Geometria 1 - mod. A - Lezione 3

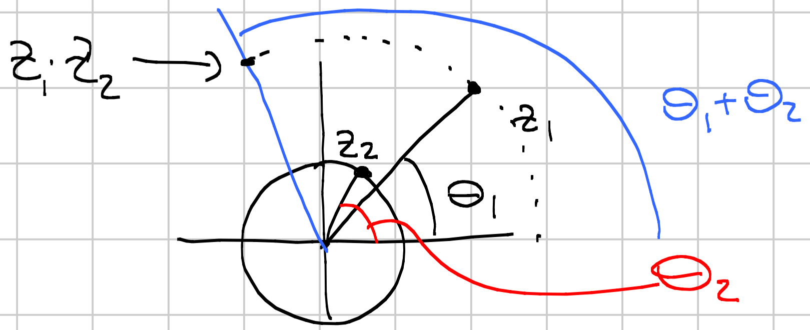
Note Title

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ → diversi da 0 $\qquad z_j = \rho_j(\cos\theta_j + i\sin\theta_j) \qquad j=1,2$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$$

Osservo che se $|z_2| = 1 = \rho_2$ ossia appartiene alla circonf unitaria

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \qquad \operatorname{Arg}(z_1\cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$



$z_1 \cdot z_2$ è quindi ottenuto ruotando z_1 di un angolo uguale a $\theta_2 = \operatorname{Arg} z_2$

Se $|z_2| = \rho_2 \neq 1, 0$ allora $z_1 \cdot z_2$ è ottenuto ruotando z_1 di angolo θ_2 e poi "modificando" il modulo in modo che sia $\rho_1 \cdot \rho_2$

formula di de Moivre

$$z^n = z_0 \iff \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|z_0|} \\ \vartheta = \frac{\vartheta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n} \qquad k = 0, \dots, n-1 \end{cases}$$

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad z_0 = \rho_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$

$n > 1$ intero positivo $\quad \boxed{z^n = z_0} \qquad z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

$$\begin{cases} \rho^n = \rho_0 \quad \rightsquigarrow \quad \rho = \sqrt[n]{\rho_0} \in \mathbb{R}_{>0} \\ \cancel{n}\theta = \underline{\theta_0 + 2k\pi}_{\,n} \qquad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\underbrace{\frac{\theta_0}{n},\ \frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi}{n},\ \frac{\theta_0}{n} + \frac{4\pi}{n},\ \dots,\ \frac{\theta_0}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}}_{\text{argomenti che danno tutte le radici.}},\ \boxed{\cancel{\frac{\theta_0}{n} + \frac{2\cancel{n}\pi}{\cancel{n}}}}$$

e così cominciano

a ripetersi i numeri complessi

$$\sqrt[n]{\rho_0}\left(\cos\frac{\theta_0}{n}+i\sin\frac{\theta_0}{n}\right)=\sqrt[n]{\rho_0}\left(\cos\left(\frac{\theta_0}{n}+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\theta_0}{n}+2\pi\right)\right)$$

Studiamo ora le radici di 1 $\qquad z_0=1$

$n=1 \qquad z=1$

$n=2 \qquad z^2=1 \qquad 1(\cos 0+i\sin 0), \quad z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\rho=\sqrt[2]{1}=1 \qquad \theta=\frac{0}{2},\ \frac{0}{2}+\frac{2\pi}{4},\ \cancel{\frac{0}{2}+\frac{4\pi}{4}}$

$\theta=0,\ \pi$

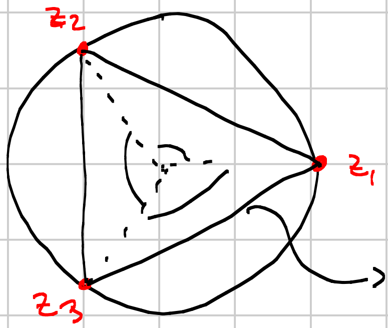
$z_1=\rho\cdot(\cos 0+i\sin 0)=1\cdot(1+i0)=1$

$z_2=\rho(\cos\pi+i\sin\pi)=1(-1+i0)=-1$

$n=3 \qquad z^3=1 \qquad 1(\cos 0+i\sin 0), \quad z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\rho=\sqrt[3]{1}=1 \qquad \theta=\frac{0}{3},\ \frac{0}{3}+\frac{2\pi}{3},\ \frac{0}{3}+\frac{4\pi}{3}$

$\theta=0,\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3}$

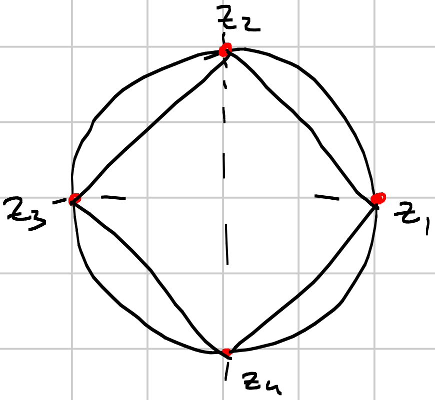


$z_1=1$, z_2 e z_3 sono complesso coniugate

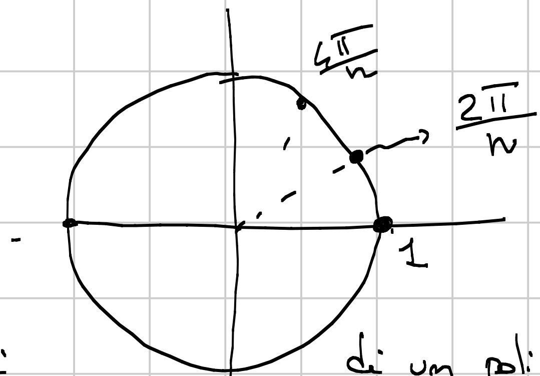
$x^3-1=0$

→ triangolo equilatero

Analogamente $\quad n=4 \qquad z^4=1 \qquad \theta=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}$



quadrato



e così via $\quad z^n=1$

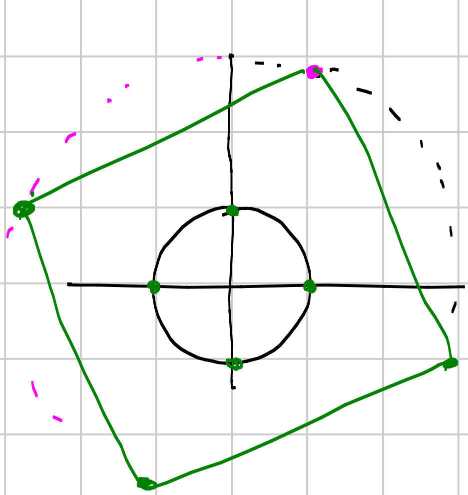
vanno a costruire i vertici di un polig regolare

E se sono interessato a $\underset{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)}{z^n} = \underset{\neq 0}{z_0} \sim \rho_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$

$\rho = \sqrt[n]{\rho_0}$

$$\theta = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}$$

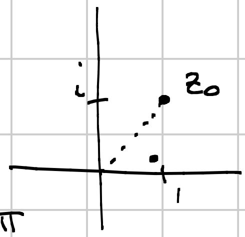
Per conoscere z radici n-esime di z_0, basta conoscerne una e poi moltiplicarla per le n radici n-esime di 1.



Di nuovo trovo un poligono regolare con un vertice nel punto ~~di~~ $\rho_1(\overbrace{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}^{cis\,\theta})$ radice n-sima di z_0 e gli altri ottenuti ruotando

$\boxed{\rho_1 e^{i\theta_1}}$

$1 + i = z_0 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$ "$\sqrt[4]{z_0}$"? $z^4 = z_0$



$|z| = \sqrt[4]{\sqrt{2}}$ $\theta_1 = \frac{\pi/4}{4} = \frac{\pi}{16}$, $\underbrace{\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}}_{\frac{9\pi}{16}}$, $\frac{\pi}{16} + \pi$, $\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2}$

Esercizi proposti:

1. Calcolare modulo e argomento di $\frac{(2-2i)^7}{(1+\sqrt{3}i)^4}$ (sugg.: usare rappres. esponenz.)
2. Determinare le radici dei polinomi: $x^2 + x + 1$; $x^2 + 2x + 3$
3. Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $z^2 - 3\bar{z} + 2 = 0$. Quante sono?

Di conseguenza, sappiamo calcolare le radici.
Per $z_0 \neq 0$ e $n \geq 1$, si ha

$$z^n = z_0$$

se, e solo se, $|z|^n = |z_0|$ e $n\vartheta = \vartheta_0 + 2k\pi$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$, ove $\vartheta = \operatorname{Arg} z$ e $\vartheta_0 = \operatorname{Arg} z_0$.

formula di de Moivre

$$z^n = z_0 \iff \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|z_0|} \\ \vartheta = \frac{\vartheta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n} \qquad k = 0, \dots, n-1 \end{cases}$$

Ci sono n radici n-esime distinte per ogni numero complesso diverso da 0, che formano i vertici di un n-gono regolare centrato nell'origine.

esponenziale complesso

Sia $z = x + iy$, con x e y reali, e poniamo

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Al variare di z in $\mathbb{C}$, $e^z \neq 0$, e si ha $e^{z+w} = e^z e^w$.
Per ogni numero complesso $z_0 \neq 0$, si ha

$$z_0 = |z_0|(\cos \vartheta_0 + i \sin \vartheta_0) = |z_0| e^{i\vartheta_0} = e^{\log |z_0|} e^{i\vartheta_0} = e^{\log |z_0| + i\vartheta_0},$$

ove ϑ_0 è l'argomento di z_0 e log indica il logaritmo naturale in base e.