Sistemi lineari

Definizione

Un sistema di m equazioni lineari (o brevemente **sistema lineare***) nelle n incognite $x_1, \dots, x_n$, a coefficienti nel campo K, è una scrittura del tipo*

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ove i **coefficienti** *a_{ij} e i* **termini noti** *b_i, $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$ sono elementi di K.*

Soluzioni di un sistema lineare

Con **soluzione** del sistema lineare

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

si intende una n-upla $(\alpha_i) \in K^n$ tale che sostituendo ordinatamente gli scalari α_i alle incognite x_i nelle equazioni del sistema S si ottengano delle identità.

Geometria 1 - mod. A - Lezione 9

Note Title

<u>Osservazione</u> : $x_1 = x$ $x_2 = y$

- $2x - 3y = 0$ eq. omogenea (termine noto nullo) in x e y

Cerco le soluzioni in $\mathbb{R}^2$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 3\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} \qquad \cancel{2}x = \frac{3}{2}y \qquad U = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 3/2\,\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\} \qquad \alpha = 2\mu \qquad = \left\langle \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ $\qquad = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right\rangle$

- $2x - 3y = 0$ eq. omogenea nelle indeterminate x, y, z

Cerco le soluzioni in $\mathbb{R}^3$

$$x = \frac{3}{2}y \qquad U = \left\{ \begin{pmatrix} 3/2\,\alpha \\ \alpha \\ \mu \end{pmatrix}, \alpha, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Osservo che U è un sottosp. vettoriale di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 3/2\,\alpha \\ \alpha \\ \mu \end{pmatrix} \underset{\mathbb{R}^3}{+} \begin{pmatrix} 3/2\,\alpha' \\ \alpha' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2\,\alpha + 3/2\,\alpha' \\ \alpha + \alpha' \\ \mu + \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2\,(\alpha + \alpha') \\ (\alpha + \alpha') \\ (\mu + \mu') \end{pmatrix} \in U$$

analogamente si dimostra chiusura risp. al prodotto

- Sia $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$ con $a_i \in K$ come eq. lineare omog. nelle indeterm. $x_1, \dots, x_n$

allora l'insieme delle soluzioni di questa eq. in K^n è un sottospazio vettoriale di K^n

Infatti se $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix}$ sono soluzioni $\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_n + \alpha_n' \end{pmatrix}$ è soluz.

- $\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i = 0$ e $\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i' = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (\alpha_i + \alpha_i') = \sum_{i=1}^{n} (a_i \alpha_i + a_i \alpha_i') = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i' =$$

$$= 0 + 0 = 0$$

Se $\lambda \in K$ e $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in K^n$ è soluzione $\Rightarrow$ anche $\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix}$ è soluz

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda \alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i \alpha_i = \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i \right) = \lambda \cdot 0 = 0$$

Noto che le soluz. di una eq. lineare non omogenea non formano un sottospazio. $x + y = 1$ soluz. in $\mathbb{R}^2$

- Le soluzioni di un sistema lineare omogeneo nelle indeterminate $x_1 \text{ — } x_n$ e a coeff in K formano un sottosp. vett. di K^n

$$S: \begin{cases} p_1(x_1, \dots x_n) = 0 \\ p_2(x_1, \dots x_n) = 0 \\ \vdots \\ p_m(x_1, \dots x_n) = 0 \end{cases}$$

con $p_i(x_1, \dots x_n)$ polinomio di 1° grado privo di termine noto.

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad a_{ij} \in K$

Soluzioni di S sono le soluzioni comuni alle eq. $p_i = 0$

$U = \{\text{soluz di } S\} \subseteq K^n \quad U_i = \{\text{soluz. di } p_i = 0\} \leq K^n$

$$U = \bigcap_{i=1}^{m} U_i$$ dunque è un sottospazio di K^n.

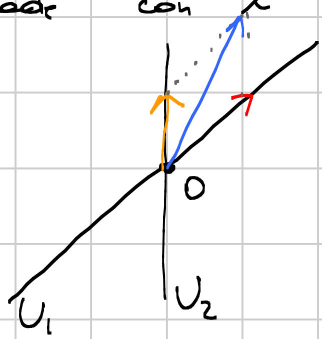
Noto che:
- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ è sempre soluzione di S
- se considero $\begin{cases} p_1(x_1, \dots x_n) = b_1 \\ \vdots \\ p_m(x_1, \dots x_n) = b_m \end{cases}$ e qualche $b_i \neq 0$

  le soluzioni non formano un sottospazio e potrebbero non esserci.

V sp. vettoriale su K, $U \leq V$ (U sottosp.), $\bigcap$ sottosp è sottosp.

? cosa accade con l'unione di sottospazi?

$V = \mathbb{R}^2$



$U_1 \cup U_2$ è sottosp? No non è chiuso rispetto alla $+$

Sia S un sottoinsieme di V sp. vettoriale su K

Indichiamo con $\langle S \rangle$ il più piccolo sottospazio di V che contiene S.

(NB un sottosp. che contiene S è V)

Osservo che la definizione ha senso (c'è il più piccolo sottosp che contiene S) e posso descriverlo con

$$\langle S \rangle \overset{!}{=} \{ \text{comb. lineari di vettori di } S \text{ a coeff in } K \}$$

$$\overset{!}{\underset{(*)}{=}} \underbrace{\{ a_1 s_1 + \dots + a_n s_n \ , \ a_i \in K, \ s_i \in S, \ n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \}}_{\Sigma :=}$$

Si pone $\langle \emptyset \rangle = 0 \leftarrow$ sottosp. nullo

Dimostro (*). Sia Σ l'insieme delle comb. lineari di vett. di S.

Verifico che
- a) Σ è un sottosp. di V
- b) $S \subseteq \Sigma$
- c) se $U \leq V$ contiene S allora $\Sigma \subseteq U$

$\to$ dunque Σ è il più piccolo sottosp che contiene S.

b) $S \subseteq \Sigma$. Infatti: dato $s \in S$, $1 \cdot s = s$ è una comb. lineare di elementi di S e dunque $s \in \Sigma$.

a) $$\underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_i s_i + \sum_{j=1}^{m} b_j s'_j}_{\text{è comb. lineare di el. di } S} \qquad s_i, s_j \in S \text{ e } a_i, b_j \in K$$

$\Rightarrow$ appartiene a Σ — Σ è chiuso risp. alla $+$.

(NB $s + s + s$ è una combinazione lineare)

$\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i s_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i) s_i$ è comb. lineare $\Rightarrow \Sigma$ è chiuso per il prodotto per lo scal.

c) Sia $U \leq V$ e $S \subseteq U$ ← chiuso per comb. lineari di suoi vettori (III) criterio.

In particolare è chiuso per comb. lineari di vettori di S.

Dunque $\underset{\langle S \rangle}{\overset{\|}{\Sigma}} \subseteq U$

Dato $S \subseteq V$ con V sp. vettoriale su K

$\langle S \rangle \leq V$ viene detto sottospazio generato da S

e S viene detto insieme di generatori di $\langle S \rangle$

Nel caso $S = \{s_1, \dots, s_r\}$

$\langle S \rangle = \langle \{s_1, \dots s_r\} \rangle = \langle s_1, \dots, s_r \rangle$

Ad es. $\langle v \rangle = \{\lambda v, \lambda \in K\}$ già visto nel 1° esempio di oggi
$v \in V$

$U = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ è un generatore di U

ma anche $\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ lo è

e così pure $\begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, . . .

ve ne sono infiniti!

Considero ora $U = \left\{ \begin{pmatrix} 3\lambda \\ 2\lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ ← generatori

$$\begin{pmatrix} 3\lambda \\ 2\lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} = \underbrace{\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{comb. lineare di lungh. } 2}$$

Ad esempio anche $\left\{ \underset{u_1}{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{u_1 - u_2}{\cancel{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}} \right\}$ è un insieme di generatori

superfluo

$U \leq \langle U \cup W \rangle \leq V$
$W \leq$

Esercizio Mostrare che $U \cup W$ è un sottospazio di V (con $U \leq V$, $W \leq V$) se e solo se $U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$

Verifico $\Leftarrow$) se $U \subseteq W \Rightarrow U \cup W = W \leq V$

se $W \subseteq U$ .. $U \cup W = U \leq V$

$\Rightarrow$) Suppongo che $U \cup W \leq V$

$U \subseteq W$ ok

$W \subseteq U$ ok

se $U \not\subseteq W$ e $W \not\subseteq U$

esiste $u \in U$ $u \notin W$ ed esiste $w \in W$ con $w \notin U$

$u, w \in U \cup W$ sottospazio. Dunque $u + w \in U \cup W$

- se forse $u + w \in U$ avrei $\underbrace{\cancel{u} + w + (\cancel{-1})u}_{w} \in U$ ↯

- ...... $u + w \in W$ avrei $u + \cancel{w} + (\cancel{-1})w \in W$ ↯ impossi.

non può presentarsi questo caso.

$\mathbb{R}[x]_{\leq 3} = V$ $S = \{-1, x - x^3\}$

Sia $U = \langle -1, x - x^3 \rangle$. È vero che $2 \in U$? ✓

$x \in U$? NO

$3 + x - x^3 \in U$? ✓

$= \{a(-1) + b(x - x^3), a, b \in \mathbb{R}\}$

$= \{-a + bx - bx^3, a, b \in \mathbb{R}\}$

$a' = -a$

$= \{a' + bx - bx^3, a', b \in \mathbb{R}\}$

condiz: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in U \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_1 = -a_3 \end{cases}$ $\begin{cases} a_2 = 0 \\ a_1 + a_3 = 0 \end{cases}$

$x = 0 + 1x + 0x^2 + 0x^3$

$3 + x - x^3 = 3 + 1x + 0x^2 + (-1)x^3$

- Siano S, T sottoinsiemi di V

$$\underbrace{\langle S \rangle \cap \langle T \rangle}_{\text{sottospazio}} \supseteq \langle S \cap T \rangle$$

↑ diverso in generale!

$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \neq T = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^2$

$\langle S \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle T \rangle$

$\langle S \rangle \cap \langle T \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$S \cap T = \emptyset$

$\langle \emptyset \rangle = 0$

$\cdot \big\langle \langle S \rangle \cup \langle T \rangle \big\rangle \supseteq \langle S \cup T \rangle$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} s_{ij}}_{\langle S \rangle} + \underbrace{\sum_{h=1}^{m} \mu_h \sum_{k=1}^{m} b_{hk} t_{hk}}_{\langle T \rangle}$$

$$\sum_{i,j} (\lambda_i a_{ij}) s_{ij} + \sum_{h,k} (\mu_h b_{hk}) t_{hk}$$

$s_{ij} \in S$, $t_{hk} \in T$

Esempio $\left\langle \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cup \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \right\rangle = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}$

Siano $U, W \leq V$ con V sp. vett. su K

$U + W := \{ u + w, \ u \in U, w \in W \} \leq V$

$= \langle U \cup W \rangle$

Somma di due sottosp.

Sottospazio somma

<u>Esercizio</u>: verificare che $\{ u+w, \ u \in U, \ w \in W \} \overset{Z}{=}$ è sottosp. di V

- $(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2)$
- $\lambda (u_1 + w_1) = (\lambda u_1) + (\lambda w_1)$

$U \subseteq Z$ $\quad u = u + \underset{W}{0}$

$W \subseteq Z$ $\quad w = \underset{U}{0} + w$

$\Rightarrow \langle U \cup W \rangle \subseteq Z$

comb. lineari di vettori di U e W

$u+w$ sono c.l.

$Z \subseteq \langle U \cup W \rangle$.

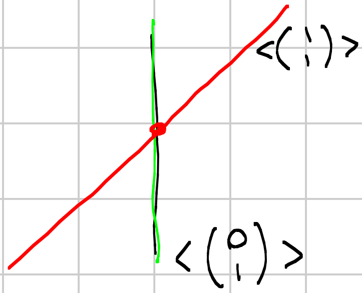
Scriveremo $U \oplus W$ al posto di $U + W$

quando $U \cap W = \{0\} = 0$

e chiamo $U \oplus W$ somma diretta di U e W

Se $V = U \oplus W$ allora diremo che U e W

sono complementari in V.



<u>Esempio</u> $V = \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2 = <\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}> \oplus <\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}>$ verifico $<\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}> \cap <\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}> = 0$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\mu = x$

$\lambda = y - x$