Geometria 1 - mod. A - Lezione 6

Note Title

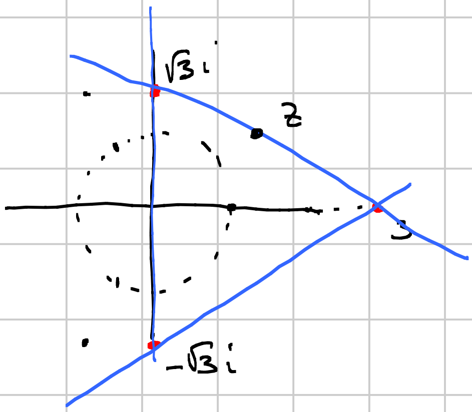
Esercizio (13. 9. 2021)

Scrivere in forma esponenziale/trigonom/cartesiana le radici dell' eq $(z-1)^3 = 8$

Determinare le eq. hermitiane delle 3 rette che passano per tali punti e della circonf che ~~contiene~~ passa per i 3 punti.

Determinare le circonf ottenute invertendo le 3 rette rispetto ad S^1. Rappresentare con un disegno.

$$z_1 = 3 = 3 \cdot 1 = 3 \cdot e^{i0}$$
$$z_2 = \sqrt{3}\, i = \sqrt{3}\, e^{\frac{\pi}{2} i}$$
$$z_3 = -\sqrt{3}\, i = \sqrt{3}\, e^{\frac{3}{2}\pi i}$$



r_1 $\boxed{x = 0}$

r_2 $\boxed{\sqrt{3}x + 3y - 3\sqrt{3} = 0} \rightsquigarrow x + \sqrt{3}y - 3 = 0$

r_3 $\boxed{\sqrt{3}x - 3y - 3\sqrt{3} = 0} \rightsquigarrow x - \sqrt{3}y \underbrace{-3}_{c} = 0$

r_1: $\alpha = 1 + 0i = 1$ $\qquad r_2$: $\alpha = 1 + \sqrt{3}i$ $\qquad r_3$: $\alpha = 1 - \sqrt{3}i$

r_1: $\bar{z} + z = 0$ $\qquad r_2$: $(1-\sqrt{3}i)z + (1+\sqrt{3}i)\bar{z} - 6 = 0$

r_3: $(1+\sqrt{3}i)z + (1-\sqrt{3}i)\bar{z} - 6 = 0$

In alternativa: r_1 : asse della y $\Downarrow$ $z = 0 + i\,\Im z$ $\qquad \boxed{z = -\bar{z}} \rightsquigarrow z + \bar{z} = 0$

r_2 : z t.c. $z - 3 = \lambda(\sqrt{3}i - 3)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{z-3}{\sqrt{3}i - 3} = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\frac{z-3}{\sqrt{3}i-3} = \overline{\left(\frac{z-3}{\sqrt{3}i-3}\right)} \qquad \frac{z-3}{\sqrt{3}i-3} = \frac{\bar{z}-3}{-\sqrt{3}i-3}$$

$z(-\sqrt{3}i-3)+3\sqrt{3}i+\cancel{9}=\bar{z}(\sqrt{3}i-3)-3\sqrt{3}i+\cancel{9}$

$\cancel{\sqrt{3}}z(-\sqrt{3}-i)-\cancel{\sqrt{3}}(-\sqrt{3}+i)\bar{z}+\underbrace{6\cancel{\sqrt{3}}i}=0$ moltiplico per i

t. noto deve essere in $\mathbb{R}$

r_2: $z(1-\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)\bar{z}-6=0$ $\qquad \underbrace{\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}}_{\mathbb{C}}+\underset{\uparrow\,\mathbb{R}}{C}=0$

Trovare la circonferenza passante per z_1, z_2, z_3

1° metodo: prendere generica eq. di una circonferenza

$z\bar{z}+\bar{\alpha}z+\underset{\substack{\downarrow\\ a+ib}}{\alpha}\bar{z}+C=0$ sostituisco z_1, z_2, z_3 e trovo α e C

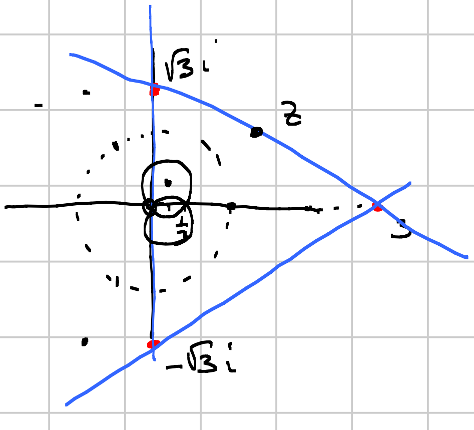
2° metodo $(z-1)^3=8$ $\qquad w^3=8$ $\qquad z=w+1$

Le soluzioni di $w^3=8$ appartengono alla circonf di centro 0 e raggio 2.

Dunque z_1, z_2, z_3 appartengono alla circonf. di centro 1 e raggio 2. $\qquad |z-1|=2$

3° metodo $(z-1)^3=8 \Rightarrow |z-1|^3=8 \Rightarrow |z-1|=2$

Considero ora $\varphi: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ $\qquad z \longmapsto \frac{1}{\bar{z}}$



$r_1: x=0$ $\qquad z+\bar{z}=0$

$\varphi(r_1)=r_1$ $\qquad \frac{1}{\bar{z}}+\frac{1}{z}=0$ $\qquad z+\bar{z}=0$

$r_2: x+\sqrt{3}y-3=0$

$(1-\sqrt{3}i)z+(1+\sqrt{3}i)\bar{z}-6=0$

$\varphi(r_2)$ sarà circonferenza per 0 contenuta nel cerchio di raggio 1 e centro 0

$\varphi(r_2)$: $\qquad (1-\sqrt{3}i)\frac{1}{\bar{z}}+(1+\sqrt{3}i)\frac{1}{z}-6=0$

$(1-\sqrt{3}i)z+(1+\sqrt{3}i)\bar{z}-6z\bar{z}=0$

$z\bar{z}+\left(-\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)z+\left(-\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)\bar{z}=0$

è circonferenza di centro $\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}i$ e raggio $\left|\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right|$

Per disegnarla: trovare le intersezioni con gli assi

$$\underbrace{z\bar z+\bar\alpha z+\alpha\bar z}+\underbrace{C}=0$$ centro è $-\alpha$

$$(z+\alpha)(\bar z+\bar\alpha)\underbrace{-|\alpha|^2+C}=0$$

$$|z+\alpha|^2=\underbrace{|\alpha|^2-C}$$

$$|z-(-\alpha)|^2=r^2$$

Analogamente per l'altra retta

4/3/2021

$z^4+6z^2+25=0$ Trovare le soluzioni, disegnare le 6 rette e calcolare l'inversione risp. a S^1 di tali rette

~~$w=z^2$ $w^2+6w+25=0$~~

~~$w=-3\pm\sqrt{9-25}=-3\pm4i$~~

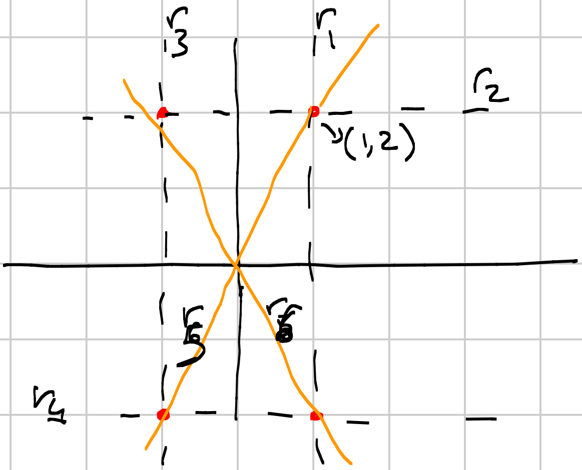
~~$z^2=-3+4i$~~

Suggerimento: scrivere $z^4+6z^2+25=\underbrace{z^4+10z^2+25}_{(z^2+5)^2}-4z^2$

$(z^2+5)^2-4z^2=0$ $(z^2+5)^2=4z^2$ $(z^2+5-2z)(z^2+5+2z)=0$

$z^2+5=\pm 2z$

- $z^2-2z+5=0$ $z=1\pm\sqrt{1-5}=1\pm2i$
- $z^2+2z+5=0$ $z=-1\pm2i$



r_1: $x=1$ $x-1=0$ $\alpha=1$

$z+\bar z-2=0$

$z-1$ appartiene all'asse delle y

$z-1=-\overline{(z-1)}$

$z-1=-\bar z+1$ $z+\bar z-2=0$

r_2: $y=2$ $y-2=0$ $\alpha=i$

$-iz+i\bar z-4=0$

$iz-i\bar z+4=0$

r_3: $x = -1$ è parallela a r_1 $\Rightarrow$ $z + \bar{z} + \cancel{?} = 0$ $+2$

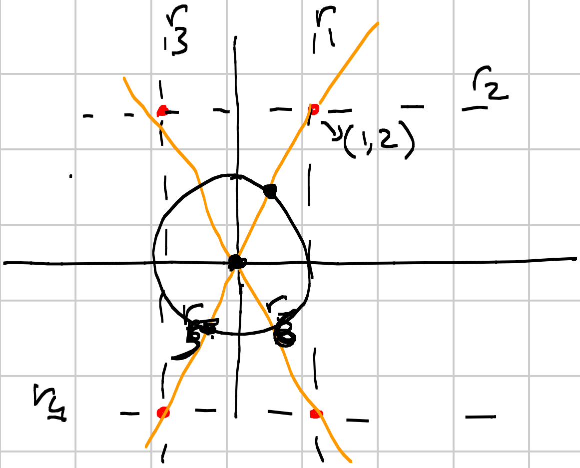
r_4: $iz - i\bar{z} + \cancel{?} = 0$ -4

r_5: $y = 2x$ $\quad y - 2x = 0$ $\quad 2x - y = 0$ $\quad \alpha = 2 - i$

$$(2+i)z + (2-i)\bar{z} = 0$$

r_6 $\quad y = -2x$ $\quad 2x + y = 0$ $\quad (2-i)z + (2+i)\bar{z} = 0$

NB se $z \in r_5$ $\bar{z} \in r_6$ e viceversa.



Inversione risp. a $\mathcal{S}$

$\varphi(r_5) = ?$ $\quad (2+i)z + (2-i)\bar{z} = 0$

$= r_5$ $\quad \bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} = 0$

$$\bar{\alpha}\frac{1}{\bar{z}} + \alpha \frac{1}{z} = 0$$

$$\frac{\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z}}{\cancel{z\bar{z}}} = 0$$

$\varphi(r_6) = r_6$