Geometria 1 - mod. A - Lezione 10

Note Title

Esempi di spazi vettoriali

- <u>Prodotto di sp. vettoriali:</u>

  Siano V e W sp. vett. sullo stesso campo K,

  indichiamo con $V \times W$ lo sp. vett. prodotto.

  Come insieme $\{ (v, w)$, (al variare) $v \in V$ e $w \in W \}$

  $+ : (V \times W) \times (V \times W) \longrightarrow (V \times W)$

  $((v_1, w_1), (v_2, w_2)) \longmapsto (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$

  $\cdot : K \times (V \times W) \longrightarrow (V \times W)$

  $(\lambda, (v, w)) \longmapsto (\lambda v, \lambda w)$

  Resta da dimostrare che valgono $S1, \dots, S4, M_1 \dots M4$

  Esempio già visto $K^2 = K \times K$

  $K^3 = (K \times K) \times K = K \times (K \times K)$

  In generale posso definire $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ analogam. se V_i sono sp. vett. sullo stesso K.

- Quoziente di uno sp. vett modulo per un suo sottospazio

  Sia V sp. vett su K e sia $U \leq V$

  Definisco V/U

  Introduco la seguente relazione di eq. in V

  Se $v_1, v_2 \in V$ dico che $v_1 \sim v_2$ se $v_1 - v_2 \in U$

  si verifica che $\sim$ è una relazione di eq. in V

  (rifl: $v \sim v$: infatti $v - v = 0 \in U$ ok)

  Posso costruire V/U = classi di eq. per questa relaz.

  $= \{ [0_V], [v] = [v'], \dots \}$

  $[0_V] = [u] \quad \forall u \in U$

  $v \notin U$ se $v' - v \in U$

  $\boxed{v' \in v + U}$

$$V/U \times V/U \longrightarrow V/U$$
$$([v], [v']) \longmapsto [v+v']$$

l'insieme dei vettori che posso scrivere come $v + u$ per un qualche $u \in U$

È ben definito $\overset{①}{[v]=[w]}$ $\quad \overset{②}{[v']=[w']}$ $\quad w, w' \in V$

? $[w+w'] = [v+v']$ Sì

① $v = w+u \quad \exists\, u \in U$ ② $v' = w'+u' \quad \exists\, u' \in U$

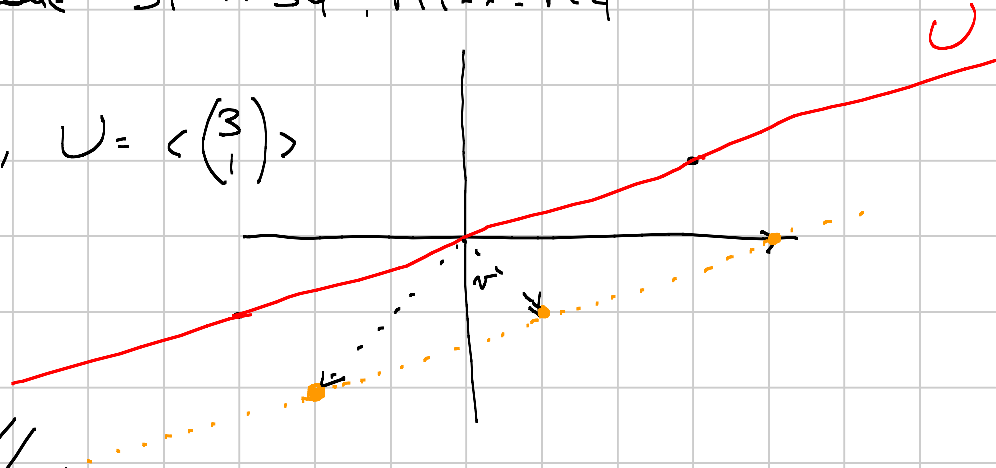
$$v+v' = w+u+w'+u' = (w+w') + \underbrace{(u+u')}_{\in U} \Rightarrow v+v' \sim w+w'$$

$$K \times V/U \longrightarrow V/U, \quad (\lambda, [v]) \longmapsto ([\lambda v])$$

Esercizio: È ben definita.

Sono soddisfatte $S1 \dots S4$, $M1 \dots M4$

Esempio $V = \mathbb{R}^2$, $U = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$



$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad [v] \in V/U$

come posso descriverla?

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = v + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in [v] \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \underset{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\underset{\shortparallel}{v}} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in [v]$$

Posso visualizzare V/U tramite le rette parallele a U nel piano

"$[v] = v + U$" $\qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$x = 1 + 3\lambda \qquad x = 1 + 3(y+1) \qquad \boxed{x - 3y - 4 = 0}$

$y = -1 + \lambda \qquad \lambda = y + 1 \qquad \boxed{x - 3y = 0}$

eq. della classe $v + U$ $\qquad$ eq. di U

Proprietà di cancellazione: Sia V sp. vett. su K e siano $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in K$

- $u + v = u + w \iff v = w$

$\Leftarrow)$

$\Rightarrow)$ $\underbrace{\underbrace{(-u) + u}_{0_V} + v}_{v} = -u + u + w$

- se $\alpha \neq 0$ $\quad \alpha v = \alpha w \iff v = w$
(scrivere perché!)

- se $v \neq 0$ $\quad \alpha v = \beta v \iff \alpha = \beta$

$$\Updownarrow$$
$$\alpha v - \beta v = 0$$
$$(\alpha - \beta) v = 0$$

Somma di sottosp.

V sp. vett su K, $U \leq V$ $\quad W \leq V$

$U + W = \{ u + w, \ u \in U, \ w \in W \} \leq V$

$\quad = \langle U \cup W \rangle$ è generato da U e W

- è il più piccolo sottosp. che contiene U e W
- è dato delle comb. lineari di vettori di U e W

Scrivo $U \oplus W$ se $U \cap W = 0$

$\quad \llcorner \{ u + w, \ u \in U, \ w \in W \}$

Lemma La somma $U + W$ è diretta $\iff$ ogni vettore $v \in U + W$ si scrive in modo unico come somma di un vettore di U e di uno di W.

Dim $\Rightarrow)$ $U \oplus W$ e sia $v = u + w = u' + w'$ con $u, u' \in U$ e $w, w' \in W$

$u + w = u' + w' \implies \underset{\in U}{u - u'} = \underset{\in W}{w' - w}$ un vettore v'

Il vettore $v' = u - u' = w' - w \in U \cap W = 0 \implies v' = 0$

Dunque $u - u' = 0$, $w' - w = 0 \implies u = u'$, $w = w'$

$\Leftarrow)$ Suppongo ci sia unicità di decomposizione e sia $v \in U \cap W$.
arbitrario

$v \in U \implies v = v + 0 \in U + W$

$v \in W \implies v = 0 + v \in U + W$

Per l'unicità della decomp. $v+0 = 0+v \in U+W$

implica $v=0 \quad 0=v \Rightarrow U\cap W = 0 \Rightarrow U\oplus W$ $\square$

Esempio • $V=\mathbb{R}^3 \quad U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \quad W = \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \ni \begin{pmatrix}0\\0\\c\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix} \in U$, $x_3=0$ $\qquad \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases}$

$$U+W \underset{\underset{\mathbb{R}^3}{\shortparallel}}{=} \langle U\cup W \rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \ni \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, \quad a,b,c\in\mathbb{R}$$

SI ? $U\oplus W$, $U\cap W \overset{?}{=} 0 \qquad \begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\c\end{pmatrix} \iff \begin{matrix} a=0 \\ b=0 \\ 0=c \end{matrix} \iff$ è il vett 0

• V, U come sopra $\qquad W' = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \ni \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\\lambda+\mu\\\lambda-\mu\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1=\lambda \\ x_2=\lambda+\mu \\ x_3=\lambda-\mu \end{cases} \xrightarrow[\text{parametri}]{\text{eliminare}} \begin{cases} \lambda=x_1 \\ x_2=x_1+\mu \\ x_3=x_1-\mu \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=\lambda \\ \boxed{x_2=x_1+x_1-x_3} \\ \mu=x_1-x_3 \end{cases}$$

$\boxed{2x_1-x_2-x_3=0}$; generatori di W sono soluzione di questa eq.

$U+W' = \mathbb{R}^3 \qquad U\cap W' \neq 0 \qquad \begin{cases} x_3=0 \\ 2x_1-x_2-x_3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=0 \\ x_2=2x_1 \end{cases}$

Ad es $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \in U\cap W' \qquad 0\neq \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in U$

$$= 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \in W'$$

Esercizio in $\mathbb{R}^4$ $\quad U: \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Determinare $U \cap W$, $U + W$. La somma è diretta?

$$\Sigma: \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = x_1 \\ \underbrace{x_4}_{\text{bloccate dai parametri}} = \underbrace{x_1 + x_3}_{\text{parametri}} \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \alpha \\ x_3 &= \mu \\ x_2 &= \alpha \\ x_4 &= \alpha + \mu \end{aligned}$$

$x_1 = \alpha$, $x_3 = \mu$ } parametri (posso dare un valore a piacere)

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \mu \\ \alpha + \mu \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soluz del sistema $\underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{U}$

verificare che sono soluz. di Σ

$$W = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_3} \rangle \ni \begin{pmatrix} \alpha + 2\gamma \\ \beta + \gamma \\ -\alpha + \beta \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3$$

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = \alpha + 2\gamma \\ x_2 = \beta + \gamma \\ x_3 = -\alpha + \beta \\ x_4 = \beta \end{cases} \qquad \text{elimino parametri} \qquad \begin{cases} x_1 = -x_3 + x_4 + 2(x_2 - x_4) \\ \gamma = x_2 - x_4 \\ -\alpha = x_3 - x_4 \\ \beta = x_4 \end{cases}$$

1ª eq. $\boxed{x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0}$ eq. di W

$U \cap W$ I metodo

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{x_1} - 2\cancel{x_1} + x_3 + \cancel{x_1} + x_3 = 0 \\ x_2 = x_1 \\ x_4 = x_1 + x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = x_1 \\ x_4 = \underbrace{x_1}_{\text{parametro}} \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \alpha \\ x_2 &= \alpha \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= \alpha \end{aligned} \qquad U \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \checkmark$$

dipendono dal param.

$U + W$ non sarà mai diretta.

II metodo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in U \cap W \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha = \gamma + 2\rho \\ \alpha = \delta + \rho \\ \beta = -\gamma + \delta \\ \alpha + \beta = \delta \end{cases}$$

risolvere questo sistema e troverò per ciascuna $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \rho \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ un vettore in $U \cap W$

(provate. . . .)

$$U + W : \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^4$$

Sia V sp. vettoriale su K, siano $U_1, \dots, U_m$ sottospazi di V posso considerare $\langle U_1 \cup U_2 \dots \cup U_m \rangle = U_1 + U_2 + \dots + U_m$

$$= \{ u_1 + u_2 + \dots + u_m, \ u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, \dots, u_m \in U_m \}$$

La somma $U_1 + \dots + U_m$ si dice diretta e si scrive $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_m$ se ogni vettore $v \in \sum_{i=1}^{m} U_i$ si scrive in <u>modo unico</u> come $v = \sum_{i=1}^{m} u_i$ con $u_i \in U_i$

$\mathbb{R}^3$ $U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = U_2$ $\quad U_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ sottospazi

$U_1 + U_2 + U_3$

$$0 + 0 + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$U_1 \cap U_2 = 0$ $\quad U_1 \cap U_3 = 0$

$U_2 \cap U_3 = 0$ $\quad$ verifico

<u>La somma non è diretta</u>