Ricerca Operativa

Dualità e Programmazione Lineare

L. De Giovanni

AVVERTENZA: le note presentate di seguito non hanno alcuna pretesa di completezza, né hanno lo scopo di sostituirsi alle spiegazioni del docente. Il loro scopo è quello di fissare alcuni concetti presentati in classe. Le note contengono un numero limitato di esempi ed esercizi svolti. Questi rappresentano una parte fondamentale nella comprensione della materia e sono presentati in classe.

Contents

1 Soluzione di un problema di programmazione lineare: punti di vista 3

2 Coppie di problemi primale-duale 5
2.1 Ricaviamo "condizioni" necessarie 5
2.2 Le "condizioni" ricavate sono anche sufficienti 6

3 Duale di problemi di programmazione lineare in forma generica 8
3.1 Il verso dei vincoli duali 9
3.2 Il segno delle variabili duali 9
3.3 Regole di trasformazione 10

4 Teoremi della dualità in programmazione lineare 11

5 Interpretazione economica di coppie di problemi primale-duale 15

6 Condizioni di ottimalità e complementarietà primale-duale 17
6.1 La dualità forte come condizione di ottimalità 17
6.2 Ottimalità e complementarietà primale-duale 18

1 Soluzione di un problema di programmazione lineare: punti di vista

Un problema di programmazione lineare consiste nella determinazione del valore ottimo z^* (ad esempio il valore minimo) di una funzione obiettivo $c^T x$ su un poliedro P definito da un insieme di equazioni e/o disequazioni lineari in x (ad esempio $P = \{x \geq 0 : Ax = b\}$). Abbiamo formalizzato un problema di programmazione lineare nella seguente forma standard:

$$(PL_1) \qquad \begin{array}{rll} z^* = \min & c^T x & \\ \text{s.t.} & Ax & = b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

che può essere interpretata come segue:

1. si considerano tutti i punti $x \in P$;
2. per ciascuno di questi x, si calcola il valore $c^T x$;
3. z^* è il valore *minimo* tra tutti quelli calcolati.

Il punto di partenza, in questo caso, è il punto $x \in P$. Un problema di programmazione lineare può però essere considerato sotto un altro punto di vista: anziché partire da $x \in P$, possiamo partire da un possibile valore w della funzione obiettivo e ragionare come segue:

1. si ipotizza un valore w per la funzione obiettivo;
2. si fa variare x su tutto il poliedro P e, per ciascuno di questi $x \in P$, si verifica che $w \leq c^T x$ (cioè w è un *lower bound* per z^*);
3. w^* è il valore *massimo* tra tutti quelli ipotizzati e verificati.

Tale approccio alternativo può essere formalizzato come segue:

$$(PL_2) \qquad \begin{array}{rl} w^* = \max & w \\ \text{s.t.} & w \leq c^T x \quad \forall \quad x \in P \\ & w \in \mathbb{R} \end{array}$$

Vogliamo quindi trovare il massimo valore della variabile reale w che permetta di soddisfare *tutti* i vincoli $w \leq c^T x$, al variare di x in P. Si fa notare che, al variare di x in P, $c^T x$ è uno scalare. (PL_2) è quindi un problema di programmazione lineare con *una sola variabile* w e un numero molto elevato (infinito!) di vincoli: un vincolo per ogni punto $x \in P$[1].

[1]In realtà non si potrebbe parlare di problema di programmazione lineare in presenza di un numero infinito di vincoli. Come vedremo, però, il numero di vincoli si può ridurre ad un numero finito, sebbene elevato.

Esempio 1 *Consideriamo il seguente problema di programmazione lineare:*

$$\begin{array}{rrcrcr} \min & -x_1 & - & x_2 & & \\ s.t. & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 24 \\ & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 20 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

la cui regione ammissibile corrisponde al poliedro P rappresentato in figura 1:

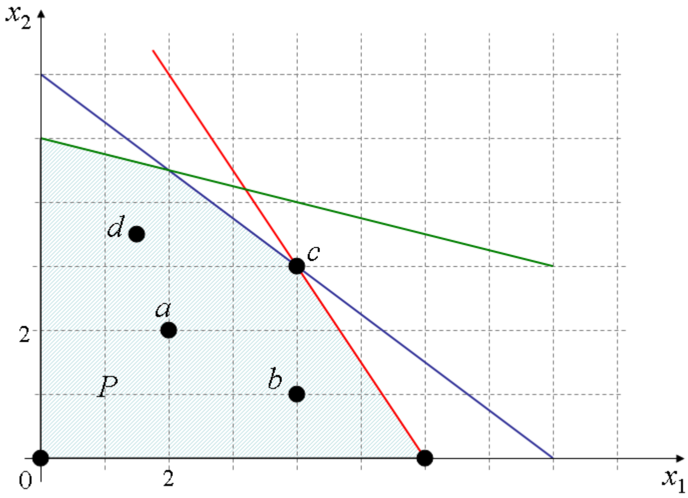

Figure 1: Poliedro ammissibile per l'Esempio 1

Per ottenere il problema di programmazione lineare corrispondente, si devono considerare tutti i punti di P, uno alla volta, e scrivere i relativi vincoli, ottenendo:

$$\begin{array}{lllrl} \max & w & & & \\ s.t. & w & \leq & -4 & (= c^T x \mid_{x=a=(2,2)}) \\ & w & \leq & 0 & (= c^T x \mid_{x=0=(0,0)}) \\ & w & \leq & -5 & (= c^T x \mid_{x=b=(4,1)}) \\ & w & \leq & -7 & (= c^T x \mid_{x=c=(4,3)}) \\ & w & \leq & -5 & (= c^T x \mid_{x=d=(3/2,7/2)}) \\ & \ldots & & & \\ & w & \textit{libera} & & \end{array}$$

Sotto le ipotesi che z^* esista e sia finito, è facile osservare che il valore ottenuto per w^* non può essere diverso da z^*. Infatti, non può essere $w^* > z^*$, altrimenti tale valore di w^* violerebbe la disuguaglianza $w^* \leq c^T x^* = z^*$ in corrispondenza del punto ottimo $x^* \in P$ (w^* non ammissibile); non può neanche essere $w^* < z^*$, altrimenti basterebbe aumentare di poco il valore reale w^* ottenendo una soluzione migliore di w^* che soddisfa tutti i vincoli (w^* non sarebbe ottimo).

Riassumendo: dato un problema di programmazione lineare $\min\{c^T x : x \in P\}$, è possibile associargli un problema di programmazione lineare $\max\{w : w \leq c^T x,\ \forall\ x \in P\}$. Sotto l'ipotesi che il primo problema ammetta ottimo finito, i valori ottimi delle funzioni obiettivo dei due problemi coincidono.

2 Coppie di problemi primale-duale

Il problema (PL_2) associato al problema di programmazione lineare (PL_1) è definito con una sola variabile (w) e un numero infinito di vincoli, uno per ogni punto $x \in P$. Cerchiamo quindi delle formulazioni equivalenti per il problema (PL_2) che limitino il numero di vincoli.

Abbiamo visto che, dato un problema di programmazione lineare, se esiste una soluzione ottima, allora esiste anche una soluzione ottima di base. Pertanto, se esiste un ottimo finito, è sufficiente ricercarlo tra le soluzioni di base, a loro volta corrispondenti ai vertici del poliedro P. Sarà quindi sufficiente scrivere i vincoli del problema (PL_2) per i soli punti di P corrispondenti ai vertici del poliedro stesso. Infatti si ometterebbero dei vincoli con termine noto sicuramente $\geq$ del minimo del problema (vincoli ridondanti). Otteniamo quindi una formulazione equivalente:

$$(PL_2) \qquad \begin{aligned} w^* = \max \quad & w \\ \text{s.t.} \quad & w \leq c^T x \quad \forall \quad x \in \textit{vertici}(P) \\ & w \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

In questo modo, il numero di vincoli è limitato, essendo il numero di soluzioni di base (e quindi di vertici) limitato dal numero $\binom{n}{m}$, con n pari al numero di variabili e m al numero di vincoli (linearmente indipendenti) del problema di partenza[2].

Tuttavia, come sappiamo, il numero $\binom{n}{m}$ potrebbe essere molto elevato. Cerchiamo quindi di scrivere le disuguaglianze $w \leq c^T x,\ \forall\ x \in P$ in un modo equivalente, che utilizzi un numero trattabile di vincoli, ammettendo l'introduzione di un limitato numero di variabili. Si tratta di trovare delle $\boxed{\text{condizioni}}$ che siano valide se e solo se $\boxed{w \leq c^T x,\ \forall\ x \in P}$, cioè:

$$\boxed{w \leq c^T x,\ \forall\ x \in P} \Longleftrightarrow \boxed{\text{condizioni}}$$

2.1 Ricaviamo "condizioni" necessarie

Per iniziare, cerchiamo di dedurre qualche condizione dal fatto che $w \leq c^T x,\ \forall\ x \in P$ (direzione $\Longrightarrow$). Per fare questo, abbiamo bisogno di ipotizzare anche $P \neq \emptyset$, in modo tale da poter scrivere almeno una disuguaglianza $w \leq c^T x$. Inoltre, assumiamo che il problema di partenza (PL_1) ammetta ottimo limitato.

[2] Quindi (PL_2) è ora un problema di programmazione lineare in senso stretto.

Partiamo quindi dalle ipotesi: $w \leq c^T x,\ \forall\, x \in P,\ P \neq \emptyset$ e $z^* > -\infty$.

Essendo z^* limitato, esiste una soluzione ottima del problema (PL_1) e, in particolare, esiste una soluzione ottima di base. Tra tutte le soluzioni ottime di base ne esiste, come abbiamo accennato discutendo la convergenza del metodo del simplesso, almeno una con tutti i costi ridotti non negativi (ad esempio, quella restituita dal metodo del simplesso applicando la regola di Bland). Sia B tale base ottima, che induce la partizione $\begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix}$ del vettore delle variabili x e la partizione $\begin{bmatrix} c_B \\ c_F \end{bmatrix}$ del vettore dei costi c. Essendo B una base ottima con corrispondenti costi ridotti non negativi, si ha[3]:

$$\bar{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1} A \geq 0 \quad \Longrightarrow c^T \geq c_B^T B^{-1} A$$

Inoltre, il valore ottimo della funzione obiettivo è

$$z^* = c^T x^* = c_B^T \underbrace{x_B^*}_{=B^{-1}b} + c_F^T \underbrace{x_F^*}_{=0} = c_B^T B^{-1} b$$

Essendo $x^* \in P$, si ha, dalle ipotesi, $w \leq z^*$. Il prodotto $c_B^T B^{-1}$ è un vettore riga di m componenti che possiamo indicare con $u^T \in \mathbb{R}^{1\times m}$ (il vettore dei moltiplicatori del simplesso). Ponendo quindi $u^T = c_B^T B^{-1}$, possiamo scrivere:

$$\boxed{\begin{cases} w \leq c^T x,\ \forall\, x \in P \\ P \neq \emptyset \\ z^* > -\infty \end{cases}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\exists u \in \mathbb{R}^m : \begin{cases} u^T A \leq c^T \\ w \leq u^T b \end{cases}}$$

2.2 Le "condizioni" ricavate sono anche sufficienti

Possiamo anche facilmente dimostrare la sufficienza delle condizioni a destra nella precedente formula (direzione $\Longleftarrow$). Consideriamo gli $x \in P = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$. Moltipli-

[3]Ricordiamo che i costi ridotti sono i coefficienti delle variabili nella funzione obiettivo in forma canonica rispetto alla base B. Riassumiamo i passaggi, in forma matriciale, per arrivare all'espressione dei costi ridotti (vedi capitolo sul simplesso in forma matriciale nelle note sul simplesso):

$$\begin{aligned} &Ax = b \Rightarrow Bx_B + Fx_F = b \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Fx_F \\ &z = c^T x = c_B^T x_B + c_F^T x_F = c_B^T(B^{-1}b - B^{-1}Fx_F) + c_F^T x_F = \underbrace{c_B^T B^{-1} b}_{\bar{z}_B} + \underbrace{(c_F^T - c_B^T B^{-1} F)}_{\bar{c}_F^T} x_F \end{aligned}$$

dove $\bar{z}_B$ è il valore della funzione obiettivo in corrispondenza della base B e $\bar{c}_F^T$ è il vettore dei costi ridotti delle variabili fuori base. Ora, i coefficienti di costo ridotto delle variabili in base sono tutti pari a 0, cioé $\bar{c}_B^T = 0^T$ che si può anche scrivere come $c_B^T = (c_B^T - c_B^T B^{-1} B) = 0^T$. Pertanto si può scrivere, riaccostando i blocchi relativi a B e a F,

$$\bar{c}^T = [c_B^T, c_F^T] = [0^T, c_F^T - c_B^T B^{-1} F] = [c_B^T - c_B^T B^{-1} B, c_F^T - c_B^T B^{-1} F] = c^T - c_B^T B^{-1} A.$$

cando la condizione $u^T A \le c^T$ per x, ed essendo $x \ge 0$, si ottiene $u^T Ax \le c^T x$, ed essendo $Ax = b$, $u^T b \le c^T x$. Per la seconda condizione $w \le u^T b$, e quindi $w \le c^T x$.
Abbiamo quindi dimostrato il seguente risultato:

Dato un problema di programmazione lineare $z^* = \min\{c^T x : x \in P\}$ con $P = \{x : Ax = b, x \ge 0\}$, $P \neq \emptyset$ e z^* limitato, valgono le seguenti condizioni necessarie e sufficienti:

$$w \le c^T x,\ \forall\, x \in P \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists u \in \mathbb{R}^m : \begin{cases} u^T A \le c^T \\ w \le u^T b \end{cases}$$

Il problema (PL_2) può pertanto essere scritto in modo equivalente come

$$(PL_2) \qquad \begin{array}{rll} w^* = \max & w & \\ \text{s.t.} & w \le u^T b & \text{(un vincolo)} \\ & u^T A \le c^T & (n \text{ vincoli}) \\ & u \in \mathbb{R}^m & (m \text{ variabili}) \end{array}$$

Osserviamo che, all'ottimo, il primo vincolo è necessariamente soddisfatto all'uguaglianza (altrimenti potremmo aumentare ancora w). Quindi, essendo all'ottimo $w = u^T b$, possiamo eliminare il primo vincolo e la stessa variabile w, ottenendo la formulazione equivalente:

$$(PL_2) \qquad \begin{array}{rll} w^* = \max & u^T b & \\ \text{s.t.} & u^T A \le c^T & (n \text{ vincoli}) \\ & u \in \mathbb{R}^m & (m \text{ variabili}) \end{array}$$

Riassumendo: Ad un problema di programmazione lineare (PL_1) è possibile associare un altro problema di programmazione lineare (PL_2) nella forma

$$\begin{array}{ccc} (PL_1) & \qquad & (PL_2) \\ \begin{array}{rrcl} z^* = \min & c^T x & & \\ \text{s.t.} & Ax & = & b \\ & x & \ge & 0 \end{array} & & \begin{array}{rrcl} w^* = \max & u^T b & & \\ \text{s.t.} & u^T A & \le & c^T \\ & u & \in & \mathbb{R}^m \end{array} \end{array}$$

(PL_1) è detto *problema primale*, mentre (PL_2) è detto *problema duale*. Si dice anche che (PL_1) e (PL_2) formano una *coppia primale-duale* di problemi. Il problema primale e il problema duale sono definiti in spazi diversi (variabili x per il primale, u per il duale). Sotto la condizione che il problema primale ammetta ottimo finito, i valori ottimi delle funzioni obiettivo dei due problemi coincidono.

Si fa notare che il problema primale ha n variabili e m vincoli, mentre il problema duale ha m variabili ed n vincoli. La funzione obiettivo del duale è:

$$u^T b = u_1 b_1 + u_2 b_2 + \cdots + u_m b_m$$

Quindi, ad ogni vincolo primale è associata una variabile duale (la variabile duale u_i moltiplica il termine noto del vincolo $i-$esimo). Inoltre, indicando con A_j la $j-$esima colonna di A, i vincoli duali possono essere scritti come:

$$u^T A \leq c^T \quad \equiv \quad \begin{cases} u^T A_1 \leq c_1 \\ u^T A_2 \leq c_1 \\ \quad\cdots \\ u^T A_j \leq c_j \\ \quad\cdots \\ u^T A_n \leq c_n \end{cases} \equiv u^T A_j \leq c_j, \ \forall\ j = 1 \ldots n$$

cioè, ad ogni variabile primale è associato un vincolo duale (il $j-$esimo vincolo duale usa la colonna e il coefficiente di costo della variabile x_j).

3 Duale di problemi di programmazione lineare in forma generica

Nella sezione precedente abbiamo ricavato il problema duale di un problema primale in forma standard (funzione obiettivo di minimo, vincoli di uguaglianza, variabili non negative). Sebbene tutti i problemi di programmazione lineare possano essere messi nella forma standard, è utile considerare una generalizzazione delle trasformazioni sopra viste, in modo da poter considerare problemi primali in qualsiasi forma, ossia problemi $z^* = \min\{c^T x : x \in P\}$, dove P è un generico poliedro definito da equazioni e disequazioni su variabili non necessariamente ≥ 0.

La dimostrazione della sufficienza delle condizioni $u^T A \leq c^T$ e $w \leq u^T b$ si basava sulla costruzione della catena di minorazioni:

$$c^T x \underbrace{\geq}_{x \geq 0} u^T A x \underbrace{=}_{Ax=b} u^T b \geq w, \ \forall\ x \in P$$

Ad esempio, nel caso di un problema primale definito con vincoli $Ax \geq b$ e variabili $x \leq 0$, la catena che porta a dire che $w \leq c^T x$ è mantenuta se u è scelto in modo che $u \geq 0$ e $u^T A \geq c^T$, nel qual caso

$$c^T x \quad \underbrace{\geq}_{x \leq 0 \text{ e } u^T A \geq c^T} \quad u^T A x \quad \underbrace{\geq}_{Ax \geq b \text{ e } u \geq 0} \quad u^T b \geq w, \ \forall\ x \in P.$$

Cerchiamo ora di capire sotto quali condizioni, più in generale, la catena di minorazioni può essere estesa a variabili primali non necessariamente ≥ 0 e a vincoli primali non necessariamente di uguaglianza.

3.1 Il verso dei vincoli duali

Scriviamo le componenti della prima minorazione $c^T x \geq u^T Ax$:

$$c^T x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_j x_j + \cdots + c_n x_n$$

$$u^T Ax = [u^T A_1 | u^T A_2 | \dots | u^T A_j | \dots | u^T A_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = u^T A_1 x_1 + u^T A_2 x_2 + \cdots + u^T A_j x_j + \cdots + u^T A_n x_n$$

Affinché sia valido $c^T x \geq u^T Ax$, è sufficiente che la disuguaglianza sia soddisfatta da ciascuno degli addendi, cioè

$$c_j x_j \geq u^T A_j x_j, \ \forall\, j = 1 \dots n$$

Quindi si considera una variabile primale alla volta e:

- se $x_j \geq 0$, la condizione sufficiente è che $u^T A_j \leq c_j$ (variabile primale $\geq 0 \Rightarrow$ vincolo duale di $\leq$);
- se $x_j \leq 0$, la condizione sufficiente è che $u^T A_j \geq c_j$ (variabile primale $\leq 0 \Rightarrow$ vincolo duale di $\geq$);
- se x_j è una variabile libera, la condizione $c_j x_j \geq u^T A_j x_j$ potrebbe cambiare verso a seconda del segno di x_j, pertanto abbiamo più restrizioni e la condizione sufficiente è che $u^T A_j = c_j$ (variabile primale libera $\Rightarrow$ vincolo duale di uguaglianza).

3.2 Il segno delle variabili duali

Osserviamo adesso che, per mantenere la seconda minorazione, è sufficiente garantire che $u^T Ax \geq u^T b$ (non è necessaria l'uguaglianza) e scriviamo le componenti di questa minorazione:

$$u^T b = u_1 b_1 + u_2 b_2 + \cdots + u_i b_i + \cdots + u_m b_m$$

Indicando con a_i^T la $i-$esima riga della matrice A:

$$u^T Ax = u^T \begin{bmatrix} a_1^T x \\ a_2^T x \\ \dots \\ a_i^T x \\ \dots \\ a_m^T x \end{bmatrix} = u_1 a_1^T x + u_2 a_2^T x + \cdots + u_i a_i^T x + \cdots + u_m a_m^T x$$

Affinché sia valido $u^T Ax \geq u^T b$ è sufficiente che la disuguaglianza sia soddisfatta da ciascuno degli addendi, cioè

$$u_i a_i^T x \geq u_i b_i, \ \forall\, i = 1 \dots m$$

Quindi si considera un vincolo primale alla volta e:

- se $a_i^T x \geq b_i$, la condizione sufficiente è che $u_i \geq 0$ (vincolo primale di $\geq \Rightarrow$ variabile duale ≥ 0);
- se $a_i^T x \leq b_i$, la condizione sufficiente è che $u_i \leq 0$ (vincolo primale di $\leq \Rightarrow$ variabile duale ≤ 0);
- se $a_i^T x = b_i$, la condizione $u_i a_i^T x \geq u_i b_i$ è soddisfatta all'uguaglianza per ogni $u_i \in \mathbb{R}$ (vincolo primale di uguaglianza $\Rightarrow$ variabile duale libera).

3.3 Regole di trasformazione

Riassumendo, abbiamo ricavato delle condizioni sufficienti affinché la disuguaglianza $w \leq c^T x$ sia rispettata da tutti gli $x \in P$. Si può dimostrare che queste condizioni sono anche necessarie e generalizzare le regole per ottenere il problema duale corrispondente ad un problema di programmazione lineare in forma generica. Si tratta di *considerare singolarmente* ciascun vincolo e ciascuna variabile primale e applicare le seguenti regole:

Primale ($\min c^T x$)	**Duale** ($\max u^T b$)
$a_i^T x \geq b_i$	$u_i \geq 0$
$a_i^T x \leq b_i$	$u_i \leq 0$
$a_i^T x = b_i$	u_i libera
$x_j \geq 0$	$u^T A_j \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$u^T A_j \geq c_j$
x_j libera	$u^T A_j = c_j$

Le regole sopra esposte sono state ricavate partendo da un problema primale in forma di minimo. Analogamente, si possono ricavare delle regole valide per passare al duale di un problema con funzione obiettivo di massimo. Tali regole corrispondono a leggere la tabella da destra a sinistra: ad esempio, se il primale è dato in forma di massimo, una variabile primale ≥ 0 genera un vincolo duale di $\geq$ (prima riga della tabella) e un vincolo primale di $\leq$ corrisponde ad una variabile duale ≥ 0 (quarta riga).

Esempio 2

$$
\begin{array}{lllll}
\min & 10x_1 & +20x_2 & & \\
s.t. & 2x_1 & -x_2 & & \geq 1 \\
 & & x_2 & +x_3 & \leq 2 \\
 & x_1 & & -2x_3 & = 3 \\
 & & 3x_2 & -x_3 & \geq 4 \\
 & x_1 & & & \geq 0 \\
 & & x_2 & & \leq 0 \\
 & & & x_3 & \textit{libera}
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{llllll}
\max & u_1 & +2u_2 & +3u_3 & +4u_4 & \\
s.t. & u_1 & & & & \geq 0 \\
 & & u_2 & & & \leq 0 \\
 & & & u_3 & & \textit{libera} \\
 & & & & u_4 & \geq 0 \\
 & 2u_1 & & +u_3 & & \leq 10 \\
 & -u_1 & +u_2 & & +3u_4 & \geq 20 \\
 & & u_2 & -2u_3 & -u_4 & = 0
\end{array}
$$

Esercizio 1 *Si scriva il problema duale del seguente problema:*

$$
\begin{array}{llllll}
\max & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & \\
s.t. & 2x_1 & & +x_3 & & \leq 10 \\
 & -x_1 & +x_2 & & +3x_4 & \geq 20 \\
 & & x_2 & -2x_3 & -x_4 & = 0 \\
 & x_1 & & & & \geq 0 \\
 & & x_2 & & & \leq 0 \\
 & & & x_3 & & \textit{libera} \\
 & & & & x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

Suggerimento: si può procedere in due modi *equivalenti*: applicare la tabella data da destra a sinistra (ottenendo il duale in forma di minimo) oppure trasformare la funzione obiettivo in forma di minimo, applicare le regole da sinistra a destra (ottenendo il duale in forma di massimo), ricondurre la funzione obiettivo del duale in forma di minimo.

4 Teoremi della dualità in programmazione lineare

L'introduzione di coppie di problemi primale-duale permette di dimostrare delle importanti proprietà. Tali proprietà, come vedremo, consentono di approfondire la comprensione del problema in analisi, interpretato da un punto di vista alternativo. Le stesse proprietà hanno anche notevoli risvolti applicativi nella messa a punto di metodi di soluzione di problemi di programmazione lineare. Vediamo alcune di queste proprietà.

Una proprietà delle trasformazioni viste in precedenza è che applicando due volte le trasformazioni stesse, si ottiene il problema di programmazione lineare di partenza.

Teorema 1 *Il duale del problema duale coincide con il problema primale.*

Dimostrazione: Ricordando che, date due matrici X e Y, $(XY)^T = Y^T X^T$:

$$
\left\{ \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ s.t. & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow
\left\{ \begin{array}{ll} \max & u^T b \\ s.t. & u^T A \leq c^T \\ & u \geq 0 \end{array} \right. \equiv
\left\{ \begin{array}{ll} \max & b^T u \\ s.t. & A^T u \leq c \\ & u \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow
$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \min & c^T y \\ s.t. & y^T A^T \geq b^T \\ & y \geq 0 \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \min & c^T y \\ s.t. & Ay \geq b \\ & y \geq 0 \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ s.t. & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array} \right.$$

Sostituendo x a y si ha l'asserto ■

Come esempio, si verifichi che il duale del problema dell'Esercizio 1 coincide con il primale dell'Esempio 2.

Un'importante proprietà deriva direttamente dalle osservazioni precedenti che, ricordiamo, assumono che il problema primale ammetta soluzione ottima finita.

Teorema 2 (Dualità forte per problemi in forma generica): *Sia data una coppia di problemi primale-duale indicati con (PL) e (DL) rispettivamente, e sia la regione ammissibile di (PL) un poliedro non vuoto. Allora (PL) ammette soluzione ottima finita se e solo se (DL) ammette soluzione ottima finita e i valori delle funzioni obiettivo coincidono.*

Dimostrazione: La dimostrazione della necessità delle condizioni deriva dalle osservazioni sopra riportate. Infatti abbiamo visto come, dato un problema primale definito su un poliedro non vuoto e con valore della funzione obiettivo limitato, si possa definire il corrispondente problema duale con valori ottimi delle rispettive funzioni obiettivo coincidenti. Per quanto riguarda la sufficienza delle condizioni, basta osservare che il duale del duale coincide con il primale e applicare le osservazioni sopra riportate al problema duale. ■

Ad esempio, se abbiamo un problema primale in forma standard, il teorema della dualità forte può essere scritto come:

Teorema 3 (Dualità forte per problemi in forma standard): *Sia dato il problema primale $z^* = \min\{c^T x : x \in P\}$ con $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$ e z^* limitato. Allora*

$$z^* = \min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\} = w^* = \max\{u^T b : u^T A \leq c^T, u \textit{ libere}\}$$

Il teorema della dualità forte si applica solo se il problema primale (o, equivalentemente, il problema duale) ammette soluzione ottima finita. Cerchiamo ora alcune proprietà che possano essere applicate alle coppie di problemi primale-duale, anche nei casi in cui uno dei due problemi è illimitato oppure impossibile, esaurendo tutti i casi possibili per i problemi di programmazione lineare.

Per semplicità espositiva, fissiamo il problema primale nella forma

$$(PL) \qquad \begin{array}{rrl} z^* = \min & c^T x & \\ \text{s.t.} & Ax & \geq b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

il cui corrispondente problema duale è:

$$(DL)\quad \begin{array}{rll} w^* = \max & u^T b & \\ \text{s.t.} & u^T A & \leq c^T \\ & u & \geq 0 \end{array}$$

ricordando che i risultati possono essere facilmente generalizzati a problemi di programmazione lineare in qualsiasi forma.

Se rilassiamo la condizione di limitatezza della soluzione ottima del problema primale, mantenendo la condizione di ammissibilità, si ha il seguente risultato.

Teorema 4 (Dualità debole): *Siano P e D i poliedri delle regioni ammissibili dei problemi primale e duale rispettivamente: $P = \{x \geq 0 : Ax \geq b\}$ e $D = \{u \geq 0 : u^T A \leq c^T\}$. Sia inoltre $P \neq \emptyset$ e $D \neq \emptyset$. Allora, per ogni coppia di soluzioni ammissibili per il primale e per il duale $x \in P$ e $u \in D$, vale la relazione:*

$$u^T b \leq c^T x$$

Dimostrazione: se $x \in P$ e $u \in D$, è possibile costruire la seguente catena di maggiorazioni:

$$u^T b \underset{\substack{u^T \geq 0 \\ b \leq Ax}}{\leq} u^T A x \underset{\substack{x \geq 0 \\ u^T A \leq c^T}}{\leq} c^T x$$

che prova l'asserto[4]. ■

In pratica, il valore della funzione obiettivo duale in corrispondenza di soluzioni ammissibili duali costituisce un limite inferiore per il valore della funzione obiettivo primale; viceversa, il valore della funzione obiettivo primale in corrispondenza di soluzioni ammissibili primali costituisce un limite superiore per il valore della funzione obiettivo duale. La situazione è rappresentata in Figura 2.

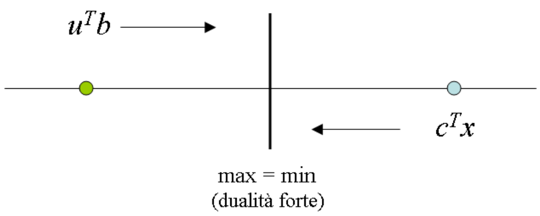

Figure 2: I valori delle soluzioni primali e duali si limitano a vicenda.

Dal teorema della dualità debole, seguono immediatamente alcuni importanti risultati.

[4]Facciamo notare che la catena di maggiorazioni nella dimostrazione precedente è sempre assicurata dalle regole di trasformazione da primale a duale, in qualsiasi forma, visto che tali regole sono costruite proprio allo scopo di mantenere la catena stessa.

Corollario 1 *Siano date una soluzione $\tilde{x}$ ammissibile per (PL) e una soluzione $\tilde{u}$ ammissibile per (DL). Se $c^T\tilde{x} = \tilde{u}^Tb$, allora $\tilde{x}$ è una soluzione ottima per (PL) e $\tilde{u}$ è una soluzione ottima per (DL).*

Dimostrazione: Se esistesse una soluzione $\bar{x}$ migliore per il problema primale, allora $c^T\bar{x} < c^T\tilde{x} = \tilde{u}^Tb$. Analogamente, Se esistesse una soluzione $\bar{u}$ migliore per il problema duale, allora $\bar{u}^Tb > \tilde{u}^Tb = c^T\tilde{x}$. In ogni caso, si violerebbe il teorema della dualità debole.■

Corollario 2 *Sia data una coppia di problemi primale-duale (PL)-(DL). Allora:*

(i) Se (PL) è illimitato, allora (DL) è inammissibile.

(ii) Se (DL) è illimitato, allora (PL) è inammissibile.

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che esista una soluzione ammissibile duale u cui corrisponde il valore della funzione obiettivo u^Tb. Per la dualità debole, dovrebbe essere $c^Tx \geq u^Tb$, per ogni x ammissibile primale, cioè z^* è limitato, contraddicendo l'ipotesi di illimitatezza. Analogamente si dimostra la (ii). ■

Si ribadisce che le due implicazioni (i) e (ii) valgono solo nella direzione data. Esistono infatti casi di coppie di problemi primale-duale in cui entrambi i problemi sono inammissibili, come ad esempio:

$$\begin{array}{lll}
\min & x_1 \\
s.t. & x_1 + x_2 \geq 1 \\
 & -x_1 - x_2 \geq 1 \\
 & x_1, x_2 \text{ libere}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lll}
\max & u_1 + u_2 \\
s.t. & u_1 - u_2 = 1 \\
 & u_1 - u_2 = 0 \\
 & u_1, u_2 \geq 0
\end{array}$$

I risultati visti finora possono essere sintetizzati nella seguente tabella dei casi possibili:

		(DL)		
		Finito	Illimitato	Impossibile
(PL)	Finito	SI e ($z^* = \omega^*$)	NO	NO
	Illimitato	NO	NO	SI (corollario)
	Impossibile	NO	SI (corollario)	SI (esempi)

5 Interpretazione economica di coppie di problemi primale-duale

La definizione del problema duale associato ad un problema (primale) di programmazione lineare, ci permette di approfondire la comprensione del problema stesso. Ad esempio, in ambito economico, una coppia di problemi primale-duale ci permette di considerare delle situazioni di competizione, permettendo di introdurre il punto di vista di diversi competitori. Un esempio di interpretazione economica di coppie di problemi primale-duale è il seguente.

Consideriamo il problema della dieta: un allevatore deve preparare una miscela alimentare per il suo bestiame garantendo un apporto di b_i unità per ogni sostanza nutritiva (vitamine, proteine, carboidrati etc.). Il mercato mette a disposizione degli alimenti, corrispondenti ai mangimi di diverse case produttrici: ogni unità di alimento j ha un costo c_j e un apporto di a_{ij} unità della sostanza nutritiva i. L'allevatore vuole determinare le quantità di alimenti da acquistare per soddisfare a costo minimo i requisiti di sostanze nutritive. Se abbiamo n alimenti e m sostanze nutritive, il problema della dieta, *dal punto di vista dell'allevatore*, è formulabile con il seguente modello di programmazione lineare.
Parametri:

c_j: costo unitario alimento j ($j = 1..n$);

a_{ij}: tasso di presenza della sostanza i ($i = 1..m$) nell'alimento j (ad es. grammi per unità di alimento);

b_i: fabbisogno minimo sostanza i (ad es. in grammi).

Variabili decisionali

x_j: quantità dell'alimento j da acquistare.

Modello:

$$
(PL) \qquad \begin{array}{rll}
z^* = \min & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \text{(minimizzazione dei costi)} \\
s.t. & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \ \forall\, i = 1..m & \text{(soddisfazione dei fabbisogni nutritivi)} \\
 & x_j \geq 0, \ \forall\, j = 1..n &
\end{array}
$$

Introducendo le variabili duale u_i associate ad ogni vincolo per la sostanza nutritiva i, il corrispondente problema duale è:

$$(PD) \qquad \begin{aligned} w^* = \max \quad & \sum_{i=1}^{m} b_i u_i & (1) \\ s.t. \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \leq c_j, \ \forall\, j = 1..n & (2) \\ & u_i \geq 0, \ \forall\, i = 1..m \end{aligned}$$

Possiamo vedere la funzione obiettivo come la massimizzazione di un profitto derivante dalla vendita di b_i unità della sostanza nutritiva i. Le variabili duali u_i rappresentano quindi il prezzo di vendita unitario della sostanza i. Il problema duale può essere infatti interpretato considerando un produttore di alimenti che decide di immettere sul mercato dei prodotti alimentari che contengano ciascuno una sola sostanza nutritiva (proteine, vitamine, carboidrati etc.). Il produttore vuole determinare il prezzo di vendita unitario di ciascun prodotto (corrispondente a una sostanza nutritiva) in modo da massimizzare il suo profitto. La funzione obiettivo del problema duale utilizza i termini noti dei vincoli primali: l'allevatore acquista la quantità di sostanza i di cui necessita, cioè b_i unità al prezzo unitario u_i. I vincoli del problema duale esprimono dei criteri di competitività dei prezzi u_i, rispetto all'attuale fornitore dell'allevatore: ad esempio, affinché l'allevatore decida di fornirsi dal nuovo produttore, è sufficiente che il costo sostenuto per ricostituire tutti gli apporti nutritivi di una unità della miscela j a partire dalle sostanze acquistate ($\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i$) non sia maggiore del costo per ottenere gli stessi apporti acquistando direttamente il prodotto j (costo c_j). Se non fossero rispettati questi vincoli, l'allevatore potrebbe preferire continuare ad acquistare i prodotti "compositi". Supponiamo ora di risolvere il problema primale e il problema duale e che le soluzioni ottime siano, rispettivamente, $\bar{x}$ e $\bar{u}$. Supponiamo inoltre di modificare un termine noto b_i di una quantità non troppo elevata Δ_i, in modo tale che $\bar{u}$ sia in scarti complementari con la nuova soluzione ottima del primale (e quindi, $baru$ è soluzione ottima del duale). Allora, il valore ottimo della soluzione ottima del problema primale e del problema duale continuano a coincidere e, in particolare, subiscono una variazione pari a $\bar{u}_i\, \Delta_i$. Ad esempio, se b_i diminuisse di un'unità ($\Delta_i = -1$), allora il costo sostenuto dall'allevatore diminuirebbe di $\bar{u}_i$ (ricordiamo che $\bar{u}_i \geq 0$). Le variabili duali u_i possono quindi essere interpretate come il *valore intrinseco* di ciascuna sostanza nutritiva, il prezzo unitario che siamo disposti a pagare per diminuire il fabbisogno di quella sostanza (ad esempio il prezzo che siamo disposti a pagare a un fornitore di alimenti): questo è tra i motivi per cui il valore ottimo di ciascuna variabile duale è anche indicato come *prezzo ombra*. Come abbiamo visto, la formulazione del problema duale, ci permette di considerare lo stesso problema dell'approvvigionamento delle sostanze necessarie all'allevatore dal punto di vista alternativo (duale) di un produttore interessato ad agire come venditore (e non come acquirente) nello stesso mercato. In particolare:

- il teorema della dualità debole ci dice che $w^* \leq z^*$, cioè, il guadagno del produttore e la spesa dell'allevatore si limitano e vicenda: se l'allevatore sostiene attualmente una spesa $\bar{z}$ (in corrispondenza di una soluzione ammissibile $\bar{x}$ del problema della dieta), il produttore non può sperare di guadagnare più di $\bar{z}$, e questo potrebbe già stabilire dei criteri per decidere se entrare o meno nel mercato.

- il teorema della dualità forte ci dice che $w^* = z^*$, cioè, una politica ottimale di prezzi u_i^* permette di guadagnare esattamente z^*, ossia l'ammontare della spesa dell'allevatore, se questi si comporta in modo razionale. Se il produttore decidesse di aumentare i prezzi oltre u_i^*, l'allevatore preferirebbe soddisfare i fabbisogni nutritivi continuando ad acquistare gli alimenti dall'attuale fornitore, ai prezzi c_j. Il teorema della dualità forte sancisce quindi delle condizioni di equilibrio del mercato: se i mercati diminuiscono i c_j, il produttore dovrà diminuire gli u_i. Se aumentano i c_j, anche il produttore può aumentare gli u_i. Il mercato, quindi, tenderà ad offrire all'allevatore alternative economicamente equivalenti.

6 Condizioni di ottimalità e complementarietà primale-duale

I teoremi della dualità possono essere utilizzati per definire delle condizioni di ottimalità per una coppia primale-duale che possano essere impiegate operativamente, per determinare l'ottimalità di soluzioni disponibili o per derivare degli algoritmi risolutivi per problemi di ottimizzazione (come si vedrà, ad esempio, per problemi di ottimizzazione su reti di flusso).

6.1 La dualità forte come condizione di ottimalità

Sia data una coppia di problemi primale-duale:

$$\begin{array}{lll} (PP) & \min & c^T x \\ & \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} (PD) & \max & u^T b \\ & \text{s.t.} & u^T A \leq c^T \\ & & u \geq 0 \end{array}$$

e due vettori $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$.

I teoremi della dualità forniscono delle *condizioni di ottimalità*:

$$\begin{array}{c} \bar{x} \text{ e } \bar{u} \text{ ottime} \\ \text{primale e duale (risp.)} \end{array} \iff \begin{array}{ll} \bar{x} \text{ è ammissibile primale:} & A\bar{x} \geq b \wedge \bar{x} \geq 0 \\ \bar{u} \text{ è ammissibile duale:} & \bar{u}^T A \leq c^T \wedge \bar{u} \geq 0 \\ \text{vale la dualità forte:} & c^T \bar{x} = \bar{u}^T b \end{array}$$

Si noti che abbiamo utilizzato un problema primale con vincoli di $\geq$, ma le condizioni possono essere estese a coppie di problemi in qualsiasi forma. Tali condizioni non fanno nessuna assunzione sul tipo di soluzioni ammissibili e possano essere applicate, ad esempio, anche a soluzioni NON di base (nella teoria del simplesso avevamo definito delle condizioni sufficienti di ottimalità basate sulla definizione di costo ridotto, che assume la disponibilità di una soluzione di base). In alcuni casi, queste condizioni possono essere sfruttate per calcolare la soluzione ottima di un problema di programmazione lineare, come nel seguente esempio

Esempio 3 *Trovare la soluzione ottima del seguente problema di programmazione lineare:*

$$\begin{array}{lll} \max & z = & -3x_1 - x_3 \\ s.t. & & x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ & & 2x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ & & x_1, x_2, x_3 \text{ } \textit{libere} \end{array}$$

La presenza di soli vincoli di uguaglianza e di sole variabili libere suggerisce l'applicazione diretta delle condizioni di ottimalità primale duale, impostando un sistema di *equazioni* lineari contenente i due vincoli del primale (di uguaglianza) i tre vincoli del duale (variabili primali libere $\Rightarrow$ vincoli del duale di uguaglianza) e il vincolo di uguaglianza tra la funzione obiettivo primale e la funzione obiettivo duale. Si ottiene pertanto il seguente sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 20 \\ u_1 + 2u_2 & = & -3 \\ 2u_1 + u_2 & = & 0 \\ u_1 + u_2 & = & -1 \\ -3x_1 - x_3 & = & 7u_1 + 20u_2 \end{cases}$$

di $2 + 3 + 1 = 6$ equazioni in 5 incognite (le 3 variabili primali e le 2 variabili duali u_1 e u_2 associate al primo e al secondo vincolo, rispettivamente) in cui le incognite non sono vincolate in segno. Si può pertanto applicare un qualsiasi metodo per la soluzione di sistemi di equazioni lineari. Si ottengono così, per le variabili primali e duali, dei valori corrispondenti a soluzioni ammissibili che verificano la dualità forte, e che sono, quindi, ottime. In questo caso, risolvendo il sistema, si ottiene il seguente risultato: infinite soluzioni del tipo $x_1 = 11 - \frac{1}{3}x_3$, $x_2 = -2 - \frac{1}{3}x_3$, $u_1 = 1$ e $u_2 = -2$ (x_3 rappresenta un grado di libertà). Pertanto, tutte le soluzioni ottenute fissando x_3 a un valore arbitrario e calcolando x_1 e x_2 di conseguenza (i) sono ammissibili e (ii) hanno lo stesso valore della funzione obiettivo di una soluzione duale ammissibile, quindi sono soluzioni ottime del problema proposto.

6.2 Ottimalità e complementarietà primale-duale

Le condizioni di ottimalità possono essere espresse nella seguente forma, utile nel caso di vincoli non di uguaglianza o di variabili non libere.

Teorema 5 Condizioni di ortogonalità (o di complementarietà) primale-duale. *Data la coppia di problemi primale-duale*

$$\min\{c^T x : x \geq 0, Ax \geq b\}$$
$$\max\{u^T b : u \geq 0, u^T A \leq c^T\}$$

$$\begin{array}{c} \textit{x e u ottime} \\ \textit{primale e duale (risp.)} \end{array} \iff \begin{array}{cl} Ax \geq b \wedge x \geq 0 & \textit{(ammissibilità primale)} \\ u^T A \leq c^T \wedge u \geq 0 & \textit{(ammissibilità duale)} \\ \left.\begin{array}{c} u^T(Ax - b) = 0 \\ (c^T - u^T A)x = 0 \end{array}\right\} & \textit{(ortogonalità)} \end{array}$$

Dimostrazione: Dimostriamo la necessità delle condizioni di ortogonalità (direzione $\Rightarrow$). Se x e u sono ottime, sono necessariamente ammissibili primale e duale, rispettivamente. Possiamo quindi scrivere

$$u^T b \underset{\substack{u^T \geq 0 \\ b \leq Ax}}{\leq} u^T A x \underset{\substack{x \geq 0 \\ u^T A \leq c^T}}{\leq} c^T x$$

Inoltre, per ipotesi di ottimalità e dualità forte, $u^T b = c^T x$. Le due disuguaglianze sopra riportate devono pertanto essere rispettate necessariamente all'uguaglianza (visto che gli estremi sono uguali), da cui si ricavano le due uguaglianze:

$$\begin{array}{ccc} u^T A x = u^T b & \Rightarrow & u^T(Ax - b) = 0 \\ c^T x = u^T A x & \Rightarrow & (c^T - u^T A)x = 0 \end{array}$$

Per quanto riguarda la sufficienza (direzione $\Leftarrow$), dalle condizioni di ortogonalità di ricava

$$\begin{array}{ccc} u^T(Ax - b) = 0 & \Rightarrow & u^T b = u^T A x \\ (c^T - u^T A)x = 0 & \Rightarrow & c^T x = u^T A x \end{array}$$

cioè $u^T b = c^T x$. Abbiamo quindi due soluzioni x e u ammissibili primale e duale, rispettivamente, i cui valori delle funzioni obiettivo coincidono. Per il Corollario 1, le due soluzioni sono ottime. ■

Sviluppando i prodotti tra matrici, le condizioni di ortogonalità di due soluzioni ammissibili e ottime x e u possono essere scritte come segue.

$$\begin{aligned} u^T(Ax - b) &= \sum_{i=1}^{m} u_i(a_i^T x - b_i) = 0 \in \mathbb{R} \\ (c^T - u^T A)x &= \sum_{j=1}^{n} (c_j - u^T A_j)x_j = 0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ricordando che, per l'ammissibilità dei problemi primale e duale TUTTI i fattori sono ≥ 0 (sempre, in qualsiasi forma sia la coppia di problemi primale-duale), si ha che, all'ottimo:

$$\begin{aligned} u_i(a_i^T x - b_i) &= 0, \quad \boxed{\forall}\, i = 1...m \\ (c_j - u^T A_j)x_j &= 0, \quad \boxed{\forall}\, j = 1...n \end{aligned}$$

Le condizioni di ortogonalità (o complementarietà) sono rispettate <u>per ciascun</u> vincolo/variabile primale/duale.

In altri termini, siano u e x soluzioni ammissibili di una coppia di problemi primale-duale $\min\{c^T x : x \geq 0, Ax \geq b\}$ e $\max\{u^T b : x \geq 0, u^T A \leq c^T\}$. x e u sono ottime se e solo se:

1)	variabile primale positiva	$x_j > 0$	$\Rightarrow$	$u^T A_j = c_j$	vincolo duale saturo
2)	vincolo duale *lasco*	$u^T A_j < c_j$	$\Rightarrow$	$x_j = 0$	variabile primale nulla
3)	variabile duale positiva	$u_i > 0$	$\Rightarrow$	$a_i^T x = b_i$	vincolo primale saturo
4)	vincolo primale *lasco*	$a_i^T x > b_i$	$\Rightarrow$	$u_i = 0$	variabile duale nulla

Si fa notare che le implicazioni sono valide solo nel verso $\Rightarrow$ dato!

Le implicazioni possono essere estese a coppie primale-duale in qualsiasi forma. Ad esempio, se il primale è in forma standard, le condizioni 3) e 4) non sono da considerarsi, perché già contenute nell'ammissibilità primale (in effetti $u^T(Ax - b) = 0$ è soddisfatta da ogni $u \in \mathbb{R}^m$, visto che, per le soluzioni ammissibili primali, $Ax = b$).

Nella forma data, le condizioni possono essere sfruttate operativamente per verificare se una soluzione data (ad esempio la politica decisionale attualmente implementata) è o meno ottima, senza necessariamente calcolare una soluzione ottima con algoritmi specifici (ad esempio, il simplesso).

Esempio 4 *Verificare se la soluzione* $x_1 = 8$*,* $x_2 = 3$ *è ottima per il problema:*

$$\begin{array}{lll} \min & z = & -4x_1 - 2x_2 \\ s.t. & & 2x_1 \leq 16 \\ & & x_1 + 3x_2 \leq 17 \\ & & x_2 \leq 5 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Innanzitutto verifichiamo che la soluzione data sia ammissibile per il problema:

$$x_1 = 8 \geq 0 \quad x_2 = 3 \geq 0 \quad 2x_1 = 16 \leq 16 \quad x_1 + 3x_2 = 17 \leq 17 \quad x_2 = 3 \leq 5$$

Quindi procediamo scrivendo il duale.

$$\begin{array}{lll} \max & w = & 16u_1 + 17u_2 + 5u_3 \\ s.t. & & 2u_1 + u_2 \leq -4 \\ & & 3u_2 + u_3 \leq -2 \\ & & u_1 \leq 0, u_2 \leq 0, u_3 \leq 0 \end{array}$$

Cerchiamo quindi di costruire una soluzione duale che sia in scarti complementari con la soluzione primale. Per farlo, applichiamo le condizioni di ortogonalità. Dalle informazioni sui vincoli primali ottengo:

$$\begin{array}{lllll} u_1(2x_1 - 16) = 0 & \Rightarrow & u_1 \cdot 0 = 0 & \Rightarrow & // & \text{(vincolo primale saturo)} \\ u_2(x_1 + 3x_2 - 17) = 0 & \Rightarrow & u_2 \cdot 0 = 0 & \Rightarrow & // & \text{(vincolo primale saturo)} \\ u_3(x_2 - 5) = 0 & \Rightarrow & u_3 \cdot (-2) = 0 & \Rightarrow & u_3 = 0 & \text{(vincolo primale lasco)} \end{array}$$

Dalle informazioni sulle variabili primali ottengo:

$$\begin{array}{llll} x_1(2u_1 + u_2 + 4) = 0 & \Rightarrow & 2u_1 + u_2 + 4 = 0 & \text{(variabile primale} > 0) \\ x_2(3u_2 + u_3 + 2) = 0 & \Rightarrow & 3u_2 + u_3 + 2 = 0 & \text{(variabile primale} > 0) \end{array}$$

Mettendo a sistema le condizioni ricavate ottengo:

$$\begin{cases} u_3 = 0 \\ 2u_1 + u_2 + 4 = 0 \\ 3u_2 + u_3 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_3 = 0 \\ u_1 = -5/3 \\ u_2 = -2/3 \end{cases}$$

La soluzione duale ottenuta rispetta i vincoli duali e i vincoli di dominio (tutte le variabili duali devono essere ≤ 0). Inoltre, per costruzione, è in scarti complementari con la soluzione ammissibile primale data. Siamo quindi in presenza di una coppia di soluzioni primale-duale ammissibili e in scarti complementari. Pertanto, le due soluzioni sono ottime e, in particolare, $x_1 = 8$, $x_2 = 3$ è ottima per il problema dato[5].

Esempio 5 *Dato il problema*

[5]Solo per verifica, possiamo vedere che i valori delle funzioni obiettivo coincidono: $-4x_1 - 2x_2 = -38 = 16u_1 + 17u_2 + 5u_3$.

$$\begin{array}{lll}\max & z = & x_1 - x_2\\ s.t. & & x_2 \leq 1\\ & & 2x_1 + x_2 \leq 5\\ & & -x_1 - 3x_2 \leq 10\\ & & -x_1 - x_2 \leq 2\\ & & x_1 \geq 0, x_2 \ \textit{libera}\end{array}$$

Verificare se la soluzione $x^a = [2, -4]$ è ottima.

Dopo aver verificato che la soluzione proposta è ammissibile per il problema, scriviamo il corrispondente problema duale. Questa volta utilizziamo la tabella di trasformazione letta da destra a sinistra (problema primale di massimo):

$$\begin{array}{lll}\min & w = & u_1 + 5u_2 + 10u_3 + 2u_4\\ s.t. & & 2u_2 - u_3 - u_4 \geq 1\\ & & u_1 + u_2 - 3u_3 - u_4 = -1\\ & & u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0, u_4 \geq 0\end{array}$$

Dalle condizioni di ortogonalità:

$$\begin{array}{llllll}u_1(x_2 - 1) = 0 & \Rightarrow & u_1 \cdot (-5) = 0 & \Rightarrow & u_1 = 0\\ u_2(2x_1 + x_2 - 5) = 0 & \Rightarrow & u_2 \cdot (-5) = 0 & \Rightarrow & u_2 = 0\\ u_3(-x_1 - 3x_2 - 10) = 0 & \Rightarrow & u_3 \cdot 0 = 0 & \Rightarrow & //\\ u_4(-x_1 - x_2 - 2) = 0 & \Rightarrow & u_4 \cdot 0 = 0 & \Rightarrow & //\end{array}$$

$$(2u_2 - u_3 - u_4 - 1)x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2u_2 - u_3 - u_4 - 1 = 0$$

Si noti che la condizione di ortogonalità tra il secondo vincolo duale e x_2 non si considera, essendo x_2 libera. Del resto, il secondo vincolo duale è una uguaglianza, che può essere direttamente sfruttata nel sistema dei vincoli per ricavare delle variabili duali ammissibili e in scarti complementari. Infatti, possiamo mettere a sistema le condizioni:

$$\begin{cases}u_1 = 0 & \text{cond. compl. primale duale}\\ u_2 = 0 & \text{c.c.p.d.}\\ 2u_2 - u_3 - u_4 - 1 = 0 & \text{c.c.p.d.}\\ u_1 + u_2 - 3u_3 - u_4 = -1 & \text{ammissibilità duale}\end{cases}$$

e ottenere:

$$u_1 = 0 \quad u_2 = 0 \quad u_3 = 1 \quad u_4 = -2$$

Si tratta dell'unica soluzione che permette di avere una soluzione duale che rispetti i vincoli duali e che sia in scarti complementari con la soluzione primale proposta. Tuttavia, tale soluzione non è ammissibile duale, visto che non viene rispettato il vincolo di dominio $u_4 \geq 0$. Abbiamo dimostrato che non esiste nessuna soluzione ammissibile duale che sia in scarti complementari con la soluzione primale $x^a = [2, -4]$ che, pertanto, non può essere ottima.

Esercizio 2 *Verificare se* $x^b = [5, -5]$ *è soluzione ottima per il problema dell'esempio precedente [risultato:* x^b *è ottima].*