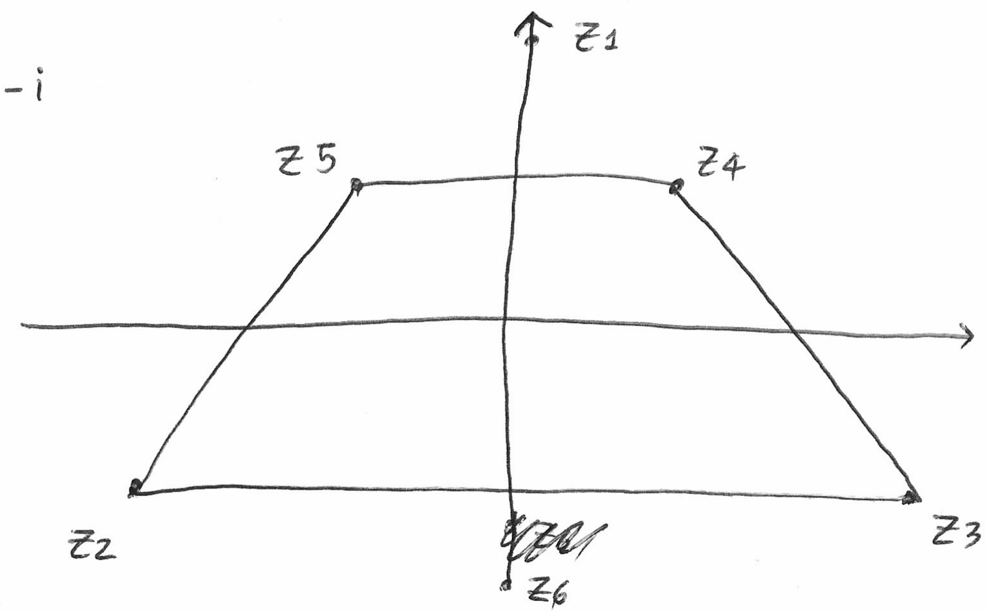
$$\begin{cases} z_1 = 2e^{i\pi/2} \\ z_2 = 2e^{i 7/6 \pi} = 2\left(\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) + i \sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)\right) = -\sqrt{3} - i \\ z_3 = 2e^{i 11/6 \pi} = \sqrt{3} - i \end{cases}$$

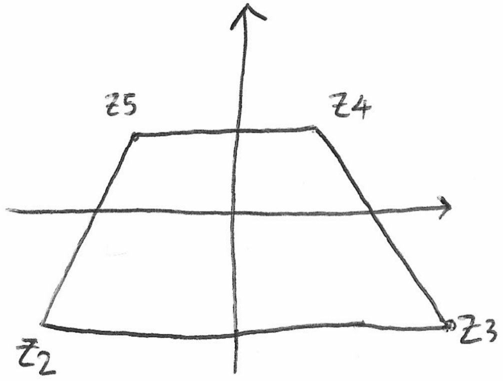
2 $\quad i = z^3 \iff z^3 - i = 0$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$(z+i)(z^2 + iz + i^2) \quad b = -i$

$$\begin{cases} z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\ z_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\ z_6 = -i \end{cases}$$





$z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

$z_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

$z_3 = +\sqrt{3} - i$

$z_2 = -\sqrt{3} - i$

$\alpha \bar{z} + \bar{\alpha} z + c = 0$

$\boxed{z_4 \vee z_5}$ $\quad |z_4 - z_5| = \sqrt{3}$

$\alpha = \sqrt{3}\, i$

$\sqrt{3} i \bar{z} - \sqrt{3} i z + c = 0$

$2\,\mathrm{Re}\left[\underset{\alpha}{(\sqrt{3} i)}\underset{\bar{z}_4}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)}\right] + c = 0 \Rightarrow c = -\sqrt{3}$

$\sqrt{3} i \bar{z} - \sqrt{3} i z - \sqrt{3} = 0$

$z_4 \vee z_5$: $\quad iz - i\bar{z} + 1 = 0$

$i(\underbrace{z - \bar{z}}_{\text{immaginario}}) + 1 = 0$

$\$ \quad \$^1 \quad \$^1 \quad S^1$

$\boxed{z_2 \vee z_3}$ $\quad // \; z_4 \vee z_5$

$iz - i\bar{z} + c = 0$

passaggio z_3: $\quad 2\,\mathrm{Re}\left(\underset{\bar{\alpha}}{i}\,(\underset{z_3}{\sqrt{3} - i})\right) + c = 0$

$\Rightarrow c = -2$

$z_2 \vee z_3 \quad iz - i\bar{z} - 2 = 0$

$\boxed{z_3 \vee z_4}$ $\quad 2(z_4 - z_3) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} - \sqrt{3} + i\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} i\right) = -\sqrt{3} + 3i \Rightarrow (\alpha) = i(-\sqrt{3} + 3i) = -\sqrt{3} i + 3i^2 =$

$= -\sqrt{3} i - 3 \quad \left(\text{semplifico } -\sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow \alpha = i + \sqrt{3}$

passaggio z_3: $\quad 2\,\mathrm{Re}\left(\underset{\alpha}{(\sqrt{3} + i)}\,\underset{\bar{z}_3}{(\sqrt{3} + i)}\right) + c = 0 \Rightarrow c = -4$

$z_3 \vee z_4 \quad (\sqrt{3} - i) z + (\sqrt{3} + i)\bar{z} - 4 = 0$

$-(1 + \sqrt{3} i) i = -i + \sqrt{3} = \alpha$

$\boxed{z_2 \vee z_5}$ $\quad 2(z_5 - z_2) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} i\right) = \sqrt{3} + 3i \rightsquigarrow 1 + \sqrt{3} i$

$2\,\mathrm{Re}\left[(\sqrt{3} - i)(-\sqrt{3} + i)\right] + c = 0 \Rightarrow c = 4$

$z_2 \vee z_5$: $\quad (\sqrt{3} + i) z + (\sqrt{3} - i)\bar{z} + 4 = 0$

$\varphi(z) = 1/\bar{z}$

$z_4 \vee z_5 : iz - i\bar{z} + 1 = 0 \quad \varphi(z_4 \vee z_5) : i\frac{1}{\bar{z}} - i\frac{1}{z} + 1 = 0 \Leftrightarrow iz - i\bar{z} + z\bar{z} = 0$ CENTRO i

$\bar{\alpha} z + \alpha\bar{z} + z\bar{z} = 0 \quad -\alpha$ RAGGIO 1

$z_2 \vee z_3 : \quad iz - i\bar{z} - 2 = 0 \quad \varphi(z_2 \vee z_3) : \cancel{\tfrac{4}{4}}\, iz - i\bar{z} - 2z\bar{z} = 0$

$-\frac{i}{2} z + \frac{i}{2}\bar{z} + z\bar{z} = 0$

CENTRO $-\frac{i}{2}$

RAGGIO $\frac{1}{2}$

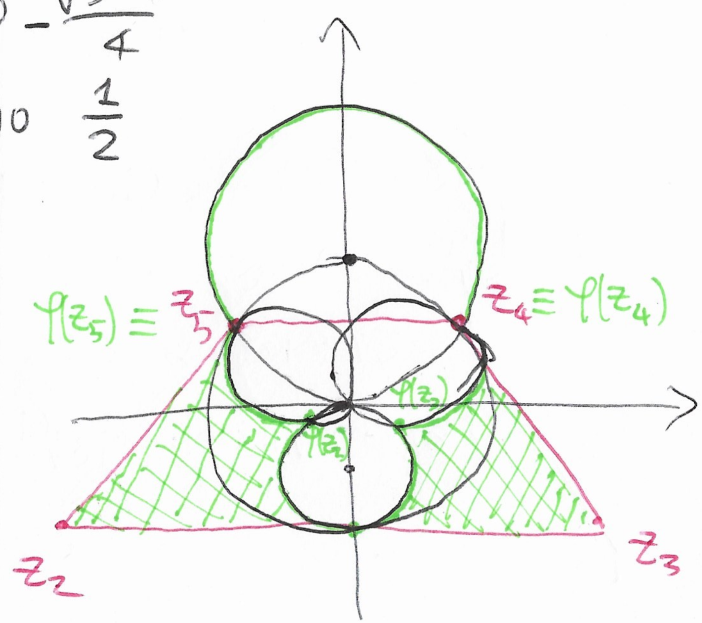
$z_3 \vee z_4 : (\sqrt{3} - i) z + (\sqrt{3} + i)\bar{z} - 4 = 0$ CENTRO $\frac{\sqrt{3}+i}{4}$

$\varphi(z_3 \vee z_4) : -\frac{(\sqrt{3}-i)}{4} z - \frac{(\sqrt{3}+i)}{4}\bar{z} + \cancel{4} z\bar{z} = 0$ RAGGIO $\frac{1}{2}$

$z_2 \vee z_5 : (\sqrt{3} + i) z + (\sqrt{3} - i)\bar{z} + 4 = 0$ CENTRO $-\frac{\sqrt{3}-i}{4}$

$\varphi(z_2 \vee z_5) : +\frac{(\sqrt{3}+i)}{4} z + \frac{(\sqrt{3}-i)}{4}\bar{z} + \cancel{4} z\bar{z} = 0$ RAGGIO $\frac{1}{2}$

$\varphi_*(T^{in}) \setminus T^{out} = \varphi_*(T^{in}) \cap T^{in}$



$\varphi \circ \varphi = id$

$\varphi \circ \varphi(z) = \varphi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{\frac{1}{z}} = z$

(c) L'insieme dei punti z per cui $[z_1, z_2, z] \in \mathbb{R}$, contiene certo z_1 e z_2 ($[z_1, z_2, z_1] = 0$ e $[z_1, z_2, z_2] = 1$); se mostriamo che questo insieme è una retta del piano complesso, abbiamo concluso. Basta osservare che

$$[z_1, z_2, z] \in \mathbb{R} \iff \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} \iff \bar{b}z + b\bar{z} + C = 0,$$

ove $i\bar{b} = (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)$, $ib = -(z_2 - z_1)$ e $iC = \bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2$, con $C \in \mathbb{R}$, perché la differenza di due complessi coniugati è un numero immaginario puro.

Analogamente, l'insieme dei punti z per cui $(z_1, z_2, z_3, z) \in \mathbb{R}$, contiene z_2 e z_3 ($(z_1, z_2, z_3, z_2) = 0$ e $(z_1, z_2, z_3, z_3) = 1$); per $z = z_1$ si annulla il denominatore e quindi il birapporto non è più un numero. Inoltre, uguagliando la frazione che definisce il birapporto con la frazione coniugata si ottiene

$$\begin{aligned} z = z_1 \text{ oppure } (z_1, z_2, z_3, z) \in \mathbb{R} \iff (z - z_2)(z_3 - z_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_2)(\bar{z} - \bar{z}_1) &= (\bar{z} - \bar{z}_2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_3 - z_2)(z - z_1) \\ &\iff Az\bar{z} - \bar{b}z - b\bar{z} + C = 0, \end{aligned}$$

ove

$$\begin{aligned} iA &= (z_3 - z_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_3 - z_2) \in i\mathbb{R} \\ ib &= (z_3 - z_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_2)z_2 - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_3 - z_2)z_1 \\ iC &= (z_3 - z_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_2)z_2\bar{z}_1 - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_3 - z_2)z_1\bar{z}_2 \in i\mathbb{R}. \end{aligned}$$

L'equazione descrive quindi la circonferenza per i tre punti dati.

Infine, se i tre punti sono allineati (ma distinti), allora $z_3 - z_2 = t(z_3 - z_1)$ per qualche $t \in \mathbb{R}$, da cui si conclude che $A = 0$ e l'equazione diviene quella della retta per i tre punti. $\square$