Vettori geometrici e spazi vettoriali

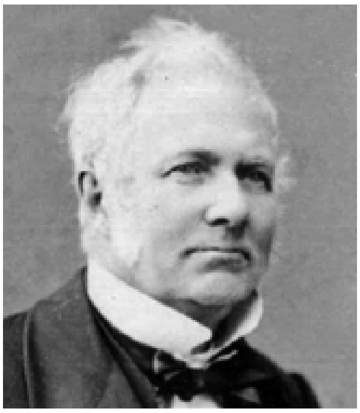
A. Bertapelle

17 ottobre 2022

Idea

Uno spazio vettoriale è un insieme di oggetti (detti *vettori*) che si possono sommare e moltiplicare per uno *scalare* (ossia un elemento di un campo: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$) e le operazioni $+, \cdot$ godono di certe proprietà.

Un po' di storia.



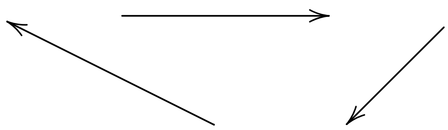
Giusto Bellavitis
(Bassano del Grappa 22/11/1803,
Tezze sul Brenta 6/11/1880)

Les développements et les applications de la méthode des équipollences, je les ai écrits en **1832** *chez celle qui depuis a été ma femme chérie, pendant quelle m'accompagnait travaillant ou chantant.* (Lettera a M. Laisant 28/6/1873)

Hamilton (1843), Grassmann (1844), ...

Definizione naïf di vettore

Un vettore geometrico è un "ente" dotato di direzione, lunghezza e verso.



Si considera poi il caso particolare del vettore nullo che non ha né direzione, né verso e lunghezza 0.

Segmenti orientati

Dati due punti distinti A e B, un *segmento orientato* (non banale) AB è segmento su cui siano fissati nell'ordine l'inizio A e la fine B.

A ——————— B

Si ha $AB \neq BA$.

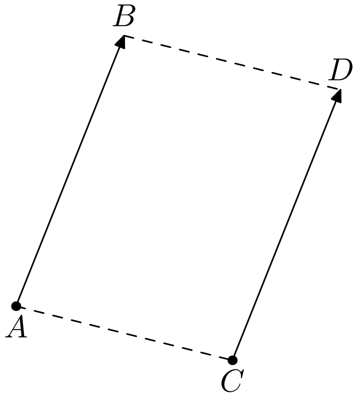
Un *segmento orientato banale* è del tipo AA (ossia un punto).

Segmenti equipollenti

Definizione

Due segmenti orientati non banali AB e CD si dicono **equipollenti** *se sono paralleli, di uguale lunghezza e orientati concordemente.*

Se distinti, essi sono equipollenti se e solo se $ABDC$ è un parallelogramma.



Tutti i segmenti orientati banali sono considerati tra loro equipollenti.

Un segmento orientato non banale non è equipollente ad alcun segmento orientato banale.

La relazione di equipollenza sull'insieme dei segmenti orientati è una relazione di equivalenza.

Vettori geometrici

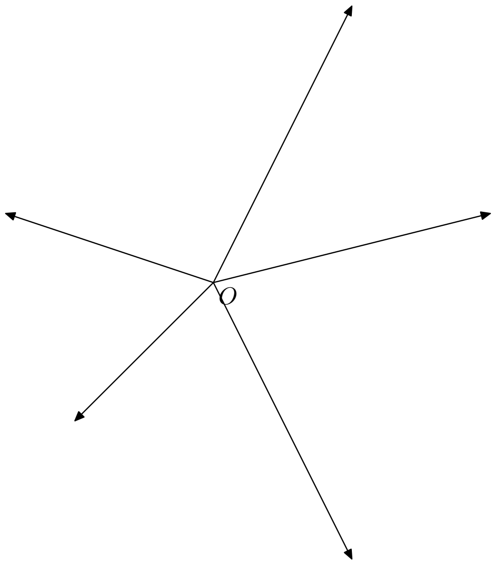
Definizione

Un **vettore geometrico** *è una classe di equipollenza di segmenti orientati. Preso un segmento orientato AB la sua classe di equipollenza viene indicata con $\vec{AB}$.*

Se AB è equipollente a CD allora $\vec{AB} = \vec{CD}$.

$\mathbf{0} = \vec{AA}$ indica il *vettore geometrico nullo*, con A un qualsiasi punto del piano.

Fissato un punto O un qualsiasi vettore geometrico è rappresentato da un (unico) segmento orientato avente punto iniziale in O.

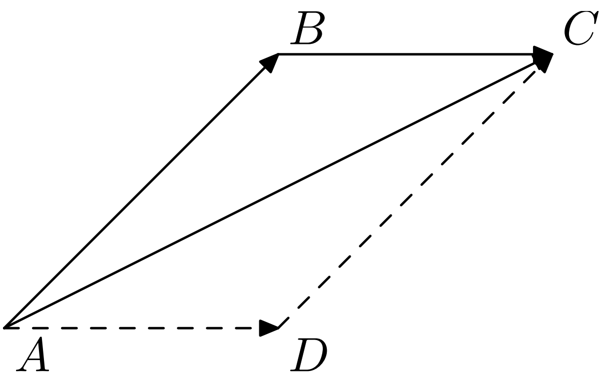


Sia $\mathcal{V}$ l'insieme dei vettori geometrici.

Somma di vettori geometrici

Definiamo

$$+ \colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}, \qquad (\vec{AB}, \vec{BC}) \mapsto \vec{AC}$$



Regola del parallelogramma: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ è associato alla diagonale del parallelogramma individuato dai segmenti AB e AD.

Se uno dei vettori è nullo si ha:

$$\vec{AB} + \mathbf{0} = \vec{AB} = \mathbf{0} + \vec{AB}$$

perché $\mathbf{0} = \vec{AA} = \vec{BB}$.

Inoltre,

$$\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \mathbf{0}.$$

Moltiplicazione per uno scalare

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}, \qquad (\alpha, \vec{AB}) \mapsto \alpha\vec{AB} = \vec{AC}$$

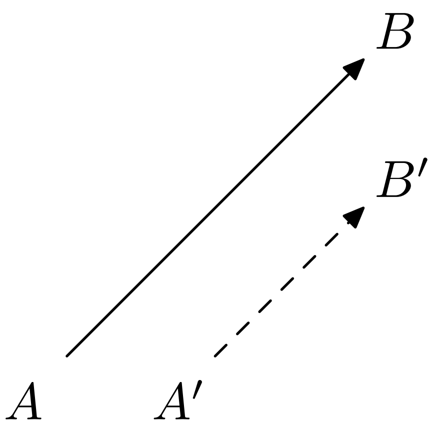
ove

- $C = A$ se $\alpha = 0$, ossia $0\vec{AB} = \mathbf{0}$,
- $C = A$ se $B = A$, ossia $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$,
- se $\alpha \neq 0$ e $\vec{AB} \neq \mathbf{0}$ i punti A, B, C sono allineati, vale

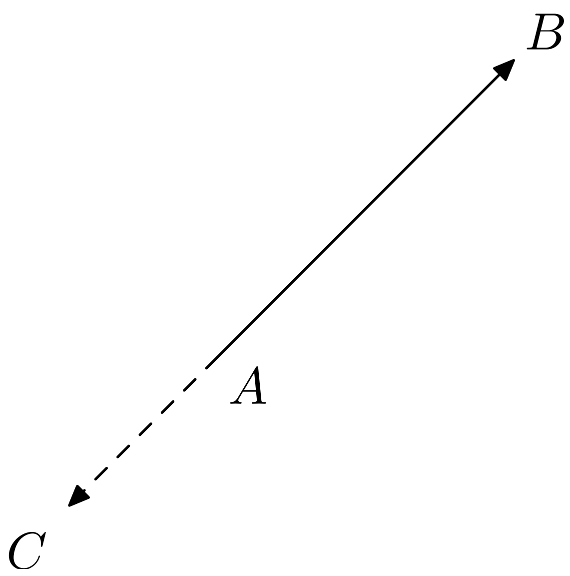
  $$|\alpha| \cdot ||AB|| = ||AC||$$

  e il verso di $\vec{AC}$ è concorde a quello di $\vec{AB}$ se $\alpha > 0$, discorde altrimenti.

Esempio: $\alpha = 1/2$



Esempio: $\alpha = -1/3$



Proprietà della somma e del prodotto per uno scalare

$(\mathcal{V}, +)$ è un gruppo commutativo ossia

S1) $(\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD} = \vec{AB} + (\vec{BC} + \vec{CD})$ (associatività)

S2) $\vec{AB} + \mathbf{0} = \vec{AB} = \mathbf{0} + \vec{AB}$ (esiste el. neutro)

S3) $\vec{AB} + \vec{BA} = \mathbf{0} = \vec{BA} + \vec{AB}$ (esiste el. opposto)

S4) $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{CD} + \vec{AB}$ (commutatività)

Introduzione
Vettori geometrici
Spazi vettoriali
Definizione
Operazioni sull'insieme dei vettori geometrici

e inoltre dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, valgono

M1) $\alpha(\beta\vec{AB}) = (\alpha\beta)\vec{AB}$ (associatività)

M2) $(\alpha + \beta)\vec{AB} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AB}$ (distributività)

M3) $\alpha(\vec{AB} + \vec{CD}) = \alpha\vec{AB} + \alpha\vec{CD}$ (distributività)

M4) $1\vec{AB} = \vec{AB}$

A. Bertapelle
Vettori geometrici e spazi vettoriali

Definizione di spazio vettoriale

Uno **spazio vettoriale** su un campo K (ad es. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) è un insieme V dotato di due operazioni

$$+\colon V\times V \to V,\ (v,w)\mapsto v+w \quad \text{e} \quad \cdot\colon K\times V \to V,\ (\alpha,v)\mapsto \alpha v$$

tali che $(V,+)$ sia un gruppo commutativo e inoltre valgono:

M1) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ (associatività)

M2) $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$ (distributività)

M3) $\alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$ (distributività)

M4) $1v = v$

per ogni scelta di α, β in K e di v, w in V.

Gli elementi di uno spazio vettoriale vengono detti **vettori**, gli elementi di K sono detti **scalari**.

$\mathcal{V}$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale

L'insieme dei vettori geometrici $\mathcal{V}$ con le operazioni definite sopra è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$.

$\mathbb{C}$ come spazio vettoriale

$\mathbb{C}$ è un gruppo commutativo rispetto alla $+$.

Considero $\quad \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ moltiplicazione di $\mathbb{C}$.

Soddisfa le proprietà M1)-M4).
Dunque $\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale su se stesso.

Se invece considero $\quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad (\lambda, a + ib) \mapsto \lambda a + i\lambda b.$

Anche questa applicazione soddisfa le proprietà M1)-M4).
Dunque $\mathbb{C}$ è pure uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Spazio vettoriale nullo

Sia $\mathbf{0} = \{0\}$.

Si definiscono:

- $0 + 0 = 0$
- $\alpha \cdot 0 = 0$ per ogni $\alpha \in K$.

Con queste operazioni $\mathbf{0}$ è uno spazio vettoriale, detto **spazio vettoriale nullo**, sul campo K.

K^n

Ricordiamo che K^n, $n \geq 1$, indica il prodotto cartesiano di n copie di K.

Ad es.: $K^1 = K$, $K^2 = K \times K$, $K^3 = K \times K \times K$, ...

Per convenzione d'ora in poi scriveremo gli elementi di K^n in colonne.

$$n = 1 \quad (a), \qquad n = 2 \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \qquad n = 3 \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

$$\text{in generale:} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix},$$

con $a, a_i \in K$.

Operazioni sulle n-uple

$$+ : K^n \times K^n \longrightarrow K^n, \qquad \cdot : K \times K^n \longrightarrow K^n$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \dots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$$

K^n è uno spazio vettoriale su K.

$K[x]$

Indichiamo con $K[x]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti nel campo K nell'indeterminata x. I suoi elementi sono del tipo

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

con gli $a_i \in K$. Se gli a_i sono tutti 0 il polinomio si dice nullo e lo si indica con 0.

Il **grado** di un polinomio non nullo $p(x) \in K[x]$ è il massimo indice j per cui $a_j \neq 0$. Ad esempio:

- 2 ha grado 0;
- $1 - x^3 + 3x^5$ ha grado 5;
- $3 - x^2 + 0x^4 + 0x^7$ ha grado 2.

Poniamo

$$\begin{array}{rcl} +\colon K[x] \times K[x] & \to & K[x], \\ (a_0 + \ldots a_n x^n, b_0 + \cdots + b_m x^m) & \mapsto & a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \ldots \end{array}$$

l'usuale somma tra polinomi e

$$\begin{array}{rcl} \cdot\colon K \times K[x] & \to & K[x], \\ (\alpha, b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m) & \mapsto & \alpha b_0 + \alpha b_1 x + \cdots + \alpha b_m x^m \end{array}$$

l'usuale prodotto di un polinomio per uno scalare.

$K[x]$ con le operazioni appena definite è uno spazio vettoriale su K.

Campi finiti: un esempio

Sia $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ il campo dei numeri binari definito da

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\bullet$	0	1
0	0	0
1	0	1

Gli spazi vettoriali su $\mathbb{F}_2$ hanno applicazioni in teoria dei codici. In Algebra studierete i campi finiti $\mathbb{F}_p$ con $p \geq 2$ primo e più in generale $\mathbb{F}_{p^r}$.

Spazi vettoriali di funzioni

Sia A un insieme, K un campo e $\mathcal{F} = \{f : A \to K\}$ l'insieme di tutte le funzioni da A in K (come insiemi). Ad esempio posso prendere $A = \mathbb{N}$ o $A = K$.

Dati $f, g \in \mathcal{F}$ e $\lambda \in K$ qualsiasi posso definire

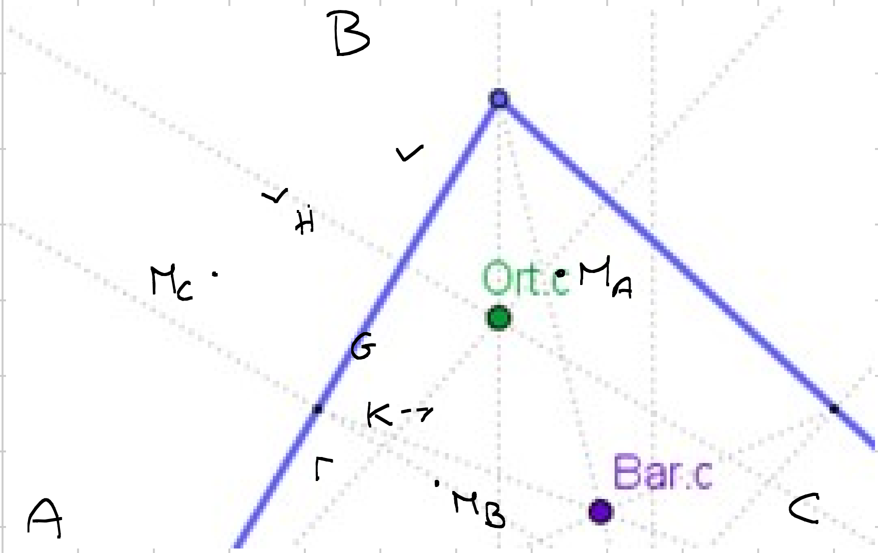
$$f + g : A \to K, \quad a \mapsto f(a) + g(a)$$

$$\lambda f : A \to K, \quad a \mapsto \lambda(f(a))$$

Risulta che $\mathcal{F}$ è uno spazio vettoriale su K.

Geometria 1 - mod. A - Lezione 7

Note Title



K = circumcentro
(punto incontro assi)
centro della circonf ABC

G = baricentro
(punto incontro mediane)

H = ortocentro
(punto incontro altezze)

Suppongo di aver scelto un riferimento Oxy in modo che $O = K$; posso assumere $A, B, C \in S^1$

$K \rightsquigarrow 0 \in \mathbb{C}$ $\qquad A: (x_A, y_A) \rightsquigarrow x_A + i y_A$
B, C analoghi

$M_A = \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right)$ come numero complesso è $\frac{B+C}{2}$

$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$ . . . . $\frac{A+B+C}{3}$

Dimostrerò che $H = A + B + C$ come numero complesso

Allora $K = 0$, $G = \frac{A+B+C}{3}$, $H = A + B + C = 3G$
saranno allineati

<u>Ricordo</u>: se $P, Q \in S^1$ allora $z = PQ\bar{z}$ eq. dell'asse del segm PQ.

Dunque l'eq. dell'asse per M_A è $z = BC\bar{z}$

. . . . dell'altezza per A è $z - BC\bar{z} = k$ $\quad k \in \mathbb{R}$ da determ.

Passaggio per A: $\boxed{A - BC\bar{A} = k}$

eq. altezza per A è $z - BC\bar{z} = A - BC\bar{A}$

Moltiplico per A $(\neq 0)$ in $\mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$ $Az - ABC\bar{z} = A^2 - BC\cancel{A\bar{A}}^{1}$

L'altezza per A ha eq. $Az = ABC\bar{z} + A^2 - BC$

- - - B - - - $Bz = ABC\bar{z} + B^2 - AC$

- - - C - - - $Cz = ABC\bar{z} + C^2 - AB$

Mostriamo che $A+B+C$ appartiene alle 3 ~~ad~~ altezze (ossia soddisfa le 3 eq. sopra).

$$A(A+B+C) \overset{?}{=} ABC(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}) + A^2 - BC$$

$$A^2 + AB + AC \underset{\text{sì}}{\overset{?}{=}} \cancel{A}\cancel{BC}\cancel{\bar{A}} + A\cancel{B}C\cancel{\bar{B}} + AB\cancel{C}\cancel{\bar{C}} + A^2 - \cancel{BC}$$

□

Spazi vettoriali

Abbiamo visto che $\overset{K}{\mathbb{R}}[x]$ è uno spazio vettoriale su $\overset{K}{\mathbb{R}}$

- $\mathbb{R}[x]_{\le n} = \{p(x) \in \mathbb{R}[x],\ \text{con grado } p(x) \le n\}$ $\ni 0$ ha grado < 0

  $= \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,\ a_i \in \mathbb{R}\}$ <u>n fissato!</u>

  + usuale di polinomi

  · " di $\lambda \in \mathbb{R}$ per un polinomio

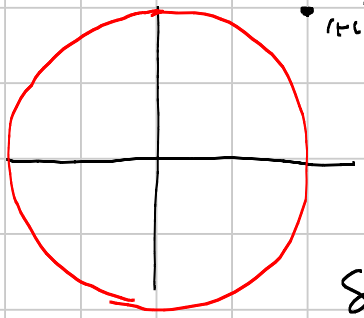
  $\to$ $\mathbb{R}[x]_{\le n}$ è uno sp. vettoriale su $\mathbb{R}$

- $P_n = \{\text{polinomi in } \mathbb{R}[x] \text{ di grado } n\} \cup \{0\}$ con $n \geq 0$ fissato

  non è sp. vettoriale con + e · usuale

  Ad esempio · $x^n + (-x^n) = 0$ che non ha grado n.

  · $x^n + (-x^n + 1) = 1$ - - - - - n e non è 0



- sì $\mathbb{C}$ è uno sp. vettoriale su $\mathbb{R}$

  S^1 - - - - - - - - ?

  + in S^1 come + di numeri complessi. <u>NO</u>

  Sia + in S^1 i.e. · di numeri complessi

  $(S^1, \cdot)$ è gruppo commutativo S1 — S4

  $\underset{\text{scalare}}{\cdot} : \mathbb{R} \times S^1$

  $(r, e^{i\theta}) \longmapsto e^{ir\theta}$

Valgono $\underset{✓}{M_1}$, $\underbrace{M_2, M_3}_{?}$, $\underset{✓}{M_4}$ <u>Esercizio!</u>

"Trasporto"

Se $(V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su K campo e W è un insieme per il quale esiste una biiezione $f: W \longrightarrow V$ allora posso definire una struttura di sp. vettor. su W ponendo

$$w_1 + w_2 := f^{-1}(f(w_1) + f(w_2))$$

$$\alpha \in K \qquad \alpha \cdot w := f^{-1}(\alpha \cdot f(w))$$

si verifica che soddisfano $S_1 - S_4$, $M_1 - M_4$

Ad esempio: $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$ biiezione

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \longmapsto \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) := f^{-1}\left(\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \underset{\mathbb{R}^3}{+} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= f^{-1}\begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$$

$$\alpha \cdot (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = f^{-1}\begin{pmatrix} \alpha a_0 \\ \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \end{pmatrix} = \alpha a_0 + \ldots + \alpha a_2 x^2.$$

<u>Def</u> Sia V uno sp. vett. su K.

Una <u>combinazione lineare</u> di elementi di V è una somma <u>finita</u> del tipo $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_r v_r \in V$ con $\alpha_i \in K$ e $v_i \in V$.