Numeri complessi

(Rielaborazione di note di M. Candilera)

Alessandra Bertapelle

a.a. 2022-2023

Il apparut que, entre deux vérités du domaine réel, le chemin le plus-facile et le plus court passe bien souvent par le domaine complexe.
(Paul Painlevé, *Analyse des travaux scientifiques* 1900)

Introduzione

- I numeri complessi hanno fatto le prime comparse nei lavori dei matematici rinascimentali, come *radici immaginarie* di equazioni algebriche.
- L'introduzione e l'uso sistematico dei numeri complessi viene messo in relazione con la dimostrazione di Gauss del *Teorema fondamentale dell'Algebra* (1799) e la loro rappresentazione geometrica (piano di Argand-Gauss).
- A partire dal XIX secolo, i numeri complessi compaiono sistematicamente nelle applicazioni della Matematica alla Fisica e diventano uno strumento per la risoluzione di problemi matematici ed un ambiente più *naturale* dei numeri reali per lo studio di problemi geometrici (Hilbert's Nullstellensatz).

Numeri Naturali

Consideriamo come noti i numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ e passiamo in rassegna le loro proprietà.

Definizione (. . . o quasi): somma

Il numero naturale $m + n$ è l'n-esimo successore di m, ovvero $m + n = (((m + 1) + 1) + \cdots) + 1$ (n addendi uguali ad 1).

Definizione (. . . o quasi): prodotto

Il numero naturale mn si ottiene iterando n volte la somma di m con se stesso; ovvero $mn = (((m + m) + m) + \cdots) + m$ (n addendi uguali ad m).

Le operazioni di somma e prodotto sono due funzioni

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

che godono delle seguenti proprietà; per ogni x, y, z in $\mathbb{N}$, si ha

somma

- (associativa) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- (commutativa) $x + y = y + x$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x + 0 = x = 0 + x$.

prodotto

- (associativa) $(xy)z = x(yz)$;
- (commutativa) $xy = yx$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x1 = x = 1x$.

Inoltre (distributiva) $(x + y)z = xz + yz$

Numeri Interi

Diamo per noti i numeri interi $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ con le operazioni $+$ e $\cdot$. Per ogni x, y, z in $\mathbb{Z}$, valgono

somma

- (associativa) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- (commutativa) $x + y = y + x$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x + 0 = x = 0 + x$.
- (esistenza dell'opposto) dato x, esiste $-x$ tale che $x + (-x) = 0 = (-x) + x$.

prodotto

- (associativa) $(xy)z = x(yz)$;
- (commutativa) $xy = yx$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x1 = x = 1x$.

Inoltre

(distributiva) $(x+y)z = xz+yz$

Numeri Razionali

Diamo per noto l'insieme dei *numeri razionali* $\mathbb{Q}$.

Un suo elemento si rappresenta con una *frazione* $\frac{a}{b}$ (con a, b in $\mathbb{Z}$ e $b \neq 0$) e due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$ rappresentano lo stesso numero razionale se $ab' = a'b$ in $\mathbb{Z}$.

Il numero intero n si identifica con la frazione $\frac{n}{1}$ e in questo modo $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Le operazioni di somma e prodotto in $\mathbb{Q}$ sono definite da

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \overset{def}{=} \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b}\frac{c}{d} \overset{def}{=} \frac{ac}{bd},$$

e non dipendono dalla scelta dei rappresentanti.

Le operazioni di somma e prodotto godono delle seguenti proprietà; per ogni x, y, z in $\mathbb{Q}$, si ha

somma

- (associativa) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- (commutativa) $x + y = y + x$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x + 0 = x = 0 + x$.
- (esistenza dell'opposto) dato x, esiste $-x$ tale che $x + (-x) = 0 = (-x) + x$.

prodotto

- (associativa) $(xy)z = x(yz)$;
- (commutativa) $xy = yx$;
- (esistenza dell'elemento neutro) $x1 = x = 1x$.
- (esistenza dell'inverso) dato $x \neq 0$, esiste x^{-1} tale che $x\,x^{-1} = 1 = x^{-1}x$.

(distributiva) $(x + y)z = xz + yz$.

Un insieme dotato di due operazioni con le proprietà scritte sopra si dice un *campo* [o *corpo commutativo*].

Numeri Reali

È noto che il rapporto tra lunghezze non fornisce sempre un numero razionale.

Ad esempio, il rapporto tra la lunghezza della diagonale e quella del lato di un quadrato vale $\sqrt{2}$.

O ancora, il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e quella di un suo raggio vale 2π.

Per questo viene introdotto il campo $\mathbb{R}$ dei *numeri reali*. Lo diamo per noto in quanto verrà studiato in Analisi.

Introduzione
Sistemi numerici
Numeri Complessi
Numeri naturali
Numeri interi
Numeri razionali
Numeri reali

Nei numeri reali possiamo trovare le radici *n*-esime di tutti i numeri positivi, ma non possiamo trovare soluzioni a tutte le equazioni algebriche.

Ad esempio, non ci può essere soluzione all'equazione $X^2 + 1 = 0$. Se ci fosse un tale numero, -1 sarebbe un quadrato, ma in $\mathbb{R}$ tutti i quadrati sono positivi o 0.

Mostreremo ora dove sia possibile trovare radici a tutti i polinomi a coefficienti reali costruendo il campo dei numeri complessi a partire da $\mathbb{R}$.

Alessandra Bertapelle Numeri complessi

Numeri Complessi

numeri complessi

Il campo $\mathbb{C}$ dei *numeri complessi* è l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con le operazioni di somma e prodotto definite da

$$(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d) \quad \text{e} \quad (a, b)(c, d) = (ac-bd, ad+bc)$$

qualunque siano (a, b) e (c, d) in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

La somma e il prodotto in $\mathbb{C}$ godono delle proprietà associativa, commutativa e distributiva.
Esiste un elemento neutro per la somma, $0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$
Esiste un elemento neutro rispetto al prodotto, $1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$.
Dato $(a, b) \in \mathbb{C}$, il suo opposto è $-(a, b) = (-a, -b)$.
Se $(a, b) \neq (0, 0)$, l'inverso è $(a, b)^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$.

Identifichiamo $\mathbb{R}$ con il sottoinsieme (sottocampo) di $\mathbb{C}$ formato dalle coppie $(x, 0)$, al variare di $x \in \mathbb{R}$ e scriveremo x in luogo di $(x, 0)$.

Sia $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$ e osserviamo che $i^2 = (-1, 0) = -1$. Ogni elemento (a, b) di $\mathbb{C}$ si scrive come

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi \qquad (\textit{rappresentazione algebrica}).$$

- Il numero complesso i è detto l'*unità immaginaria*.
- I numeri reali a e b sono detti, rispettivamente, la *parte reale* e la *parte immaginaria* del numero complesso $z = a + bi$. In simboli, $a = \Re(z)$ e $b = \Im(z)$.

Vi è una corrispondenza biunivoca $\bar{\ }: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, detta *coniugio*, che associa a ogni numero complesso $z = a + bi$ il suo *coniugato* $\bar{z} = a - ib$.

Per ogni coppia di numeri complessi, z e w, valgono

proprietà del coniugio

- $\bar{\bar{z}} = z$;
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;
- $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$;
- $\bar{z} = z$ se, e solo se, $z \in \mathbb{R}$;
- $\Re z = \frac{z+\bar{z}}{2}$;
- $\Im z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

Geometria 1 - mod A - Lezione 1

Note Title

Il campo **C** dei numeri complessi è l'insieme **R** × **R** con le operazioni di somma e prodotto definite da

(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d)

(a, b)(c, d) = (ac −bd, ad +bc)

qualunque siano (a, b) e (c, d) in **R** × **R** .

La somma e il prodotto in **C** godono delle proprietà associativa, commutativa e distributiva.

Esiste un elemento neutro per la somma, (0, 0)

Esiste un elemento neutro rispetto al prodotto, (1, 0).

Dato (a, b) ∈ C, il suo opposto è −(a, b) = (−a, −b).

Se (a, b) ≠ (0, 0), il suo inverso è ... $\left(\underset{c}{\frac{a}{a^2+b^2}}, \underset{d}{\frac{-b}{a^2+b^2}}\right)$ NB $a^2+b^2 \neq 0$, ≥ 0

$$(a, b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{b(-b)}{a^2+b^2}, -\frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{ba}{a^2+b^2}\right) \quad ba = ab$$

$$= \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{0}{a^2+b^2}\right) = (1, 0)$$

$\mathbb{R}$ $\quad i = \sqrt{-1}$ → unità immaginaria

Cerco $\mathbb{C}$ campo che contenga $\mathbb{R}$ e i

Allora $b, a \in \mathbb{R}$ devono essere elementi di $\mathbb{C}$

i deve " elemento di $\mathbb{C}$

bi deve essere elemento di $\mathbb{C}$

$a+bi$ - - - - - - - - - - $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \underbrace{\{\overset{\text{scrittura}}{a+ib},\ a, b \underset{\text{appartiene}}{\in} \mathbb{R}\}}_{\text{insieme}} \xleftrightarrow{\text{biiezione}} \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

$$a+ib \longmapsto (a, b)$$

$$(a+ib) \underset{\oplus}{+} (c+id) \underset{\text{associativa}}{=} a+ib+c+id \underset{\text{commutativa}}{=} a+c+ib+id = (a+c)+i(b+d)$$

$$\boxed{(a+ib)+(c+id) := (a+c)+i(b+d)} \quad (*)$$

• $(a+ib)(c+id) = ac + aid + ibc + (ib)(id) = ac + iad + ibc + i^2 bd$ $\quad (i^2 = -1)$

(**)

$= ac - bd + i(ad+bc)$ (= "lo stesso")

D'ora in poi: $\mathbb{C} = \{a+ib,\ a,b \in \mathbb{R}\}$ con $+$ e $\cdot$

definite come in (*) e (**)

Sia $z = a+ib \in \mathbb{C}$ $\qquad i$ è l'unità immaginaria e $i^2=-1$

$\Re z := a$ parte reale

$\Im z := b$ parte immaginaria

Se $\Re z = 0$ il numero z è detto puramente immaginario.

Esempi $z = \underbrace{3-2i}$, $\quad 5+3i = z'$; $\Re z' = 5$ $\qquad \Im z' = 3$

$3+(-2)i$ $\qquad \Re z = 3$, $\Im z = -2$

$a \quad b$

1 che non si scrive.

• $z + z' = (3-2i) + (5+3i) = 8 + i$

• $-z = -3+2i$; $-z' = -5-3i$ $\qquad 0_{\mathbb{C}} = 0 + i0 = 0$

• $(3-2i)^{-1} = \dfrac{1}{3-2i} = c + di \qquad c = \dfrac{3}{13} \qquad d = \dfrac{2}{13}$

$= \dfrac{3+2i}{(3-2i)(3+2i)} = \dfrac{3+2i}{9 - \underbrace{(+2i)^2}_{4i^2}} = \dfrac{3+2i}{9+4} = \dfrac{3+2i}{13}$

$= \dfrac{3}{13} + \dfrac{2}{13} i$

$z = a+ib \qquad \bar{z} \overset{\text{def}}{:=} a - ib \qquad \Re z = \Re \bar{z} \qquad \Im z = -\Im \bar{z}$

$w = c+id \qquad \bar{w} := c - id$

• $\overline{(\bar{z})} = z \qquad \overline{\left(\overline{(a+ib)}\right)} = \overline{(a \underbrace{-ib}_{i(-b)})} = a+ib$

• $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

$\overline{z+w} = \overline{(a+ib)+(c+id)} = \overline{(a+c)+i(b+d)} = (a+c)+i(-b-d)$

$\bar{z} + \bar{w} = \overline{a+ib} + \overline{(c+id)} = a - ib + c - id = a + c - i(b+d)$