RICERCA OPERATIVA

Esercizi da temi d'esame

	COGNOME:	____________________________	*Questo foglio deve*
Scrivere subito!	NOME:	____________________________	*va consegnato con*
	MATRICOLA:	_______________________	*l'elaborato*

- Un mulino produce due tipi di semola normale e integrale a partire da tre tipi di granaglie: A, B e C. Per produrre un quintale di semola normale, sono necessari 0.5 quintali di granaglia A, 0.4 di granaglia B e 0.3 di granaglia C; per un quintale di semola integrale, sono necessari 0.3 quintali di granaglia A, 0.7 di B e 0.4 di C. Il mulino si serve da tre fornitori. Ciascun fornitore mette a disposizione un lotto di acquisto, le cui caratteristiche sono riportate nella seguente tabella:

Lotto	**Granaglia A**	**Granaglia B**	**Granaglia C**	**Costo**	**% impurità**
1	3 q	5 q	8 q	100 €	1.0 %
2	4 q	9 q	3 q	140 €	2.0 %
3	7 q	2 q	2 q	120 €	1.5 %

Il mulino dispone di 10 000 € per approvvigionarsi di granaglie e vuole massimizzare il numero di quintali di semola prodotta complessivamente, considerando che:
- si possono acquistare al massimo 5 unità di lotto 3;
- la semola normale deve essere almeno il doppio della semola integrale e non più del quadruplo;
- le granaglie del lotto 1 e del lotto 2 sono incompatibili e pertanto non possono essere contemporaneamente acquistate;
- l'impurità media delle scorte di granaglia di tipo A deve essere inferiore allo 1.6%.

- (*1) Una società di navigazione effettua un servizio di trasporto merci su tre rotte 1, 2 e 3 dove la domanda è rispettivamente di 20000, 5000 e 15000 tonnellate. La società usa per questo servizio tre tipi di nave (A, B e C) e dispone di 100 navi di tipo A, 80 navi di tipo B e 150 navi di tipo C. Ciascuna nave ha capacità e costo di trasporto unitario che dipendono dal tipo e dalla rotta, come riassunto nella seguente tabella:

TIPO NAVE	*ROTTA*	*Capacità massima*	*Costo €/tonnellata*
A	1	150	60
A	2	120	30
A	3	non impiegabile	
B	1	100	45
B	2	80	25
B	3	90	30
C	1	non impiegabile	
C	2	60	50
C	3	140	35

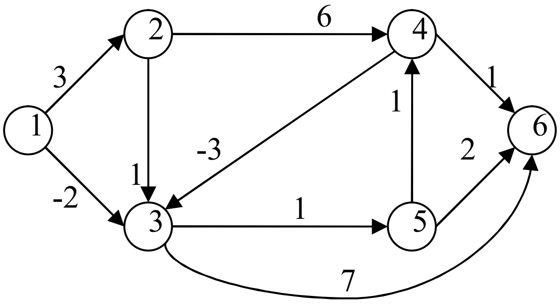
Si scriva il modello di programmazione lineare per determinare il piano di trasporto che soddisfa la domanda sulle tre rotte minimizzando i costi complessivi, tenendo conto che:
– sulla rotta 1 ci possono essere al massimo 10 navi di tipo A;

– sulla rotta 2 può effettuare servizio un solo tipo di nave;
– se le navi di tipo B sono utilizzate sulla rotta 2, allora queste non possono essere utilizzate né sulla rotta 1, né sulla rotta 3.

- (*2) Si risolva il seguente problema di programmazione lineare con il metodo del simplesso, a partire dalla base relativa alle variabili x_1, x_2, x_3 e applicando la regola di Bland:

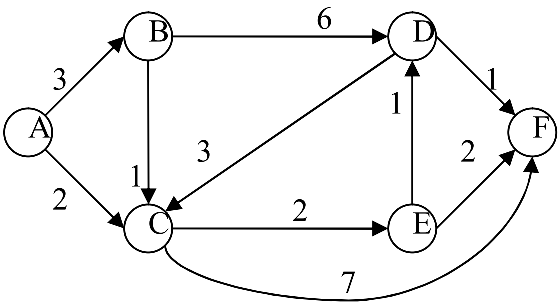
$$
\begin{array}{llllll}
\max & x_1 & +\,5\,x_2 & & & \\
\text{s.t.} & x_1 & & & \le & 5 \\
& x_1 & + & x_2 & \ge & -1 \\
& & & x_2 + 2\,x_3 & = & -2 \\
\end{array}
$$
$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \le 0 \quad x_3 \ge 0$$

- Si consideri il seguente grafo:



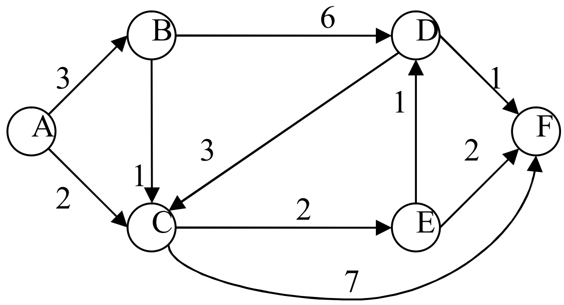
a. si scelga un algoritmo per determinare i cammini minimi dal nodo 1 verso tutti gli altri nodi e si motivi la scelta;
b. si applichi l’algoritmo scelto (riportare e **giustificare** i passi dell’algoritmo in una tabella);
c. L’algoritmo ha individuato un ciclo negativo? Giustificare la risposta.
d. Riportare l’albero e il grafo dei cammini minimi, oppure il ciclo negativo (in ogni caso, si descriva il procedimento utilizzato).

- Si consideri il seguente grafo:



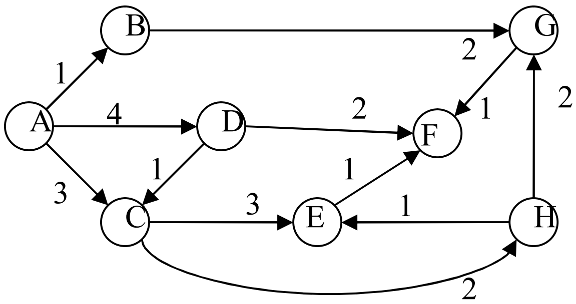
a. si scelga il miglior algoritmo tra quelli presentati per determinare i cammini minimi dal nodo A verso tutti gli altri nodi e si motivi la scelta;
b. si applichi l’algoritmo scelto (riportare e **giustificare** i passi dell’algoritmo in una tabella);
c. si disegni l’albero e il grafo dei cammini minimi, descrivendo il procedimento usato.

- Si consideri il seguente grafo:



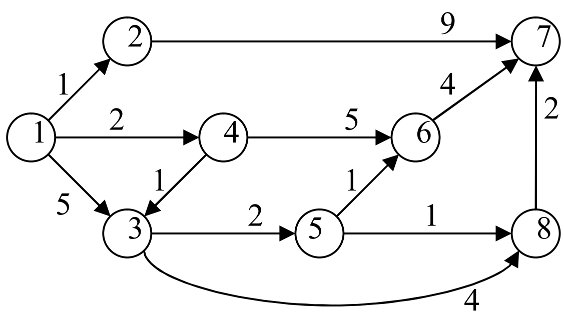
a. si scelga il miglior algoritmo tra quelli presentati per determinare i cammini minimi CON MASSIMO 4 ARCHI dal nodo A verso tutti gli altri nodi e <u>si motivi la scelta</u>;
b. si applichi l'algoritmo scelto (<u>riportare e **giustificare** i passi dell'algoritmo in una tabella</u>);
c. si ricavi un cammino con al più 4 archi da A verso E e un cammino minimo con al più 3 archida A a F: DESCRIVERE IL PROCEDIMENTO.
d. è possibile, ricavare direttamente dalla tabella ottenuta albero e/o grafo dei cammini minimi? Giustificare la risposta.

- Si consideri il seguente grafo:



a. si scelga un algoritmo appropriato e si motivi la scelta;
b. si calcolino i cammini minimi dal nodo A verso tutti gli altri nodi (i passi dell'algoritmo vanno riportati in una tabella e giustificati);
c. si disegni l'albero e il grafo dei cammini minimi, descrivendo il procedimento usato.

- (*3) Si vogliono determinare i cammini minimi composti da al più 4 archi sul seguente grafo:



- si scelga un algoritmo appropriato e si motivi la scelta;
- si calcolino i cammini minimi con al più quattro archi dal nodo 1 verso tutti gli altri nodi (<u>i passi dell'algoritmo vanno riportati in una tabella e giustificati</u>);
- si ricavi un cammino minimo di al più quattro archi da 1 a 7, descrivendo il procedimento adottato.

- Enunciare le condizioni di complementarietà primale-duale in generale. Applicare tali condizioni per dimostrare che (x1 , x2 , x3) = (1 , 4 , 0) è soluzione ottima del seguente problema:

$$\begin{array}{llcl}
\max & x_2 + x_3 & & \\
\text{s.t.} & -x_1 - x_2 + 2x_3 & \leq & 1 \\
& -2x_1 + x_2 & \leq & 2 \\
& 2x_2 & \geq & -3 \\
& 2x_1 + x_3 & = & 2 \\
& x_1 \text{ libera} \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \leq 0 & &
\end{array}$$

- Enunciare le condizioni di complementarietà primale-duale e applicarle per dimostrare che (x1,x2,x3) = (3/2 , 9/4 ,0) è soluzione ottima del seguente problema:

$$\begin{array}{llcl}
\min & -2x_1 + x_2 - x_3 & & \\
\text{s.t.} & -2x_1 - x_2 + x_3 & \leq & 2 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 6 \\
& -2x_1 & \geq & -3 \\
& x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \leq 0 & &
\end{array}$$

- (*4) Enunciare le condizioni di complementarietà primale-duale e applicarle per dimostrare che $(x_1,x_2,x_3) = (0,4,8)$ è soluzione ottima del seguente problema:

$$\begin{array}{llcl}
\max & x_1 + x_2 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 4 \\
& x_1 + x_2 & \leq & 4 \\
& x_1 \leq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 & &
\end{array}$$

- A) enunciare le condizioni di complementarietà primale-duale in generale e B) applicare tali condizioni per dimostrare che(x_1 , x_2 , x_3) = (1 , 0 , – 2) è soluzione ottima del seguente problema:

$$\begin{array}{llcl}
\max & 3x_1 - x_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 & \geq & 1 \\
& 2x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 0 \\
& 2x_1 - x_2 - x_3 & = & 4 \\
& 2x_1 - x_3 & \geq & -1 \\
& x_1 \geq 0 \quad x_2 \text{ libera} \quad x_3 \leq 0 & &
\end{array}$$

- Come si riconoscono sul tableau del simplesso le condizioni di illimitatezza per un problema di minimo? Giustificare la risposta.

- Si enunci e si giustifichi la regola adottata dal metodo del simplesso per la selezione della variabile uscente nelle operazioni di cambio base.

- Si discuta la complessità computazionale dell'algoritmo di Bellman-Ford.

- (*5) Si discuta la complessità computazionale dell'algoritmo di Dijkstra per il problema del cammino minimo.

- Si discuta la complessità computazionale dell'algoritmo del simplesso.

- Si consideri il seguente tableau del simplesso:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$-z$	0	1/2	0	1	0	9
x_3	0	1/2	1	2	0	0
x_5	0	0	0	-1	1	2
x_1	1	-1/2	0	1	0	1

Indicare, senza svolgere operazioni di pivot, 3 basi ottime (nei termini delle variabili che le compongono) del corrispondente problema di programmazione lineare.

- Si consideri il seguente tableau del simplesso:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$-z$	0	-1/3	0	-1	0	9
x_3	0	1/13	1	2	0	0
x_5	0	0	0	-1	1	4/3
x_1	1	1/17	0	1	0	0

Rispondere alle seguenti domande, GIUSTIFICARE TUTTE LE RISPOSTE:
(a) Si può individuare una soluzione di base? Quale? È ottima?
(b) Quali sono i possibili cambi base?
(c) Quale sarà il cambio base usando la regola di Bland e ordinando le variabili secondo le colonne?
(d) Stabilire, SENZA EFFETTUARE LE OPERAZIONI DI PIVOT, quale sarà il valore della funzione obiettivo alla fine della prossima iterazione del simplesso usando la reola di Bland?
(e) Alla fine della prossima iterazione sarà cambiata la base corrente: sarà cambiato anche il vertice del poliedro associato alla nuova base?

- Enunciare e giustificare le condizioni di ottimalità nel metodo del simplesso.

- (*6) Si consideri il seguente tableau del simplesso:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$-z$	-12	0	0	0	-147	-239
x_3	75	0	1	0	-12	0
x_4	46	0	0	1	1	4/3
x_2	13	1	0	0	0	0

Riportare il tableau sul foglio e rispondere (<u>NON su questo foglio</u>) alle seguenti domande:
(a) Cerchiare i possibili elementi pivot e dire su quale elemento si farà pivot alla prossima iterazione del simplesso usando la regola di Bland?
(b) Stabilire, SENZA EFFETTUARE LE OPERAZIONI DI PIVOT, quale sarà il valore della funzione obiettivo alla fine della prossima iterazione del simplesso. GIUSTIFICARE LA RISPOSTA!
(c) Alla fine della prossima iterazione sarà cambiata la base corrente: sarà cambiato anche il vertice del poliedro associato alla nuova base? GIUSTIFICARE LA RISPOSTA!