Geometria 1 - mod. A - Lezione 11

Note Title

Sia V uno sp. vett. su K e sia $U \leq V$

Abbiamo detto che U è generato da $S \subseteq V$ se $U = \langle S \rangle$

$\uparrow$ insieme di generatori di U

U si dice finitamente generato se $U = \langle S \rangle$ $\exists$ S finito in V

NB $U = \langle U \rangle$ (esiste almeno un insieme di gen. finito)

Ad es. $\mathbb{R}^2 = \langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \rangle$ $\quad S = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$

$= \langle \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix} \right\}_{a \in \mathbb{R}} \rangle$ $\leftarrow$ infinito.

Ricordo che se S_1, S_2, S_3 sono sottoinsiemi di V

allora $(S_1 \cap S_2) \cup S_3 = (S_1 \cup S_3) \cap (S_2 \cup S_3)$

$(S_1 \cup S_2) \cap S_3 = (S_1 \cap S_3) \cup (S_2 \cap S_3)$

Siano U_1, U_2, U_3 sottosp. di V

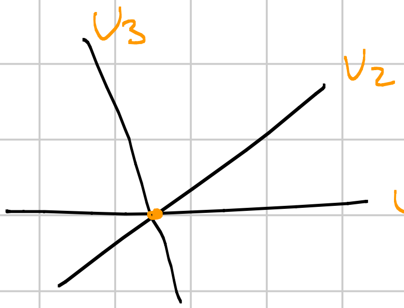
$$(U_1 \cap U_2) + U_3 \leq (U_1 + U_3) \cap (U_2 + U_3)$$

$U_3 = 0 + U_3$ $\quad \neq$ in generale $\quad \mathbb{R}^2 \cap \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$

$$(U_1 + U_2) \cap U_3 \geq (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3)$$

$U_3 = \mathbb{R}^2 \cap U_3$ $\quad \neq$ in generale. $\quad 0 + 0 = 0$

$V = \mathbb{R}^2$



Come individuare generatori superflui.

$S \subseteq V$ sp. vett. su K $\quad U = \langle S \rangle$ $\quad (S = \{s_1, \dots s_n\})$

Fatto: $v \in V$ è comb. lineare dei vettori di S $\iff$

$$\langle S \rangle \underset{\subseteq}{=} \langle S \cup \{v\} \rangle$$

Dim $\Rightarrow$) sia $v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_i \quad \alpha_i \in K, \; s_i \in S \Rightarrow v \in \langle S \rangle$

$\Rightarrow$ il più piccolo sottosp. che contiene S e v

è $\langle S \rangle \Rightarrow \langle S \rangle = \langle S \cup \{v\} \rangle$

$\Leftarrow$) Se $\langle S \rangle = \langle S \cup \{v\} \rangle \Rightarrow v \in \langle S \rangle$

$$\Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i \quad \exists \, \alpha_i \in K, \; s_i \in S.$$

$\Rightarrow v$ è comb. l. di vettori in S. $\square$

Esempio $\mathbb{R}^2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$

$x, y \in \mathbb{R}$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (-5)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^4 \geq U = \left\langle \underset{u_1}{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{u_3}{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}, \begin{pmatrix}2\\-2\\3\\5\end{pmatrix} \right\rangle \qquad \boxed{u_4 = 2u_1 + 3u_2 + 5u_3}$$

$$\overset{?}{=} \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\3\\5\end{pmatrix} \right\rangle \qquad u_2 = \alpha u_1 + \beta u_3 + \gamma u_4$$

$$2u_1 + 3u_2 + 5u_3 - u_4 = 0 \qquad \cancel{\tfrac{3}{3}} u_2 = -\frac{2}{3}u_1 - \frac{5}{3}u_3 + \frac{1}{3}u_4$$

$\alpha = -2/3$

$\beta = -5/3$

$\gamma = \frac{1}{3}$

Def Sia $S \subseteq V$ un sottoinsieme. S si dice libero se soddisfa la seg. proprietà:

una comb. lin. di vettori di S dà il vettore nullo

$\Leftrightarrow$ è la combinazione banale

ossia:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_i = 0 \quad \text{con } s_i \in S, \; \alpha_i \in K \iff \alpha_i = 0 \quad \forall \, i \in \{1, \dots, m\}$$

Se S è libero, diremo che i vettori di S sono lineormente indipendenti.

Una famiglia di vettori si dice lin. dipendente se non sono l. indipendenti ossia esiste una loro comb. lineare non banale che dà il vettore nullo

<u>Esempi</u> $\mathbb{R}^2$ $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è libero

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{matrix}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se $\alpha = \beta = \gamma = 0$ è l'unica soluzione $\Rightarrow$ S è libero

.. vi sono soluzioni non banali $\Rightarrow$ i 3 vettori sono l. dip.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ -\alpha + \beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ 2\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 3\beta \\ \gamma = -\beta \end{cases}$$

sono dipendenti $\beta = 1$ $\alpha = 3, \beta = 1, \gamma = -1$ dà comb. lineare non banale che fornisce il vettore 0.

$\beta = -7/2$ idem. Per ogni valore di $\beta \in K$ ho una comb. che mi dice che i 3 vettori sono l. dip.

<u>Osserv.</u> • se S contiene il vettore nullo non è mai libero.

$$\underbrace{\alpha\, 0}_{\text{è comb. lineare}} = 0 \quad \forall \alpha \in K^*$$

• se $S = \{v\}$ con $v \neq 0$, allora S è libero

$$\alpha \underset{\neq 0}{v} = 0 \iff \alpha = 0$$

• se $S = \{v, w\}$ con $v, w \neq 0$

$\langle v \rangle = \langle w \rangle \iff w$ è comb. lineare di v

$\iff w$ è multiplo di v ($w = \alpha v$

allora S non è libero. $\underset{\neq 0}{1} \cdot w + (-\alpha) v = 0$

$\langle v \rangle \neq \langle w \rangle \iff w$ non è combinazione lineare di v

allora S è libero

Sia $\alpha v + \beta w = 0$ se $\alpha \neq 0 \Rightarrow \beta \neq 0$

(altrimenti avrei $\underset{\neq 0}{\alpha} \underset{\neq 0}{v} = 0$ ↯)

se $\beta \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0$

Dunque o $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ oppure $\alpha \cdot \beta \neq 0$ e in tal caso

$\beta w = -\alpha v$ $\quad w = -\frac{\alpha}{\beta} v$ ↯

Dunque $S = \{\underset{\neq 0}{v}, \underset{\neq 0}{w}\}$ è libero $\iff$ v e w non sono multipli uno dell'altro.

Def Sia $0 \neq U$ un sottospazio di V.
Un sottoinsieme S di U si dice <u>base</u> di U
se: S è un insieme di generatori e
S è libero (ossia i suoi vettori sono l. indip.)

<u>Osservazione</u> $v_1, \dots, v_n \in V$ sono l. dip. $\iff$ uno di loro è comb. lineare dei rimanenti.

$\Rightarrow$) $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ con $\alpha_i \in K$ non tutti nulli

A meno di riordino, posso assumere $\alpha_1 \neq 0$

$\frac{\cancel{\alpha_1}}{\cancel{\alpha_1}} v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n \Rightarrow v_1 = \alpha_2' v_2 + \dots + \alpha_n' v_n$

$\alpha_i' = -\frac{\alpha_i}{\alpha_1}$

$\Leftarrow$ Assumo a meno di riordino che $v_n = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1}$

Allora $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1} \underset{+\underset{\neq 0}{(-1)} \cdot v_n}{-v_n} = 0 \Rightarrow v_1, \dots, v_n$ sono l. dip.

§ Basi canoniche.

① K, $\mathbb{R}$ base canonica $\{\underset{\neq 0}{1}\}$ $\quad e_1 = 1$

$x \in \mathbb{R}$ $\quad x = x \cdot 1$ $\quad \{1\}$ è libero e genera.

② K^2, $\mathbb{R}^2$ base canonica $\{e_1, e_2\}$ $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

è un insieme libero di generatori!

$\mathbb{C}$: • se lo vedo come sp. vett. su $\mathbb{C}$ siamo nel caso ① : la base canonica è $\{e_1\} = \{1\}$

• se lo vedo come sp. vett. su $\mathbb{R}$

$z = a + bi$: la base canonica è $\{1, i\}$ ← insieme libero di generatori

$a, b \in \mathbb{R}$

$a + bi = 0 \iff a = 0, b = 0$

⑤ K^n ha come base canonica $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

⑥ $K[x]$ $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ base canonica

$\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ per un qualche m. ← chiaro che genera! è anche libero!

$K[x]_{\leq n}$ base canonica $\{1, x, \dots, x^n\}$

⑦ $M_{2,2}(K) \ni \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ base canonica $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ← vettore nullo

Analogamente per $M_{m,n}(K)$ $\mathcal{E} = \{E_{ij}, \ 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n\}$

E_{ij} è la matrice con entrata 1 in posizione i,j e 0 altrove.

<u>Esercizio</u> $V = M_3(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $a_{ij} \in \mathbb{R}$

$V_c = \{$ matrici in V t.c. somma delle entrate di ciascuna colonna sia $0 \}$

$V_r = \{$ matrici in V t.c. somma delle entrate di ciascuna riga dia $0 \}$

$$V_c : \begin{cases} a_{11}+a_{21}+a_{31}=0 \\ a_{12}+a_{22}+a_{32}=0 \\ a_{13}+a_{23}+a_{33}=0 \end{cases}$$

V_c è dato dalle matrici i cui coeffic. sono soluz. di questo sistema.

$\left.\begin{matrix} M_1 \in V_c \\ M_2 \in V_c \end{matrix}\right\} \Rightarrow M_1+M_2 \in V_c$ perché i coeff. di M_1+M_2 sono termine a termine la somma dei coeff. di M_1 e M_2.
Poiché la somma di due soluz. di un sistema è ancora soluzione, concludo.

In alternativa $(a_{ij})=M_1 \quad (b_{ij})=M_2 \quad M_1+M_2=(\underbrace{a_{ij}+b_{ij}}_{c_{ij}})$

Fisso $1\le j\le 3$ $\quad c_{1j}+c_{2j}+c_{3j} \overset{?}{=} 0$

$$a_{1j}+b_{1j}+a_{2j}+b_{2j}+a_{3j}+b_{3j} = 0+0=0$$

Analogament si dimostra che $\lambda M_1 \in V_c \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Dunque V_c è un sottosp. e analogamente si dimostra che V_r è un sottospazio.

$$V_c : \begin{cases} a_{11}+a_{21}+a_{31}=0 \\ a_{12}+a_{22}+a_{32}=0 \\ a_{13}+a_{23}+a_{33}=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{11}-a_{21} & -a_{12}-a_{22} & -a_{13}-a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{31} = -a_{11}-a_{21} \\ a_{32} = -a_{12}-a_{22} \\ a_{33} = \underbrace{-a_{13}-a_{23}}_{\text{parametri}} \end{cases}$$

$$= a_{11}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_1} + a_{21}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_2} + a_{12}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_3} + a_{22}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_4}$$

$$+ a_{13}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{M_5} + a_{23}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{M_6}$$

$$V_c = \langle \underbrace{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6}_{\text{sono generatori}} \rangle$$

formano una base? Sì

$$\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 + \alpha_4 M_4 + \alpha_5 M_5 + \alpha_6 M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_2 & \alpha_4 & \alpha_6 \\ -\alpha_1-\alpha_2 & -\alpha_3-\alpha_4 & -\alpha_5-\alpha_6 \end{pmatrix}$$

vuol dire $\alpha_1 = 0 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 \Rightarrow$ comb. è banale

Analogamente si trova una base di V_r (esercizio!)

$$V_r \cap V_c \ni \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{11}-a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & -a_{21}-a_{22} \\ -a_{11}-a_{21} & -a_{12}-a_{22} & a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22} \end{pmatrix}$$

scrivere una base!

$V_r + V_c = ?$