modulo di un numero complesso

Il *modulo* (o valore assoluto) di un numero complesso, $z = a + bi$, è il numero reale (non negativo)

$$|z| = \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{(a-bi)(a+bi)} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

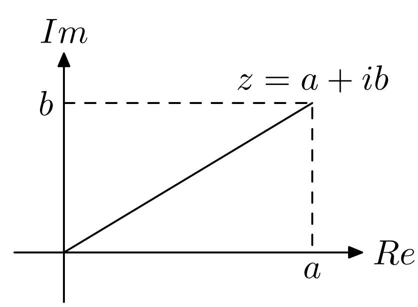
Il valore assoluto di $\mathbb{C}$ coincide col valore assoluto reale sul sottocampo $\mathbb{R}$. Per ogni $z \in \mathbb{C}$, $|\Re z| \leq |z|$ e $|\Im z| \leq |z|$.

proprietà del modulo

- $|z| = |\bar{z}|$ per ogni $z \in \mathbb{C}$;
- $|z| \geq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$; e $|z| = 0$ se, e solo se, $z = 0$;
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ per ogni coppia $z, w \in \mathbb{C}$;
- $|zw| = |z|\,|w|$ per ogni coppia $z, w \in \mathbb{C}$.

Piano di Argand-Gauss

Gli elementi di $\mathbb{C}$ sono i punti del piano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, con gli assi ortogonali.
Al numero complesso $z = a + bi$ si associa il punto di coordinate (a, b).
L'asse orizzontale, è l'*asse reale*.
L'asse verticale, è l'*asse immaginario*.



Essendo gli assi ortogonali, $|a + ib|$ è la distanza del punto (a, b) dall'origine nel piano cartesiano.

Definizione (distanza)

La distanza tra due numeri complessi, z e w, è uguale a $|z - w|$.

Sia r un numero reale positivo. Nel piano di Gauss l'insieme $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r \}$ rappresenta i punti interni alla circonferenza di centro z_0 e raggio r.

Sia $z \neq 0$ un numero complesso e consideriamo $\zeta = \frac{z}{|z|}$, con $|\zeta| = 1$. Esiste quindi un unico numero reale, $\vartheta \in [0, 2\pi)$, tale che $\zeta = \cos\vartheta + i \sin\vartheta$ e si ha

$$z = |z|(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \qquad \text{(rappresentazione trigonometrica).}$$

ϑ è l'angolo formato dalla semiretta per z uscente dall'origine e la semiretta positiva dell'asse orizzontale. ϑ è l'*argomento* del numero complesso $z \neq 0$ (ed è determinato da z a meno di multipli interi di 2π).

Se $z_1 = |z_1|(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)$ e $z_2 = |z_2|(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)$, sono numeri complessi non nulli, il loro prodotto è

$$z_1 z_2 = |z_1|(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)|z_2|(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2) = \\ |z_1 z_2|[\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)],$$

In particolare,

$$\begin{aligned} z_1 &= |z_1|(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1) \\ z_1^2 &= |z_1|^2(\cos 2\vartheta_1 + i\sin 2\vartheta_1) \\ z_1^3 &= |z_1|^3(\cos 3\vartheta_1 + i\sin 3\vartheta_1) \\ \ldots \\ z_1^n &= |z_1|^n(\cos n\vartheta_1 + i\sin n\vartheta_1) \end{aligned}$$

Geometria 1 - mod A - Lezione 2

Note Title

Vi è una corrispondenza biunivoca $\bar{\ }: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, detta *coniugio*, che associa a ogni numero complesso $z = a + bi$ il suo *coniugato* $\bar{z} = a - ib$.

Per ogni coppia di numeri complessi, z e w, valgono

proprietà del coniugio

- ✓ $\bar{\bar{z}} = z$;
- ✓ $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;
- ✓ $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$;
- ✓ $\bar{z} = z$ se, e solo se, $z \in \mathbb{R}$;
- ✓ $\Re z = \frac{z+\bar{z}}{2}$;
- ✓ $\Im z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

$z = a + ib \qquad w = c + id$

$$\overline{z \cdot w} = \overline{(ac - bd) + i(ad + bc)} = (ac - bd) - i(ad + bc)$$

$$\bar{z} \cdot \bar{w} = \overline{(a + ib)} \cdot \overline{(c + id)} = (a - ib)(c - id)$$
$$= (ac - bd) + i(-ad - bc)$$
$$= (ac - bd) - i(ad + bc)$$

$=$

- $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$

$z = a + ib \qquad \bar{z} = a - ib$

$$z = \bar{z} \iff a + ib = a - ib$$
$$\iff a + ib = a + i(-b)$$
$$\iff \begin{cases} a = a \\ b = -b \end{cases} \iff b = 0$$
$$\iff z \in \mathbb{R}$$

- $z = a + ib \quad , \quad \bar{z} = a - ib$

$z+\bar z = 2a + \cancel{ib} - \cancel{ib}$

$\underset{\Re z}{a} = \dfrac{z+\bar z}{2}$

$z-\bar z = \cancel{a} + ib - \cancel{a} + ib = 2ib$

$\underset{\Im z}{b} = \dfrac{z-\bar z}{2i}$

$\square$

<u>Oss</u> $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$ ← insieme dei polinomi a coeff. reali nell'indeterm. x

$3 - 7x + \frac{5}{2}x^2 - \pi x^3$

Suppongo che $\underset{\in \mathbb{C}}{\alpha}$ sia uno <u>zero</u> di $p(x)$. Allora $\bar\alpha$ è zero di $p(x)$
radice

$\underset{\in \mathbb{C}}{0} = p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\bar 0 &= \overline{a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n}\\ &= \bar a_0 + \overline{a_1\alpha} + \dots + \overline{a_n\alpha^n}\\ &= \bar a_0 + \bar a_1\bar\alpha + \dots + \bar a_n(\bar\alpha)^n\end{aligned}$$

$a_i \in \mathbb{R}$ $\quad \bar a_i = a_i$

$\bar 0 = 0$

$0 = a_0 + a_1\bar\alpha + \dots + a_n(\bar\alpha)^n = p(\bar\alpha)$

Dunque anche $\bar\alpha$ è zero del polin $p(x)$. $\lrcorner$

modulo di un numero complesso

Il *modulo* (o valore assoluto) di un numero complesso, $z = a + bi$, è il numero reale (non negativo)

$$|z| = \sqrt{\bar z z} = \sqrt{(a-bi)(a+bi)} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Il valore assoluto di $\mathbb{C}$ coincide col valore assoluto reale sul sottocampo $\mathbb{R}$. Per ogni $z \in \mathbb{C}$, $|\Re z| \le |z|$ e $|\Im z| \le |z|$.

proprietà del modulo

- $|z| \ge 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$; e $|z| = 0$ se, e solo se, $z = 0$;
- $|z + w| \le |z| + |w|$ per ogni coppia $z, w \in \mathbb{C}$;
- $|zw| = |z|\,|w|$ per ogni coppia $z, w \in \mathbb{C}$.

$|z|^2 = \bar z \cdot z = z \cdot \bar z$

$z = 3-4i \qquad |z| = \sqrt{9+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

NB $\quad 3<5 \quad 4<5$

$\frac{1}{3-4i} = \frac{3+4i}{25} \qquad \boxed{\frac{1}{z} = \cancel{\frac{\bar z}{z\cdot\bar z}} = \frac{\bar z}{|z|^2}}$

- $z = a+ib \qquad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\Re z = a \qquad a \overset{?}{\leq} |z| \qquad a \overset{?}{\leq} \sqrt{a^2+b^2}$ $\quad a<0$ ok; $\quad a\geq 0 \quad a^2 \overset{?}{\leq} a^2+b^2$ sì

e vale $=$ $\iff$ $b=0$ e $a\geq 0$

Analogo $\Im z \leq |z|$

- $|z| = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2} \geq 0$ vale 0 $\iff a^2+b^2=0$
$\iff a=b=0$
$\iff z=0$

- $|z\cdot w|^2 = |z|^2|w|^2 \qquad z=a+ib \qquad w=c+id$

$zw = (ac-bd)+i(ad+bc)$

$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2 \overset{?}{=} (a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$a^2c^2+b^2d^2 \cancel{-2abcd} + a^2d^2+b^2c^2 \cancel{+2abcd} \overset{?}{=} a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$
sì

- $0\leq |z+w| \leq |z|+|w| \qquad z=a+ib, \quad w=c+id$

$(z+w) = (a+c)+i(b+d)$

$|z+w|^2 \overset{?}{\leq} (|z|+|w|)^2 = |z|^2 + 2|z|\overset{|\bar w|}{|w|} + |w|^2$

$(z+w)\overline{(z+w)} \overset{?}{\leq} z\cdot\bar z + 2|z||\bar w| + w\cdot\bar w$

uso la 4ª $|z\bar w| = |z||\bar w|$ avendo dim ~~dip.~~

$$(z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\bar z+\bar w) = z\bar z + z\bar w + w\bar z + w\bar w$$

è vero che $\overset{?}{\le} z\bar z + 2|\underbrace{z\bar w}_{u}| + w\cdot\bar w$

$$\underbrace{z\bar w + w\bar z}_{=\ \underbrace{z\bar w}_{u} + \underbrace{\bar z w}_{\bar u}} \le 2|z\bar w|$$

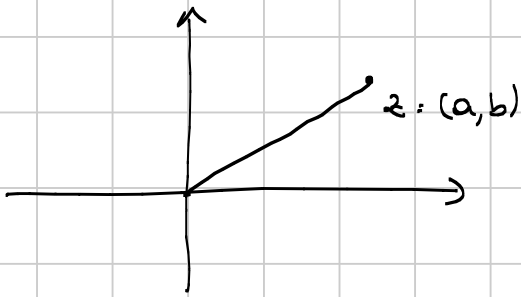
$$\underbrace{\frac{u+\bar u}{2}}_{\operatorname{Re} u} \overset{?}{\le} \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}|u|$$ sì

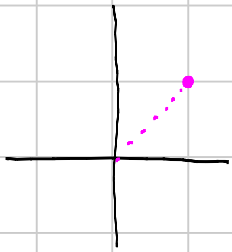
$z = a+ib$

$|z-0| = |z|$

$z = 1+i$

$|z| = \sqrt{2}$

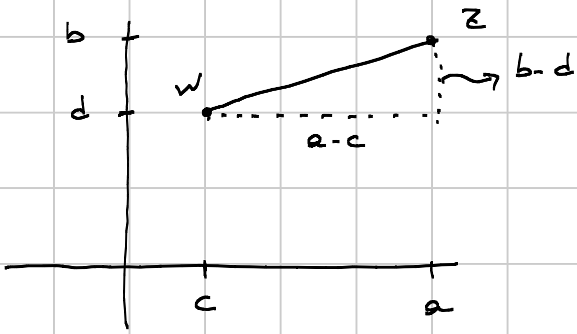




Osservo: se $|z| = r > 0$ allora il punto del piano AG (corrispondente) a z cade sulla circonf. di centro O e raggio r.

$z = a+ib$

$w = c+id$



$z-w = (a-c)+i(b-d)$

$|z-w| = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$ = lunghezza segmento wz

$= d(z,w)$ da definire

↑ distanza

Osservo: Dato $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ $\qquad \left|\frac{z}{|z|}\right| = 1$

Se divido z per il suo valore assoluto ottengo un numero di valore assoluto 1 ("normalizzo")

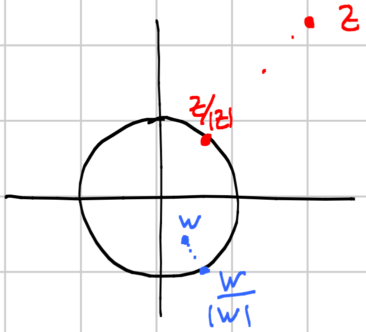
$z = 3-2i \qquad |3-2i| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$$\xi = \frac{z}{|z|} = \frac{3-2i}{\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} - \frac{2}{\sqrt{13}}i$$

$$|\xi| = \left|\frac{z}{|z|}\right| = \sqrt{\frac{9}{13}+\frac{4}{13}} = \sqrt{\frac{13}{13}} = 1$$

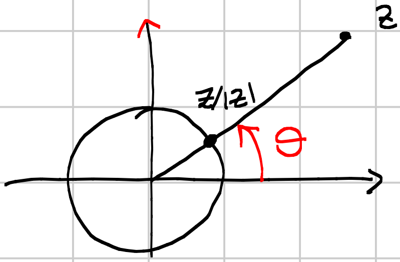
In alternativa: $\left|\frac{z}{|z|}\right| = \left|z \cdot \frac{1}{|z|}\right| = |z| \cdot \left|\underbrace{\frac{1}{|z|}}_{\in \mathbb{R}_{>0}}\right| = |z| \cdot \frac{1}{|z|} = 1$

modulo che coincide col valore assoluto per i numeri reali



Rappresentazione trigonometrica di $z = \overbrace{a+ib}^{\text{rappres. algebrica}} \neq 0$

$\hookrightarrow \rho = |z| > 0 \qquad \boxed{\theta =: \operatorname{Arg} z}$



$$\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\boxed{z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)}$$ rappresentazione trigonometrica

<u>Oss</u> $\quad z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad z' = \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$$z \cdot z' = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

$$\overset{!}{=} \rho\rho' \cdot [\underbrace{\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'}_{\cos(\theta+\theta')} + i(\underbrace{\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'}_{\sin(\theta+\theta')})]$$

$$|z \cdot z'| = \underset{\rho}{\underset{\parallel}{|z|}}\,\underset{\rho'}{\underset{\parallel}{|z'|}} \qquad \operatorname{Arg}(z \cdot z') = \underset{\theta}{\underset{\parallel}{\operatorname{Arg}(z)}} + \underset{\theta'}{\underset{\parallel}{\operatorname{Arg}(z')}}$$

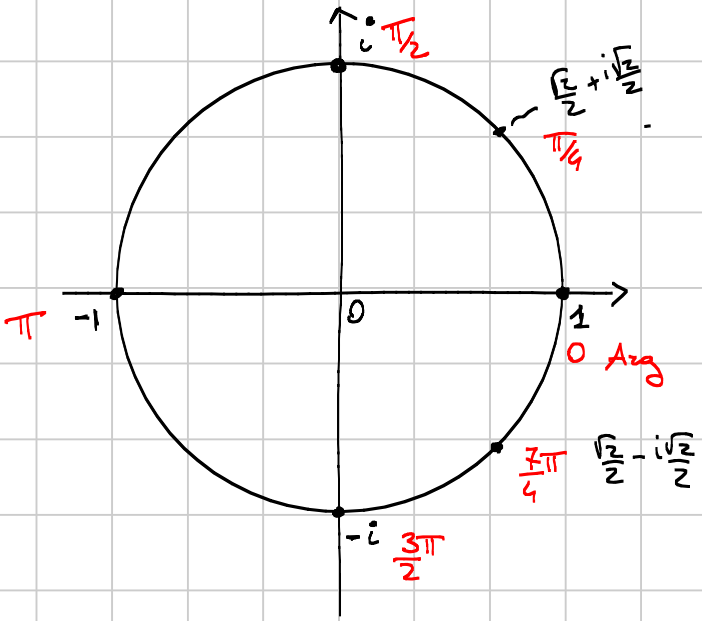
NB Se $\theta = \mathrm{Arg}\, z \qquad 0 \le \theta < 2\pi$

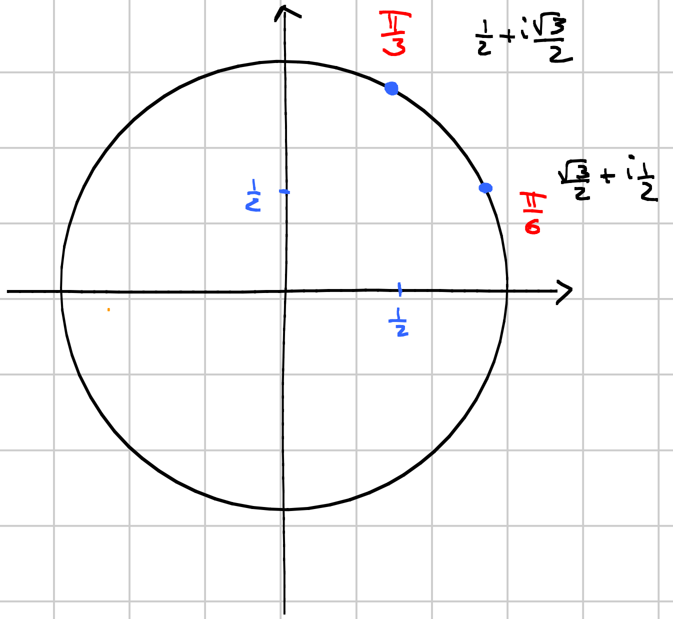
$\uparrow$ argomento principale

Per i calcoli può essere utile considerare anche $\theta + 2k\pi$

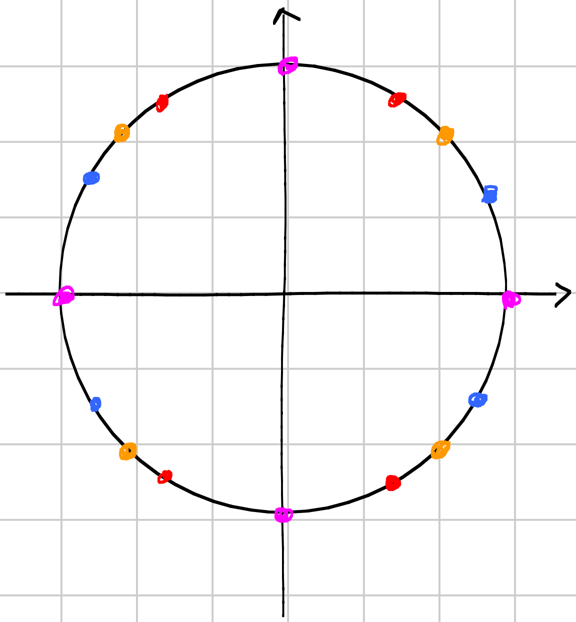
Ad es se $z = 5\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right)$ $\quad z' = 7\left(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi\right)$

$z z' = 35\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = 35i$ $\qquad \frac{2}{3}\pi + \frac{11}{6}\pi = \frac{15}{6}\pi \equiv \frac{\pi}{2}$





NB Nel piano di AG z e $\bar{z}$ sono simmetrici rispetto l'asse delle x



Segna rappresentazione algebrica e trigonometrica dei numeri complessi in figura!