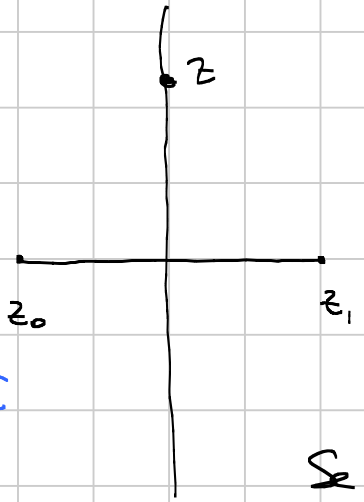
Geometria 1 - mod. A - Lezione 5

Note Title



$z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ fissati! distinti

$$|z-z_0|^2 = |z-z_1|^2$$

$$(z-z_0)(\overline{z-z_0}) = (z-z_1)(\overline{z-z_1})$$

$$(z-z_0)(\bar z - \bar z_0) = (z-z_1)(\bar z - \bar z_1)$$

$$\cancel{z\bar z} - z\bar z_0 - z_0 \bar z + z_0 \bar z_0 = \cancel{z\bar z} - z_1\bar z - z\bar z_1 + z_1\bar z_1$$

$$z(\bar z_1 - \bar z_0) + \bar z(z_1 - z_0) + |z_0|^2 - |z_1|^2 = 0$$

Se $z_0, z_1 \in S^1 \leftarrow$ circonf. unitaria

$$\bar z_0 = \frac{1}{z_0} \qquad \bar z_1 = \frac{1}{z_1}$$

$$z\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_0}\right) + \bar z(z_1 - z_0) + \cancel{1} - \cancel{1} = 0$$

$$z\left(\frac{z_0 - z_1}{z_0 z_1}\right) + \bar z(z_1 - z_0) = 0$$

$$z\,\underbrace{\cancel{(z_0 - z_1)}}_{\in\, \mathbb{C}\setminus\{0\}} - \bar z\,\cancel{(z_0 - z_1)}\, z_0 z_1 = 0$$

$$\boxed{z - z_0 z_1 \bar z = 0}$$

§ Trasformazioni di Möbius / lineari fratte

$\varphi : \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$ $\qquad a,b,c,d \in \mathbb{C}$ fissati

$z \longmapsto \dfrac{\lambda a z + \lambda b}{\lambda c z + \lambda d}$ raccolgo e semplifico! $\qquad ad - bc \neq 0 \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Noto che $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$ $\qquad \lambda \in \mathbb{C}^* \leftarrow$ diverso da 0

danno la stessa φ

Casi possibili:

I) $c = 0$ $\qquad \dfrac{az+b}{d} = \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d}$ $\qquad$ non c'è z a denominatore (non è fratta!)

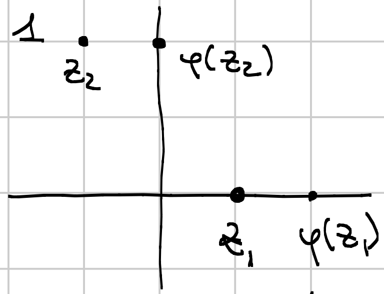
si dicono anche affinità

$\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ (NB) è invertibile $\varphi^{-1} : z \longrightarrow \frac{1}{a'} z - \frac{b'}{a'}$

$z \longmapsto a'z + b' \qquad a', b' \in \mathbb{C}$

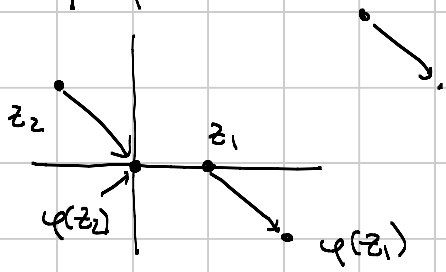
se $a' = 1 \qquad z \longmapsto z + b'$ è una traslazione

Ad es $b' = 1$



se $b' = 1 - i$

$(1, -1)$



- se $b' = 0 \qquad z \longmapsto a'z = \varphi(z)$ è una Dilatazione

$a' \in \mathbb{R}^*$ •) se $a' > 0$ vuol dire cambiare il modulo moltiplicandolo per a'

$|\varphi(z)| = a' |z|$

$Arg(\varphi(z)) = Arg(z)$

•) se $a' < 0 \qquad |\varphi(z)| = |a'|\,|z|$

$Arg(\varphi(z)) = Arg(z) + \pi$

posso dimenticarlo

$a' \in \mathbb{S}^1 \rightsquigarrow$ sto ruotando di angolo uguale ad $Arg(a')$

Poiché $0 \neq a' = |a'| \cdot e^{i\alpha}$ con $\alpha = Arg(a')$, $a' \in \mathbb{C}^*$

l'applicazione $z \longmapsto a'z$ la posso vedere come:

$$z \xrightarrow{\text{rotaz}} e^{i\alpha} z \xrightarrow{\text{omotetie}} |a'|\,(e^{i\alpha} z)$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$$

$$z \xrightarrow{\text{omotetie}} |a'|\, z \longmapsto^{\text{rotaz}} e^{i\alpha}(|a'|\, z)$$

II) $c \neq 0 \qquad \mathbb{C} - \left\{\frac{d}{c}\right\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$

$$z \longmapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{è invertibile}$$

$$\frac{dz - b}{-cz + a} \longleftarrow\!\!| \; z$$

$\frac{az+b}{cz+d} = w \qquad az+b = w(cz+d) \qquad z(cw-a) = -dw+b$

$$z = \frac{dw-b}{-cw+a} \qquad \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

<u>Inversione</u> $\varphi: \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^* \qquad z \longmapsto \frac{1}{z} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

<u>Lemma</u> Ogni trasf. di Möbius si può vedere come la composizione di inversione e affinità

$$\begin{array}{l} \varphi: z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d} \\ z \;\big\downarrow\; \text{affinità} \\ cz+d \xrightarrow{\text{inversione}} \dfrac{1}{cz+d} \xrightarrow{\text{affinità}} \left(a' \dfrac{1}{cz+d} + b'\right) = \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

$a' = b - \frac{da}{c}$

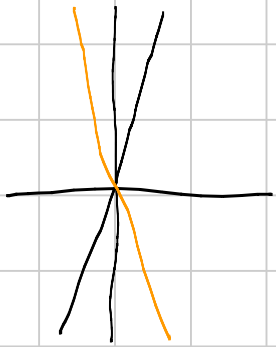
$b' = \frac{a}{c}$

Studio l'inversione. $\mathbb{C}^* \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^* \qquad z \longmapsto 1/z$

I) $\alpha \bar{z} + \bar{\alpha} z + C = 0$ retta r ... $\varphi(r) = ?$ $\qquad \alpha \frac{1}{\bar{z}} + \bar{\alpha}\frac{1}{z} + C = 0$

$ax+by+c=0 \qquad \alpha = a+ib \qquad C = 2c$

a) $C=0$ r passa per l'origine $\qquad \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} = 0$



$ax+by=0 \rightsquigarrow ax-by=0$

in particolare $x=0 \rightsquigarrow x=0$

$y=0 \rightsquigarrow y=0$

b) $C \neq 0$ r non passa per l'origine

$\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + C = 0 \qquad \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + C z\bar{z} = 0$

$z\bar{z} + \frac{\alpha}{C} z + \frac{\bar{\alpha}}{C}\bar{z} = 0$

$\Updownarrow$

circonferenza passante per l'origine

II) circonferenza $\rightsquigarrow$?

a) circonferenza passa per l'origine $\longrightarrow$ retta che non passa per 0

b) ... che non passa per l'origine $\longrightarrow$ circonf che non passa per l'origine.

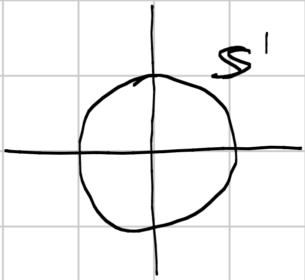
• $z\bar z + \alpha \bar z + \bar\alpha z + \underset{\neq 0}{C} = 0 \rightsquigarrow \frac{1}{z}\frac{1}{\bar z} + \frac{\alpha}{\bar z} + \bar\alpha \frac{1}{z} + C = 0$

$$\frac{1}{C} + \frac{\alpha z}{C} + \frac{\bar\alpha \bar z}{C} + \cancel{\frac{C}{C}}\, z\bar z = 0$$

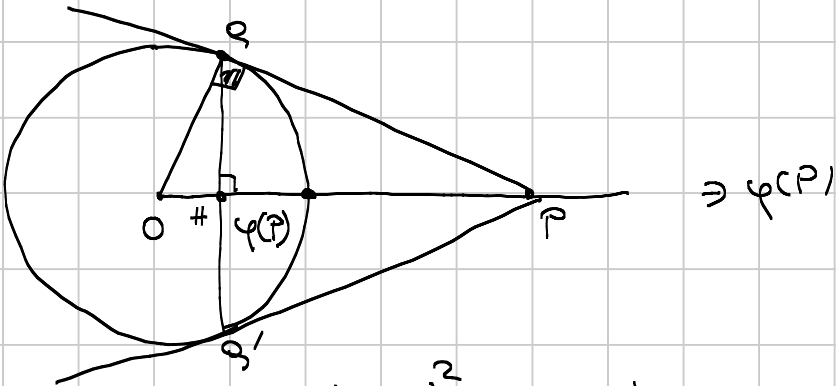
VIDEO

Inversione del cerchio

$$\mathbb{C}^* \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^* \qquad \underset{z}{\rho e^{i\theta}} \longmapsto \frac{1}{\bar z} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{\cancel{\rho}}{|z|^{\cancel{2}}} e^{i\theta} = \frac{1}{\rho} e^{i\theta}$$



se $z \in S^1$ $\varphi(z) = z$



$$\underset{1}{|OQ|^2} = |OH| \cdot |OP|$$

$$\underset{\rho}{|OP|} = \frac{1}{|OH|} = \frac{1}{\frac{1}{\rho}}$$

Manda rette per l'origine in rette per l'origine

..... non per l'origine in circonf .....

- - - -

- - - .

VIDEO

Esercizio (13. 9. 2021)

Scrivere in forma esponenziale/trigonom/cartesiana le radici dell' eq $(z-1)^3 = 8$

Determinare le eq. hermitiane delle 3 rette che passano per tali punti e della circonf che ~~contiene~~ passa per i 3 punti.

Determinare le circonf ottenute invertendo le 3 rette rispetto ad S^1. Rappresentare con un disegno.

$(z-1)^3 = 8 \qquad z-1 = w \qquad w^3 = 8$

$z = w+1$

$w^3 = 8 = 2^3 \cdot e^{i0}$ de Moivre $w_1 = 2 \cdot e^{i0/3} = 2$

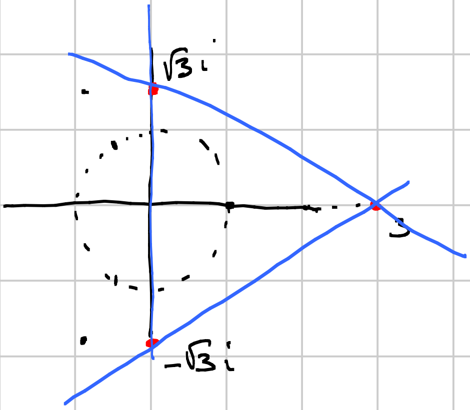
$w_2 = 2 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = -1+\sqrt{3}i$

$w_3 = 2 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = -1-\sqrt{3}i$

$z = w+1 \qquad z_1 = 3 = 3 \cdot 1 = 3 \cdot e^{i0}$

$z_2 = \sqrt{3}i = \sqrt{3}\, e^{\pi/2\, i}$

$z_3 = -\sqrt{3}i = \sqrt{3}\, e^{3/2\, \pi i}$



$\boxed{x=0}$

$y = mx + \sqrt{3} \qquad 0 = m \cdot 3 + \sqrt{3}$

$m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$

$\boxed{\sqrt{3}x + 3y - 3\sqrt{3} = 0} \rightsquigarrow x + \sqrt{3}y - 3 = 0$

$\boxed{\sqrt{3}x - 3y - 3\sqrt{3} = 0} \rightsquigarrow x - \sqrt{3}y - 3 = 0$

Applicazione. Asse

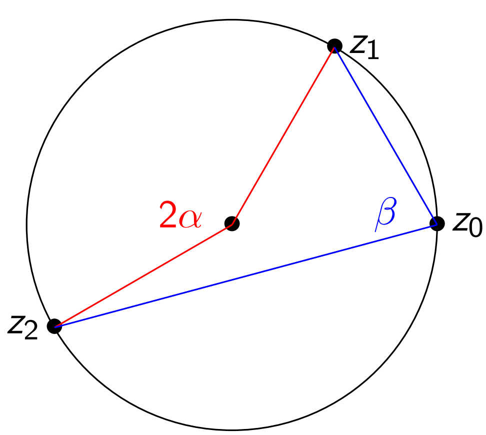
Siano $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$. Allora l'asse del segmento di estremi z_0, z_1 è dato da $|z - z_0| = |z - z_1|$, da cui l'equazione dell'asse:

$$z(\bar{z}_1 - \bar{z}_0) + \bar{z}(z_1 - z_0) + z_0\bar{z}_0 - z_1\bar{z}_1 = 0.$$

Se $|z_0| = 1 = |z_1|$ posso riscriverla nella forma

$$z = z_0 z_1 \bar{z}.$$

Applicazione. Angoli al centro



Posso assumere circonferenza unitaria e $z_0 = 1$.
Sia $z_2 = z_1 e^{2\alpha i}$. Allora

$$\begin{aligned} e^{2\beta i} &= \frac{(z_2 - 1)(\bar{z}_1 - 1)}{(\bar{z}_2 - 1)(z_1 - 1)} \\ &= \frac{z_2}{z_1}\frac{(z_2 - 1)(1 - z_1)}{(1 - z_2)(z_1 - 1)} \\ &= \frac{z_2}{z_1} \end{aligned}$$

$$z_2 = z_1 e^{2\beta i} \Rightarrow \alpha = \beta.$$