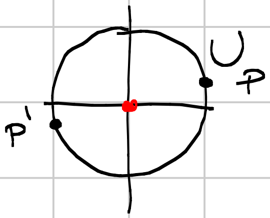
Geometria 1 - mod. A - Lezione 8

Note Title

Esempi di sottospazi e non esempi.

$\mathbb{R}^2 = V$



$\underset{\not\ni \, 0}{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } x^2 + y^2 = 1 \right\}$

No sottosp.

- $P + P' = 0 \notin U$
- $3P \notin U \qquad (3x)^2 + (3y)^2 = 9 \neq 1$

$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } x = y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \ a \in \mathbb{R} \right\}$

$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \underset{\mathbb{R}^2}{+} \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a+b \end{pmatrix} \in U \\ \lambda \underset{\mathbb{R}^2}{\cdot} \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda a \end{pmatrix} \in U \end{array}\right\}$ U è chiuso rispetto $+$ e al prodotto per lo scalare $\Longrightarrow$ è sottospazio per il criterio (I)

È così per ogni altra retta per l'origine

NB in $\mathbb{R}^2$ ho come sottospazi: $\mathbb{R}^2$, $\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle$, $\{0_{\mathbb{R}^2}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\overset{\parallel}{0}$ sp. vettor. nullo

$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)$

$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } x = \lambda a, \ y = \lambda b \text{ per un qualche } \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$bx - ay = 0$ eq. retta

Esempio $K[[x]] = \{ f : \mathbb{N}^{\ni 0} \longrightarrow K \}$

$\left(K[[x]] \right.$

$n \longmapsto f(n)$

$i \longmapsto f(i)$

$\parallel$ scrittura formale $\parallel$

serie $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \dots + a_n x^n + \dots \dots$

$a_i := f(i), \ i \in \mathbb{N}$

Notazione compatta: "$f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$" $\quad a_i = f(i)$

$$g = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \qquad b_i \in K$$

$$f+g := \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i \qquad f, g \in K[[x]]$$

$$\lambda \cdot f := \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda a_i) x^i \qquad \lambda \in K$$

$K[[x]]$ è uno sp. vett. su K.

$\cup$| sottospazio vettor.

$K[x]$ = serie t.c. $a_n = 0$ per $n >> 0$ (sufficientemente grande)

$f \in K[[x]]$ appartiene a $K[x] \iff a_n = 0 \ \forall \ n \geq N(f) \in \mathbb{N}$

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$

La + e la molt. per lo scalare ristrette a $K[x]$ induce strutt. di sp. vett. su $K[x]$.

Proposizione

Sia V uno spazio vettoriale su K. Un sottoinsieme non vuoto U di V è un *sottospazio vettoriale* se, e solo se, soddisfa a una delle seguenti condizioni, tra loro equivalenti. (criteri)

(I) Presi comunque u, u' in U e $a \in K$, i vettori $u + u'$ e au appartengono a U

(II) Presi comunque u_1, u_2 in U e a_1, a_2 in K il vettore $a_1u_1 + a_2u_2$ appartiene a U.

(III) Presi comunque $u_1, u_2, \ldots, u_n$ in U e $a_1, \ldots, a_n$ in K il vettore $a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$ appartiene a U.

U sottospazio per definizione significa che $+_V : V \times V \longrightarrow V$ e la $\cdot_V : K \times V \longrightarrow V$ si restringono a $+_U : U \times U \longrightarrow U$ e $\cdot_U : K \times U \longrightarrow U$ e con $+_U$, $\cdot_U$ U è spazio vettor.

(ossia sono soddisfatte S1—S4, M1—M4)

Verifichiamo: U sottospazio di $V \iff$ vale (I)

$\Rightarrow$) banale

$\Leftarrow$) Suppongo U chiuso rispetto $+$ e al $\cdot$
allora le proprietà S1 — S4, M1 — M4 sono soddisfatte da vettori di U perché lo sono da tutti i vettori di V.

$$\left(u, u' \in U \qquad \underset{\substack{U \\ \| \\ u+u' \\ V}}{u+u'} \overset{?}{=} \underset{\substack{U \\ \| \\ u'+u \\ V}}{u'+u} \quad \text{sì} \right)$$

Verifico U è sottospazio $\Leftrightarrow$ U è chiuso per comb. lineari di lunghezza 2 (II)

$\Updownarrow$

U chiuso per risp. $+$
e " ... $\cdot$

dimostro (I) $\Leftrightarrow$ (II)

Dimostro (I) $\Leftrightarrow$ (II)

(I) $\Leftarrow$ (II) facile. Se $u, u' \in U$, $a \in K$

- $u + u' \in U$ perché è combin. lineare $1 \cdot u + 1 \cdot u' \in U$ per (II)
- $au = au + 0 \cdot u$ è comb. lineare di lungh. 2 di vett. di U; $\in U$ (II)

(I) $\Rightarrow$ (II) siano $u_1, u_2 \in U$, $a_1, a_2 \in K$

$a_1 u_1 \in U$ perché U chiuso per $\cdot$

$a_2 u_2 \in U$ - - - - - - - -

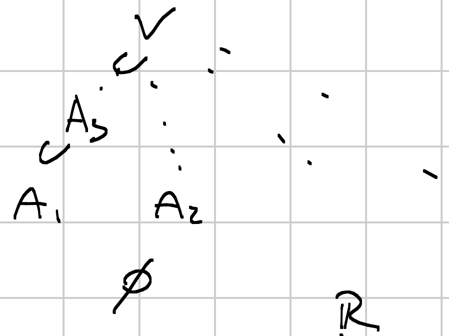
$\underbrace{a_1 u_1}_{\in U} + \underbrace{a_2 u_2}_{\in U} \in U$ - - - - - - $+$

(II) $\Leftrightarrow$ (III) $\qquad$ $\Leftarrow$) banale

$\Rightarrow$) per induzione (esercizio!)

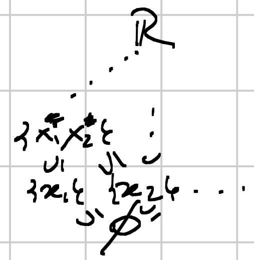
Osservo Sia V uno sp. vettoriale indico con $U \leq V$ il fatto che U sia sottospazio (vettoriale) di V

$\mathcal{P}(V) = \{ A \subseteq V \}$ insieme dei sottoinsiemi di V con le operazioni:
$\cup$, $\cap$, $\subseteq$, $\emptyset$ minimo, V max



reticolo di sottoinsiemi:

Ad es. con $\mathbb{R}$



$\mathcal{P}(V) = \{$ sottospazi di $V \}$ $\quad 0, \; V, \; \le, \; \cap, \; \cancel{\cup} \; +$

$\quad$ min, max

$\mathbb{R}$, $\quad 0 \le \mathbb{R}$, $\quad \mathbb{R} \le \mathbb{R}$

↑ sp. vett. su $\mathbb{R}$

Sia $U \le \mathbb{R}$, $U \ne 0 = \{0\}$ $\quad$ sia $u \in U$, $u \ne 0$ $\quad$ U è chiuso per moltiplic. per gli scalari ($\mathbb{R}$)

Dunque $\lambda u \in U$ $\quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Sia ora $x \in \mathbb{R}$ qualsiasi

$x = \left(\frac{x}{u}\right) \cdot u \qquad \underbrace{\frac{x}{u}}_{= \lambda} \in \mathbb{R}$ $\qquad$ Dunque $x \in U \Rightarrow U = \mathbb{R}$

$\mathcal{P}(\mathbb{R}) := \{0, \mathbb{R}\}$

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$? $= \{ 0, \mathbb{R}^2, \langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rangle, \dots \}$ al variare di $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ con identif.

$0 \ne U \le \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ne \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U$ $\quad$ quindi in U ho tutti i vettori $\begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rangle \subseteq U$ $\quad$ C'è altro in U?

$U = \langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rangle$

oppure

$\exists \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in U$ con $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ non multiplo di $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

e in questo caso $U = \mathbb{R}^2$

Dunque in U ci sono tutti i vettori del tipo

$$\begin{pmatrix}\alpha a\\ \alpha b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta c\\ \beta d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a+\beta c\\ \alpha b+\beta d\end{pmatrix}$$

Osservo che $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ esistono α,β t.c. $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a+\beta c\\ \alpha b+\beta d\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\alpha a+\beta c = x\\ \alpha b+\beta d = y\end{cases}\qquad\begin{cases}ax_1+cx_2=A\\ bx_1+dx_2=B\end{cases}$$

a b c d sono noti
A, B vengono fissati

La condizione $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}$ non siano proporzionali dice che questo sistema ammette unica soluzione.

Lemma a) Se U_1, U_2 sono sottospazi di V allora anche $U_1\cap U_2$ è un sottospazio.

b) Se $U_1,\dots,U_n$ sono sottospazi anche $\bigcap_{i=1}^n U_i$ lo è

c) Se U_i, $i\in I$ sono sottospazi anche $\bigcap_{i\in I} U_i$ lo è.

anche infinito

Dim Mostriamo che $\bigcap_{i=1}^n U_i$ è sottospazio col criterio II

Siano $u,u'\in\bigcap_{i=1}^n U_i$, $\alpha,\beta\in K$

$$\Updownarrow$$

$u,u'\in U_i\ \forall i$

$\alpha u+\beta u'\in U_i\ \forall i$ per il (II) criterio applicato a ciascun U_i

Dunque $\alpha u+\beta u'\in\bigcap_{i=1}^n U_i$.

Analog. (a), (c)

↳ provare a dim. col I criterio. (Esercizio)

Spazi vettoriali e sottospazi

(Rielaborazione di note di M. Candilera)

Alessandra Bertapelle

a.a. 2022-2023

Definizione di Spazio Vettoriale

Definizione

Sia K un campo fissato. Uno *Spazio Vettoriale* su K è un insieme (non vuoto) V dotato di due operazioni: somma tra vettori $+ : V \times V \to V$ e prodotto di un vettore per uno scalare $\cdot : K \times V \to V$, soddisfacenti alle seguenti proprietà. Per ogni u, v, w in V e ogni a, b in K, si ha

- $(u + v) + w = u + (v + w)$;
- esiste $0 \in V$ tale che $v + 0 = v = 0 + v$.
- dato v, esiste $-v \in V$ tale che $v + (-v) = 0 = (-v) + v$;
- $u + v = v + u$.
- $(ab)v = a(bv)$;
- $(a + b)v = av + bv$;
- $a(v + w) = av + aw$;
- $1v = v$.

Nella definizione e come sempre nel seguito, salvo diverso avviso, K è un campo qualsiasi. Diamo degli esempi di spazi vettoriali su un campo K.

- Sia $n \geq 1$ un numero intero fissato. Il prodotto cartesiano di n copie del campo K,

$$K^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \; x_i \in K, \; i = 1, \dots, n \right\}$$

  è un K-spazio vettoriale con le operazioni:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}.$$

Definizione e primi esempi
Sottospazi vettoriali
Sottospazi vettoriali

- Sia X un'indeterminata su K. I polinomi a coefficienti in K,

$$K[X] = \{ \, a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \mid a_i \in K, \; n \in \mathbb{N} \, \}$$

  formano un K-spazio vettoriale con le usuali operazioni:

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n) + (b_0 + b_1 X + \cdots + b_n X^n) = \\ = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) X + \cdots + (a_n + b_n) X^n\end{aligned}$$

$$c(a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n) = ca_0 + ca_1 X + \cdots + ca_n X^n.$$

  NB: gli a_i, b_j possono essere 0.

Alessandra Bertapelle Spazi vettoriali e sottospazi

- Sia U un insieme non vuoto e K un campo. L'insieme $\mathscr{F}(U,K)$ di tutte le funzioni (insiemistiche) definite su U e a valori in K, è un K-spazio vettoriale con le usuali operazioni tra funzioni:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x) \\ (cf)(x) &= c\,f(x), \end{aligned} \qquad \text{per ogni } x \in U.$$

- Siano n ed m due numeri interi positivi. Una *matrice* con m righe e n colonne ad elementi nel campo K è una tabella

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{con } a_{ij} \in K$$

L'insieme $M_{m\times n}(K)$ di tutte le matrici con m righe e n colonne ad entrate nel campo K è uno spazio vettoriale su K con le operazioni:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$c\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & \dots & ca_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ca_{m1} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

In particolare, se $n=1$, $M_{m\times 1}(K)$ coincide con lo spazio vettoriale K^m del primo esempio.

- L'insieme $\mathbb{R}_{>0}$ dei numeri reali positivi, è uno spazio vettoriale reale con le seguenti operazioni: la *somma* di x e y in $\mathbb{R}_{>0}$ è l'usuale prodotto di numeri reali, xy; e il *prodotto di* $x \in \mathbb{R}_{>0}$ *per uno scalare* $a \in \mathbb{R}$ è $x^a = \exp(a \log x)$.

Non esempio

L'insieme $\mathbb{R}^2$ *non* è uno spazio vettoriale se poniamo le operazioni:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Valgono tutti gli assiomi, eccetto l'ultimo.
Infatti, se $y \neq 0$, $1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Osservazioni

Sia V uno spazio vettoriale su K.

(a) Sia $0_K \in K$ e $v \in V$, allora $0_K v = 0_V$.

(b) Sia $0_V \in V$ e $c \in K$, allora $c0_V = 0_V$.

(c) Dato $v \in V$, l'opposto $-v \in V$ è unico e $-v = (-1)v$.

dim. (a) Si ha $0_K v = (0_K + 0_K)v = 0_K v + 0_K v$. Sommando ai due membri dell'uguaglianza un vettore $-0_K v$, opposto di $0_K v$, si ricava l'uguaglianza $0_V = 0_K v + 0_V = 0_K v$.

(b) Si ha $c0_V = c(0_V + 0_V) = c0_V + c0_V$. Sommando ai due membri dell'uguaglianza un vettore $-c0_V$, opposto di $c0_V$, si ricava $0_V = c0_V + 0_V = c0_V$.

(c) vedi corso Algebra. $\square$

Si può vedere che la commutatività della somma è conseguenza degli altri assiomi che definiscono uno spazio vettoriale. Infatti, presi due vettori qualsiasi, u e v in V, si ha

$$v + u = -((-u) + (-v)) = (-1)((-u) + (-v)) = \\ = (-1)(-u) + (-1)(-v) = u + v.$$

Definizione e primi esempi
Sottospazi vettoriali
Sottospazi vettoriali

Osservazione

Sia V uno spazio vettoriale su K. Presi comunque $v \in V$ e $c \in K$, si ha $cv = 0_V$ se, e solo se, $c = 0_K$ oppure $v = 0_V$.

dim. Abbiamo già visto che $cv = 0_V$ se uno dei due fattori è nullo. Viceversa, se $cv = 0_V$ e $c \neq 0_K$, allora esiste $c^{-1} \in K$ e

$$0_V = c^{-1}0_V = c^{-1}(cv) = (c^{-1}c)v = 1v = v.$$

Quindi, se $c \neq 0_K$, allora $v = 0_V$. $\square$

Alessandra Bertapelle Spazi vettoriali e sottospazi

Sottospazi vettoriali

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale su K. Un sottoinsieme non vuoto U di V è un *sottospazio vettoriale* se le restrizioni della somma e della restrizione per lo scalare di V a U rendono U uno spazio vettoriale.

Proposizione

Sia V uno spazio vettoriale su K. Un sottoinsieme non vuoto U di V è un *sottospazio vettoriale* se, e solo se, soddisfa a una delle seguenti condizioni, tra loro equivalenti.

(I) Presi comunque u, u' in U e $a \in K$, i vettori $u + u'$ e au appartengono a U

(II) Presi comunque u_1, u_2 in U e a_1, a_2 in K il vettore $a_1u_1 + a_2u_2$ appartiene a U.

(III) Presi comunque $u_1, u_2, \dots, u_n$ in U e $a_1, \dots, a_n$ in K il vettore $a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$ appartiene a U.

Dobbiamo quindi verificare che le tre condizioni dell'enunciato sono equivalenti.