Laboratorio: Ottimizzazione su reti

Luigi De Giovanni

Dipartimento di Matematica, Università di Padova

Cammino minimo: modello

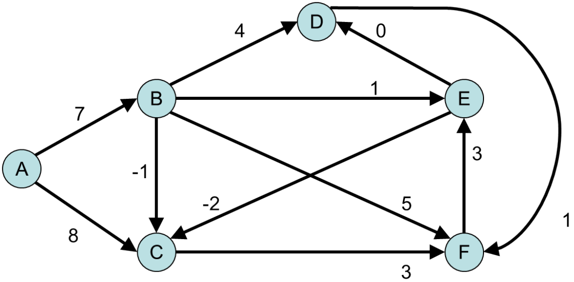
Variabili decisionali: $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{l'arco } (i,j) \text{ è sul cammino minimo;} \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \\
& \sum_{(i,v)\in A} x_{iv} - \sum_{(v,j)\in A} x_{vj} = \begin{cases} -1, & v = s; \\ +1, & v = d; \\ 0, & v \in N \setminus \{s,d\}. \end{cases} \\
& x_{ij} \in \{0,1\} \equiv \mathbb{R}_+ \quad \forall\, (i,j) \in A
\end{aligned}
$$

Caso **particolare MCF**: un nodo domanda s e un nodo offerta d

Cammino minimo: esempio

Si determini con AMPL il cammino minimo da A a F nel seguente grafo



Soluzioni e discussione

Cammini minimi

- `sp.mod`, `sp.dat` (implementazione con archi espliciti)

Max hop

- `spH.mod`, `sp.dat`

> La matrice dei vincoli non è totalmente unimodulare, ma la soluzione osservata del rilassamento continuo è intera! (A T.U. e b intero è condizione sufficiente, non necessaria, di integralità)

Per calcolare il rilassamento continuo: `option relax_integrality 1`

Cammini minimi vincolati

Ad esempio, sono dati i consumi per tratta w_{ij} e la disponibilità di carburante nel serbatoio W

- `spW.mod`, `spW.dat`

La soluzione osservata del rilassamento continuo **non** è intera

Esercizio

Il grafo rappresenta una rete di concessionarie di automobili: i nodi corrispondono alle concessionarie e gli archi alla possibilità di spostare automobili tra concessionarie, con relativi costi per automobile (si consideri il valore assoluto). I nodi C e D hanno ordini che eccedono la disponibilità per rispettivamente 6 e 10 automobili, mentre le altre concessionarie hanno ciascuna un eccesso di 4 automobili. Le bisarche utilizzate permettono di trasferire al massimo sei automobili per ogni coppia. Determinare il piano di trasporti di costo minimo.

Suggerimento: *si tratta da un problema di flusso di costo minimo, con quattro nodi offerta e due nodi domanda.*

- `mcf.mod`, `mcf.dat`

Domanda: cambierebbe la soluzione se le unità fossero frazionabili?

Esercizio (Max-Flow)

Si determini, in base alle capacità degli archi, il massimo numero *maxf* di unità che possono essere trasferite da A a F.

Suggerimento: *il problema può essere modellato come un flusso, introducendo un arco fittizio da F ad A cui corrisponde una variabile* x_{FA} *che indichiamo con* y *e rappresenta la quantità (incognita) da trasferire da A (con bilanciamento* $-y$*) a F (con bilanciamento* $+y$*), e considerando come funzione obiettivo la massimizzazione della stessa variabile.*

- `maxf.mod`, `maxf.dat`

Osservazione: la soluzione rimane intera se le unità sono frazionabili e risolviamo con il simplesso (la matrice dei vincoli è una matrice di incidenza del grafo con l'arco fittizio e quindi resta totalmente unimodulare)

Osservazione: l'interezza del rilassamento continuo si perde con l'introduzione di un vincolo di budget (si osservano soluzioni frazionarie)

Modello PL per Max Flow

Variabili

- quantità x_{ij} da far fluire sull'arco $(i,j) \in A$
- quantità y di flusso che esce da A e arriva in F

$$
\begin{array}{lrcll}
\max & & & y & \\
s.t. & \displaystyle\sum_{(i,v)\in A} x_{iv} - \sum_{(v,j)\in A} x_{vj} & = & \begin{cases} -y \text{ se } v = A \\ +y \text{ se } v = F \\ 0 \quad \text{altrimenti} \end{cases} & \forall \ v \in N \\
 & x_{ij} & \leq & u_{ij} & \forall \ (i,j) \in A \\
 & \left[\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \right. & \leq & \left. \text{budget} \right] & \\
 & x_{ij} & \in & \mathbb{Z}_+ (\equiv \mathbb{R}_+) \quad [\not\equiv \mathbb{R}_+] &
\end{array}
$$