Introduzione alla teoria dei giochi

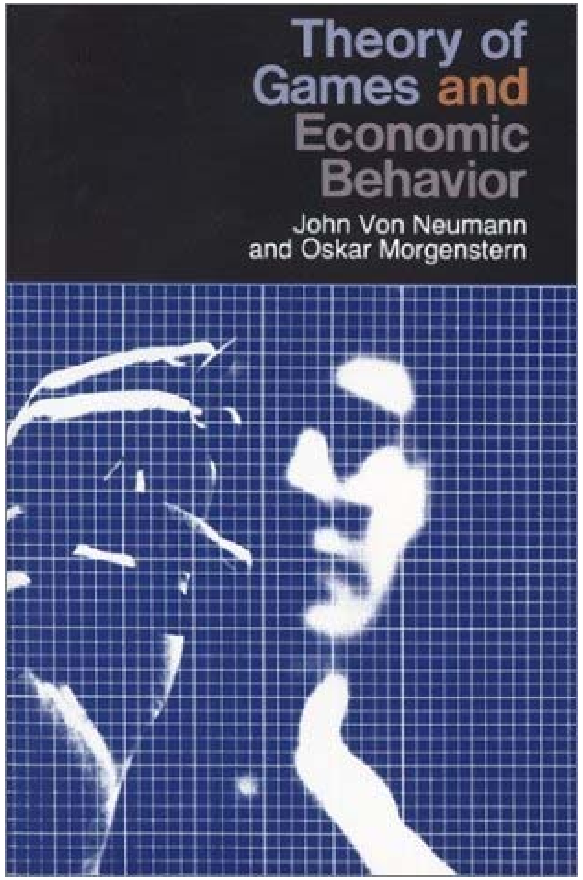
- michele.moretto@unipd.it

In the beginning

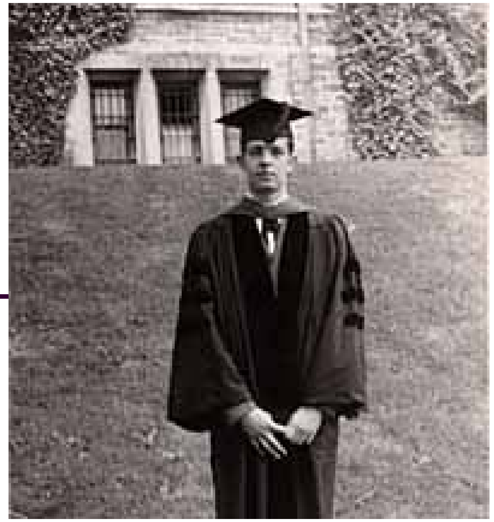

- Some game-theoretic ideas traced back to the 18-th century.
- Emile Borel (1871~1956) and John von Neumann (1903~1957) began the major development of game theory.

The book

- Game theory became a field since the book of John von Neumann and Oskar Morgenstern published in 1944.



John Nash(1928-2015)



- Received his Ph.D. from Princeton University with a 28-page thesis on his 22-nd birthday.
  Invented the notion of Nash equilibrium.
- Wrote a seminal paper on bargain theory.

Che cosa è la teoria dei giochi?

- **La Teoria dei Giochi** è un modo formale di analizzare l'interazione strategica tra un gruppo di giocatori (o agenti) razionali che si comportano strategicamente
- La teoria dei giochi ha applicazioni
  - Economiche,
  - Politiche, Militari (Studio dei conflitti), Giuridiche
  - etc.

Che cosa è la teoria dei giochi?

- Noi ci concentreremo su giochi dove:
  - Ci sono almeno due giocatori **Razionali**
  - Ogni giocatore ha più di una scelta
  - Il risultato finale dipende dalle strategie scelte da tutti i giocatori; c'è interazione strategica.

- Esempio: Sei persone vanno ad un ristorante.
  - Ogni persona paga il proprio pasto – *un problema semplice di decisione*
  - Prima del pranzo, ogni persona è d'accordo a dividere il conto fra tutti i partecipanti – *un gioco*

Rationality

Assumptions:

- humans are rational beings
- humans always seek the best alternative in a set of possible choices

Why assume rationality?

- narrow down the range of possibilities
- predictability

La strategia

- **<u>Definizione</u>**: piano d'azione preparato a priori in base alle regole del gioco, cioè specificazione teorica completa delle mosse che il giocatore farà ogni volta che dovrà prendere una decisione.

accordi

- **<u>Come viene scelta</u>**: in base alla

massimizzazione del risultato
(vincere il massimo possibile
e perdere il minimo possibile)

indipendente

Equilibri

Equilibrio in strategie dominanti:

1. io faccio meglio che posso indipendentemente da ciò che fai tu;
2. tu fai meglio che puoi indipendentemente da ciò che faccio io.

Equilibrio di Nash:

Coppia di strategie rispetto alle quali nessuno dei due giocatori ha interesse ad essere l'unico a cambiare

1. io faccio meglio che posso dato ciò che fai tu;
2. tu fai meglio che puoi dato ciò che faccio io.

Agenda

Giochi con decisioni simultanee:
rappresentati con matrici
Sono detti: *giochi in forma normale (o strategica)*

Giochi con decisioni in sequenza (prima un giocatore poi un altro..):
rappresentati con alberi delle decisioni
Sono detti: *giochi in forma estesa*

Agenda

- Esempi di giochi a mosse simultanee
  - Dilemma del prigioniero
  - La battaglia dei sessi
  - Chicken game
  - Matching pennies
- Questi sono giochi statici (one shot) ad informazione completa (o a mosse simultanee)

Esempio di gioco in forma normale

		Giocatore 2	
		L	R
Giocatore 1	T	5 5	6 3
	B	3 6	4 4

Il Dilemma del Prigioniero (Von Neumann e Morgenstern, 1944)

- 2 persone, sospettate di aver commesso un grave crimine insieme, vengono arrestate
- la polizia non ha sufficienti prove per dimostrare la loro colpevolezza
- e quindi può solo incriminarli per reati minori

… a meno che uno dei due confessi!

Una proposta

Chiusi in celle separate a ciascuno dei due prigionieri viene fatta una proposta:

“se confessi il crimine ed accetti di testimoniare contro il tuo compagno, ti libereremo!”

Prospettiva interessante, ma…

- se entrambi accettano la proposta, si discrediteranno a vicenda agli occhi del giudice, ed incapperanno in una dura condanna;
- se nessuno dei due accetta, la pena sarà molto lieve per entrambi.

Formalizzando la situazione

		Prigioniero B	
		Non parla	*Confessa contro il compagno*
Prigioniero A	*Non parla*	Pena molto lieve per entrambi	Scarcerazione per B, massima pena per A
	Confessa contro il compagno	Scarcerazione per A, massima pena per B	Pena piuttosto severa per entrambi

Quale scelta prendere?

Se i due prigionieri potessero interagire e scegliere una strategia comune, con ogni probabilità opterebbero per non parlare.

Ma la scelta è individuale…

Dovendo scegliere senza conoscere l'intenzione del compagno, la strategia che minimizza il rischio risulta essere quella di tradire.

Dimostrazione

Scegliendo di tradire, infatti:

- si viene scarcerati, nel caso in cui il compagno non confessi a sua volta;
- si evita la pena massima, nel caso in cui il compagno tradisca.

Il dilemma

Siccome il singolo individuo è portato a tradire, la situazione raggiunta è per forza di cose una soluzione sub-ottimale del problema!

Il Dilemma del prigioniero

- Due sospetti detenuti in celle separate sono accusati di un crimine rilevante. Non ci sono però prove sufficienti.
- Ad entrambi I sospetti viene comunicata la seguente regola:
  - Se nessuno confessa allora entrambi saranno accusati di un crimine minore e condannati ad un mese di carcere.
  - Se entrambi confessano allora entrambi saranno condannati a sei mesi di carcere.
  - Se uno confessa ma l'altro nega, allora chi confessa sarà rilasciato ma l'altro sconterà nove mesi di carcere.

		Prigioniero 2	
		Nega	Confessa
Prigioniero 1	Nega	-1 , -1	-9 , 0
	Confessa	0 , -9	-6 , -6

Esempio Classico: Rappresentazione “normale” del Dilemma del Prig.

- Insieme di giocatori: {Prigioniero 1, Prigioniero 2}
- Insieme delle strategie: $S_1 = S_2 =$ **{<u>N</u>ega, <u>C</u>onfessa}**
- Funzioni di Payoff :

u_1**(N, N)=-1,** u_1**(N, C)=-9,** u_1**(C, N)=0,** u_1**(C, C)=-6;**
u_2**(N, N)=-1,** u_2**(N, C)=0,** u_2**(C, N)=-9,** u_2**(C, C)=-6**

Giocat.

Strateg.

Payoffs

		Prig. 2	
		Nega	Confessa
Prig. 1	Nega	-1 , -1	-9 , 0
	Confessa	0 , -9	-6 , -6

Risolvere il Dilemma del Prigioniero

- Confessare dà sempre un risultato migliore indipendentemente dalla scelta dell’altro
- Strategia dominata
  - Esiste un’altra strategia che dà sempre risultati migliori indipendentemente dalla scelta degli altri.

Giocatori

Strategie

Payoffs

		Prisoner 2	
		Nega	Confessa
Prigion. 1	Nega	-1 , -1	-9 , 0
	Confessa	0 , -9	-6 , -6

Equilibrio di Nash : idea

- Equilibrio di Nash
  - Un insieme di strategie, una per ogni giocatore, tale che la strategia di ogni giocatore sia la sua migliore possibile considerato che tutti gli altri giocatori stanno giocando la loro migliore strategia o
  - Una situazione stabile nella quale nessun giocatore vuole deviare se gli altri confermano la propria posizione

(Confessa, Confessa) è un equilibrio di Nash.

Prig. 1 \ Prig. 2	Nega	Confessa
Nega	-1 , -1	-9 , 0
Confessa	0 , -9	<u>-6</u> , <u>-6</u>

Modello per la guerra fredda

- **Giocatori** : Stati Uniti e URSS
- **Confessione** = armamento con l'atomica
- **Non confessione** = non armamento

Secondo il modello del dilemma del prigioniero era inevitabile la corsa agli armamenti, anche se la situazione più auspicabile sarebbe stata quella del non armamento di entrambi.

In questo ambito, una situazione ben nota a tutti è quella della corsa agli armamenti, che ha costituito uno dei temi più importanti della politica internazionale durante la cosiddetta Guerra Fredda. Se il paese avversario costruisce dei missili intercontinentali a testata multipla, è conveniente per noi fare lo stesso? Il problema è descritto dalla matrice seguente, in cui SM e NM indicano le scelte 'si ai missili' e 'no ai missili'.

		Paese 2 SM	Paese 2 NM
Paese 1	SM	10 ; 10	200 ; 0
	NM	0 ; 200	100 ; 100

Dilemma del prigioniero e fissazione dei prezzi (profitti)

		impresa A	
		prezzo alto	prezzo basso
impresa B	prezzo alto	500 ; 500	100 ; 700
	prezzo basso	700 ; 100	300 ; 300

fonte: A. Schotter Microeconomia, Giappichelli, Torino

Esempio: La battaglia dei sessi

- In posti separati, Chris e Pat devono scegliere di passare la serata all'opera o a un combattimento di boxe.
- Sia Chris che Pat sanno quanto segue:
  - Entrambi vorrebbero passare la serata insieme.
  - Ma Chris preferisce l'opera.
  - Pat preferisce la boxe.

		Pat: Opera	Pat: Boxe
Chris	Opera	2 , 1	0 , 0
Chris	Boxe	0 , 0	1 , 2

Esempio: La battaglia dei sessi

		Pat: Opera	Pat: Boxe
Chris	Opera	2 , 1	0 , 0
	Boxe	0 , 0	1 , 2

- Rappresentazione in forma Normale:
  - Insieme giocatori: { Chris, Pat } (={Player 1, Player 2})
  - Insieme strategie: $S_1 = S_2 = \{ \underline{O}pera, \underline{B}oxe \}$
  - Funzioni di Payoff :

    $u_1(O, O)=2$, $u_1(O, B)=0$, $u_1(B, O)=0$, $u_1(B, B)=1$;
    $u_2(O, O)=1$, $u_2(O, B)=0$, $u_2(B, O)=0$, $u_2(B, B)=2$

Risolvere la battaglia dei sessi

		Pat: Opera	Pat: Boxe
Chris	Opera	<u>2</u> , <u>1</u>	0 , 0
	Boxe	0 , 0	<u>1</u> , <u>2</u>

- Opera è la risposta ottima di Player 1 alla strategia di Player 2 Opera
- Opera è la risposta ottima di Player 2 alla strategia di Player 1 Opera
  - Quindi, (Opera, Opera) è un Equilibrio di Nash

- Fight è la risposta ottima di Player 1 alla strategia di Player 2 Fight
- Fight è la risposta ottima di Player 2 alla strategia di Player 1 Fight
  - Quindi, (Boxe, Boxe) è un Equilibrio di Nash

Esempio : Chicken Game (la corsa del pollo/codardo)

- **<u>In che cosa consiste</u>**: due amici Gianni e Paolo si sfidano in auto. La sfida consiste nel correre a tutta velocità l'uno contro l'altro e vince chi non vira. Il primo che si sposta viene considerato un "pollo". Le possibilità sono:
  1. uno si sposta e l'altro no (e viceversa);
  2. si spostano entrambi;
  3. nessuno dei due si sposta.

Soluzione del Chicken Game (la corsa del pollo/codardo)

		Paolo	
		Devia	Non Devia
Gianni	Devia	(2 2)	(1 3)
	Non Devia	(3 1)	(0 0)

Ci sono due equilibri di Nash: (1,3), cioè si sposta Gianni e non si sposta Paolo; (3,1), cioè si sposta Paolo e non si sposta Gianni.

Non esiste una strategia razionale adottabile da entrambi i giocatori, anche se “virano entrambi” è meno rischioso di “nessuno dei due vira”.

Chicken Game
(gioco del pollo – dal film Gioventù bruciata)

		Unione Europea	
		Aiuti	NO aiuti (Grexit)
Tsypras Grecia	Riforme	2 ; 2	1 ; 3
	NO a riforme	3 ; 1	0 ; 0

La “deterrenza”

- La “corsa del codardo” si presta a descrivere la “deterrenza”, cioè la credibilità di una minaccia.

Durante la guerra fredda entrambe le superpotenze sarebbero state disposte a scatenare una guerra nucleare piuttosto che fare la figura del “codardo” con l’avversario.

Esempio: Matching pennies

- Ognuno dei due giocatori ha una monetina.
- I due giocatori devono scegliere simultaneamente se mostrare Testa o Croce.
- Entrambi i giocatori conoscono le seguenti regole:
  - Se le due monetine hanno entrambi lo stesso esito (entrambe testa or entrambe croce) allora il giocatore 2 vince la moneta del giocatore 1.
  - In caso diverso, il giocatore 1 vince la moneta del giocatore 2.

		Giocatore 2: Testa	Giocatore 2: Croce
Giocatore 1	Testa	-1 , 1	1 , -1
	Croce	1 , -1	-1 , 1

Esempio: Matching pennies

		Player 2	
		Testa	Croce
Player 1	Testa	-1 , 1	1 , -1
	Croce	1 , -1	-1 , 1

- Rappresentazione in forma normale:
  - Insieme giocatori: {Player 1, Player 2}
  - Insieme strategie: $S_1 = S_2 = \{\ \underline{T}\text{esta}, \underline{C}\text{roce}\ \}$
  - Funzioni di Payoff :

    $u_1(T, T)=-1$, $u_1(T, C)=1$, $u_1(C, T)=1$, $u_1(C, C)=-1$;

    $u_2(T, T)=1$, $u_2(T, C)=-1$, $u_2(C, T)=-1$, $u_2(C, C)=1$

Soluzione del Matching pennies

		Player 2	
		Head	Tail
Player 1	Head	-1 , <u>1</u>	<u>1</u> , -1
	Tail	<u>1</u> , -1	-1 , <u>1</u>

- Head è la risposta ottima di Player 1 alla strategia di Player 2 Tail
- Tail è la risposta ottima di Player 2 alla strategia di Player 1 Tail

- Tail è la risposta ottima di Player alla strategia di Player 2 Head
- Head è la risposta ottima di Player 2 alla strategia di Player 1 Head

  - Quindi, NON c'è equilibrio di Nash

Who Plays When?

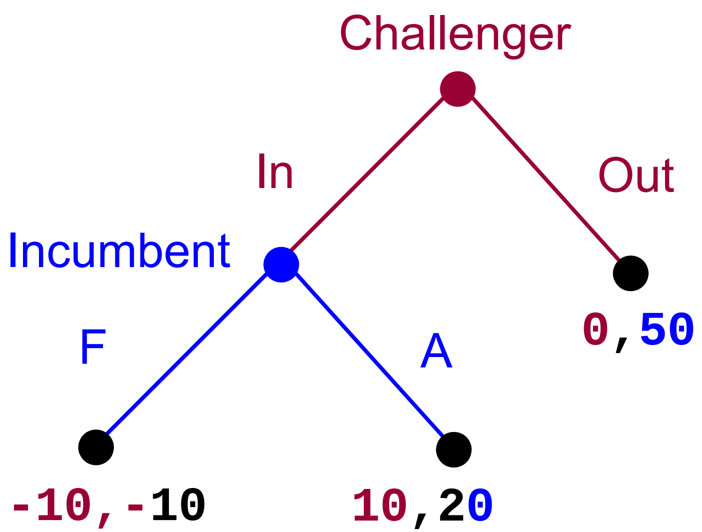
- But there are games in which one player plays before another player.
- Such games are sequential play games.
- The player who plays first is the leader. The player who plays second is the follower.

A Sequential Game Example

- Sometimes a game has more than one Nash equilibrium and it is hard to say which is more likely to occur.
- When such a game is sequential it is sometimes possible to argue that one of the Nash equilibria is more likely to occur than the other.

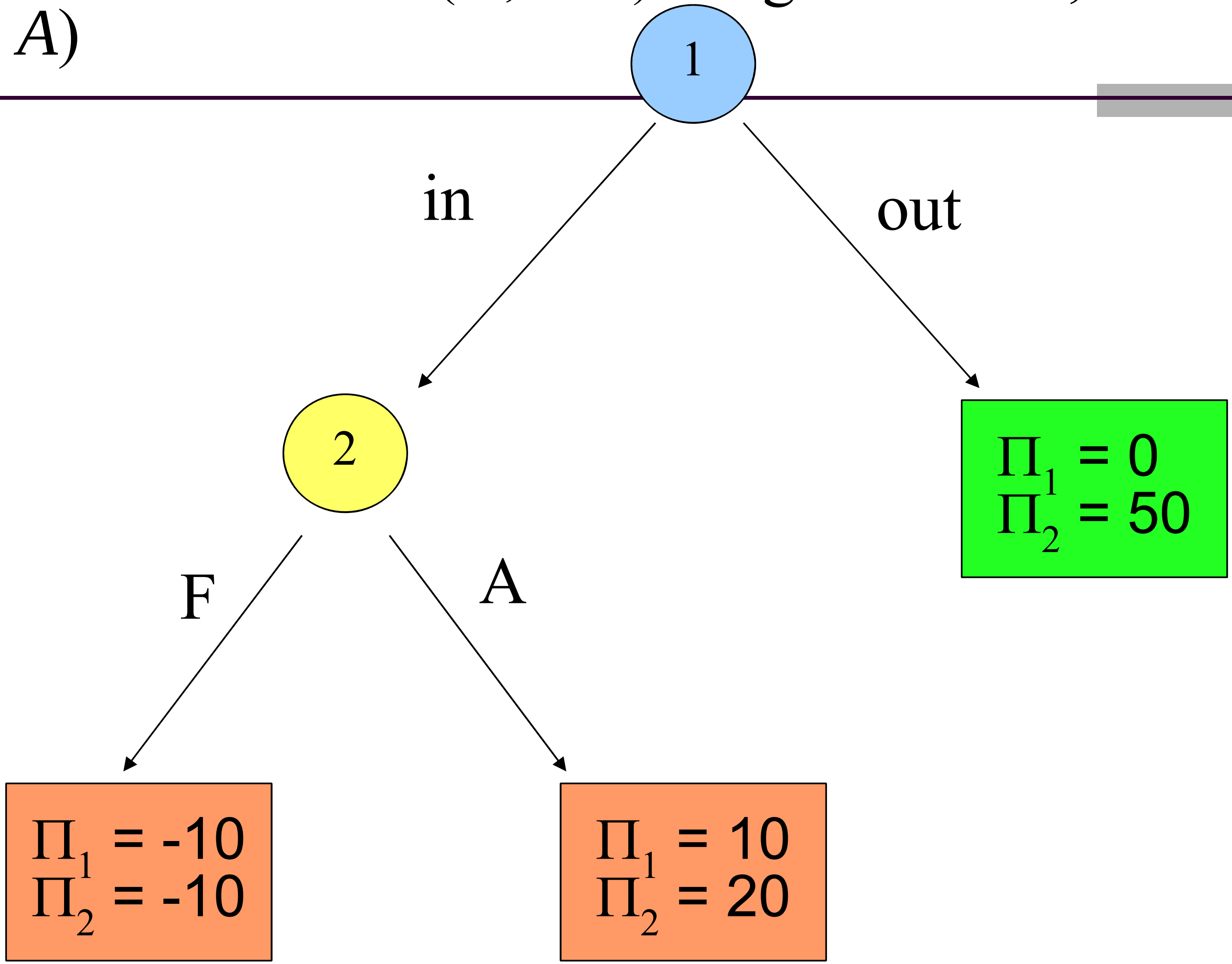
Gioco dell'entrata sul mercato

- Un monopolista già sul mercato (incumbent) è posto di fronte ad una possibile entrata sul mercato di un challenger.
- Il challenger può scegliere se entrare (enter) o restare fuori (stay out).
- Se il challenger entra, il monopolista (incumbent) può scegliere se cooperare (accommodate) o se combatterlo (fight).
- I payoffs del gioco sono conoscenza comune.

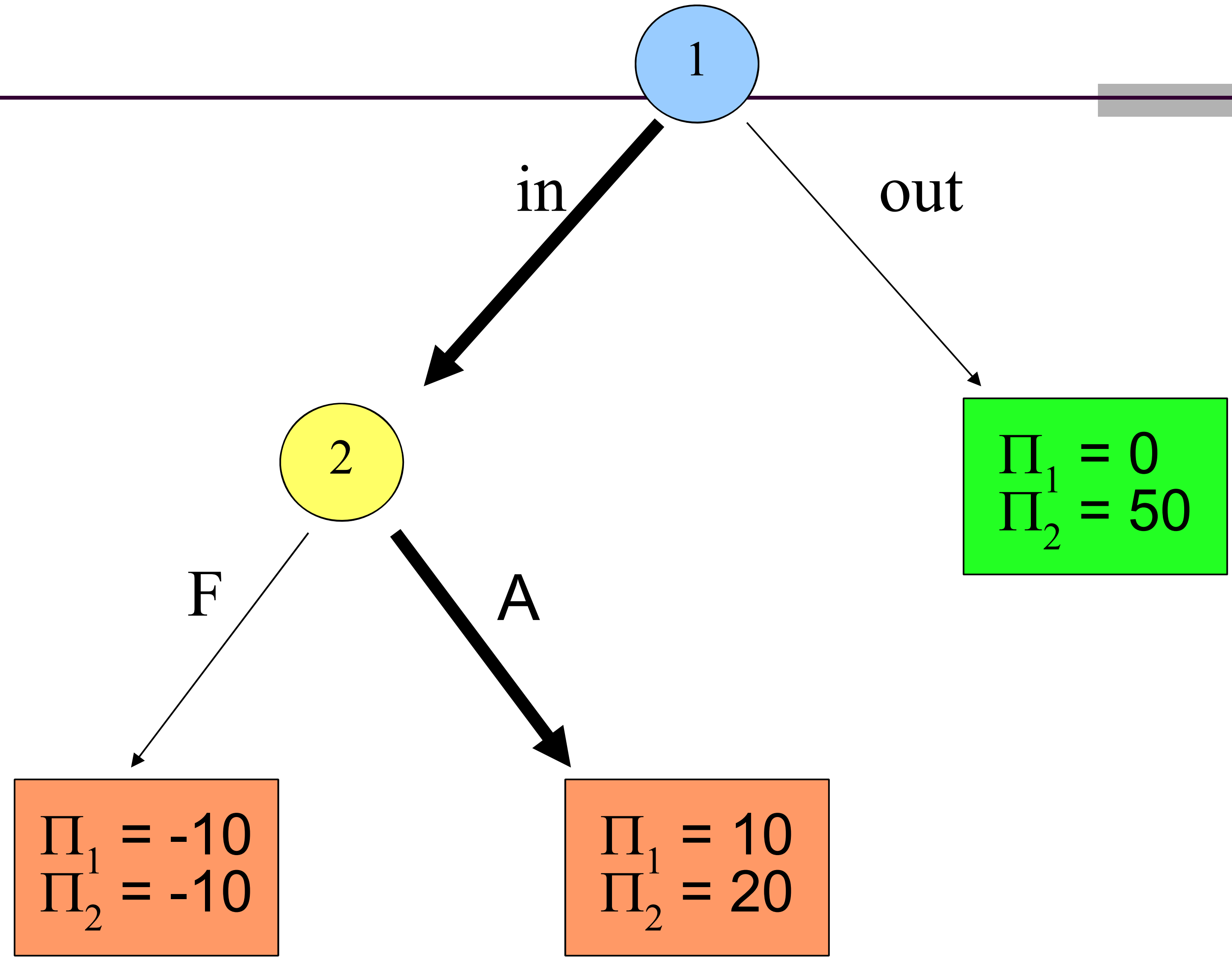


Il primo numero è il payoff del challenger. Il secondo numero è il payoff dell'incumbent.

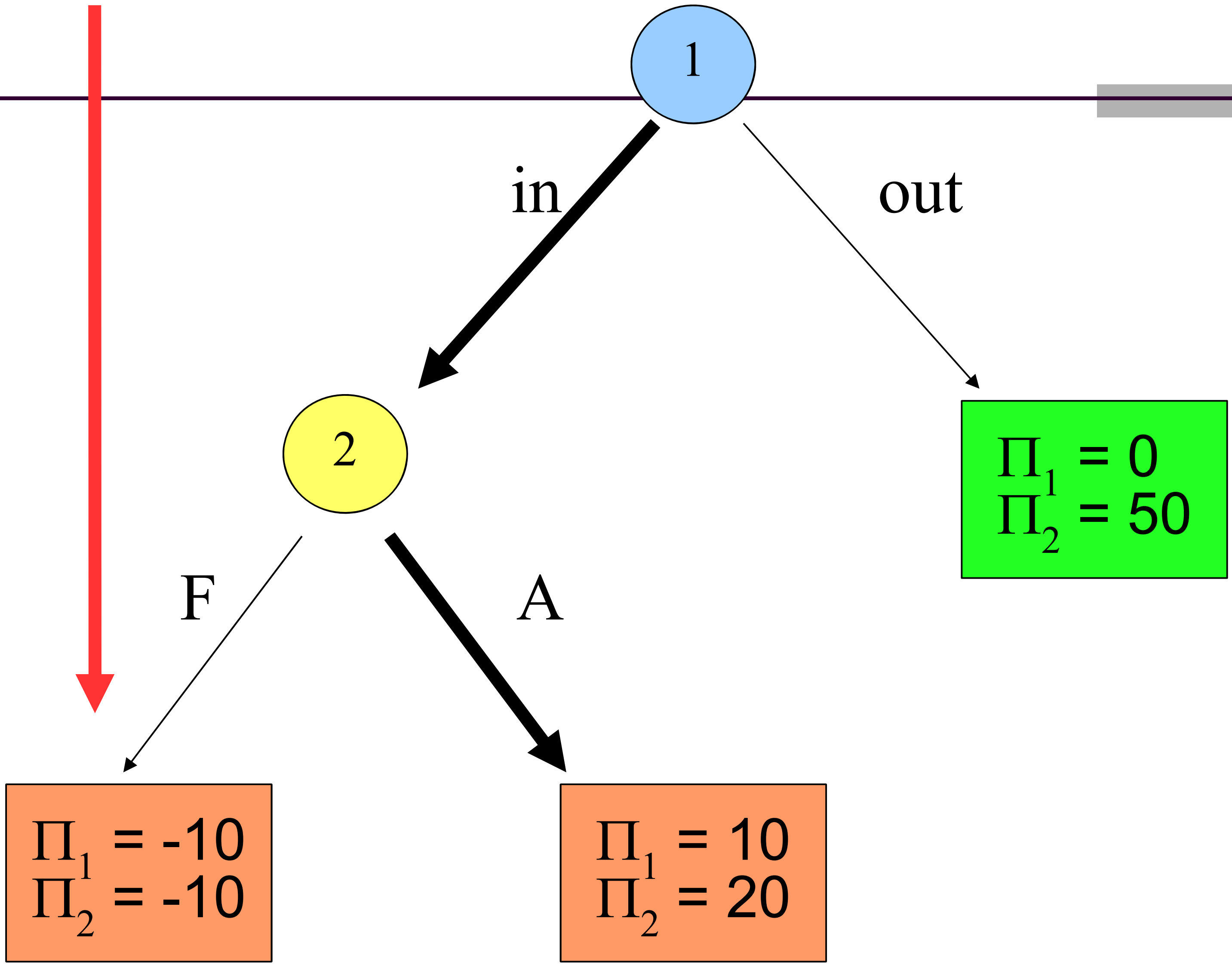
Gioco Della Minaccia
Entrare o Non Entrare (In, *Out*) - Fight/Guerra , Accomodate (F, *A*)



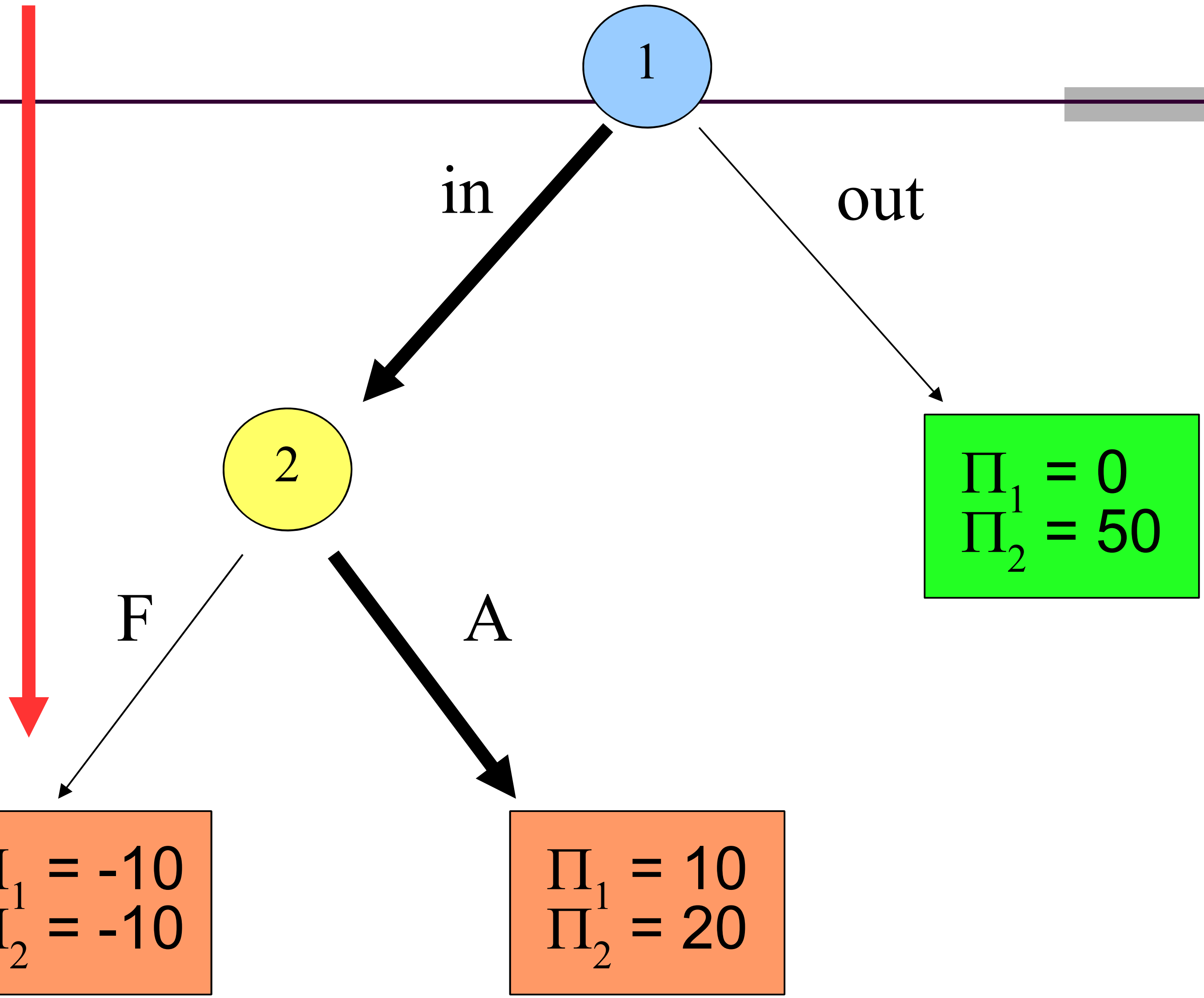
Induzione a ritroso – La soluzione del gioco



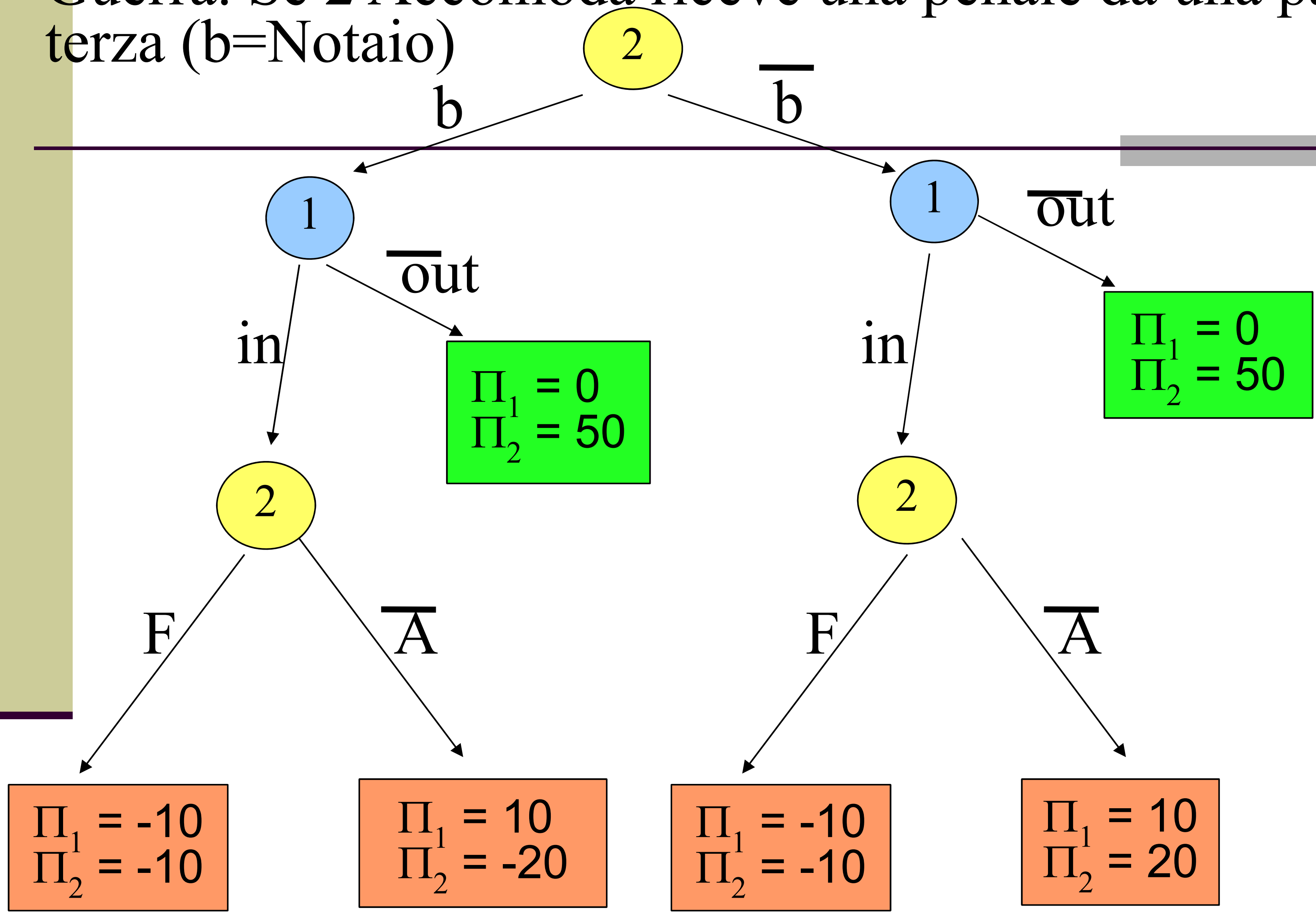
Perché l'impresa "1" entra non considerando il pericolo di Fight/Guerra (*minaccia non credibile)*



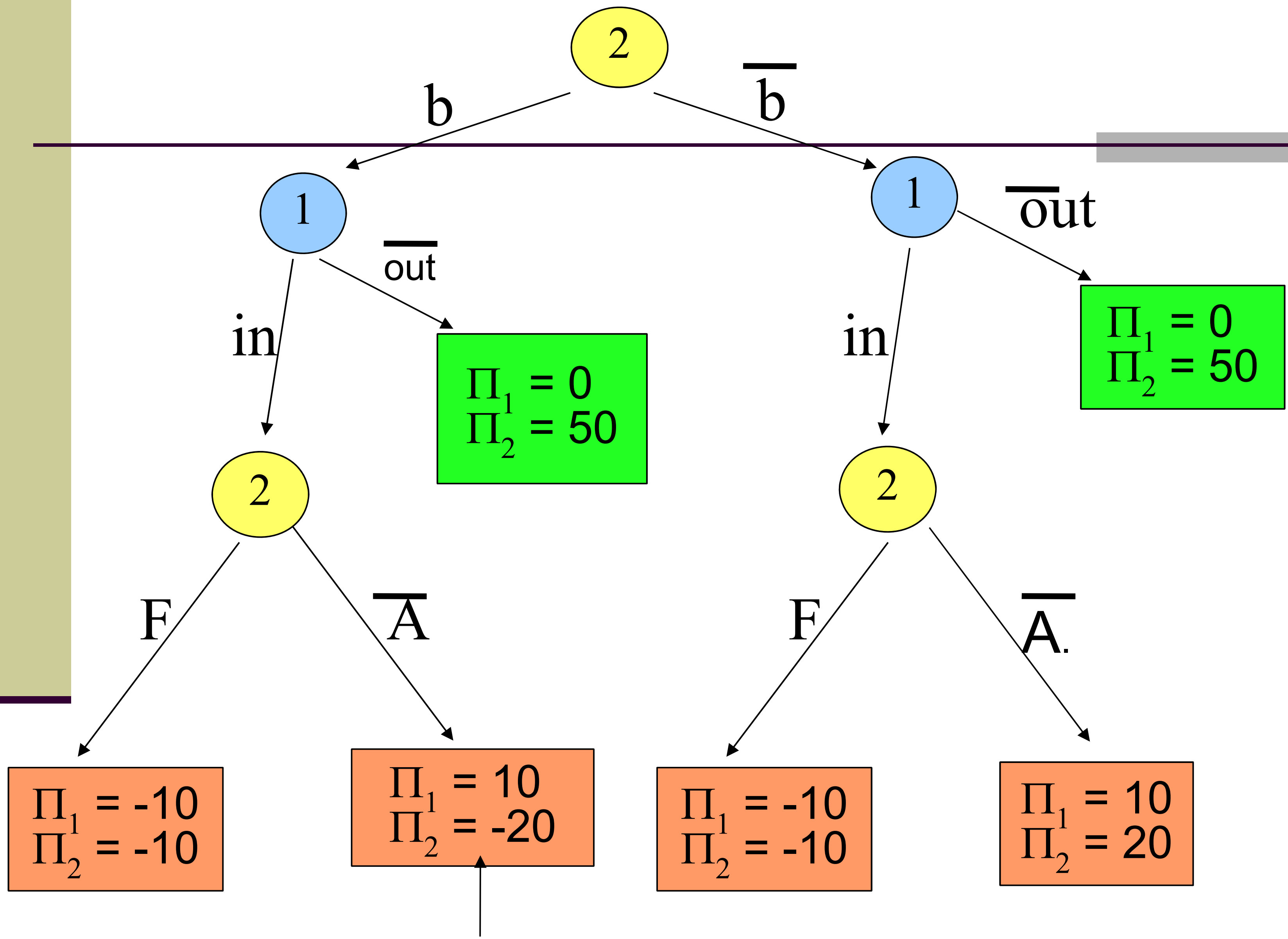
La ritorsione non è una *minaccia credibile*



Far diventare credibile la minaccia. “b” impegnarsi a fare Guerra. Se 2 Accomoda riceve una penale da una parte terza (b=Notaio)

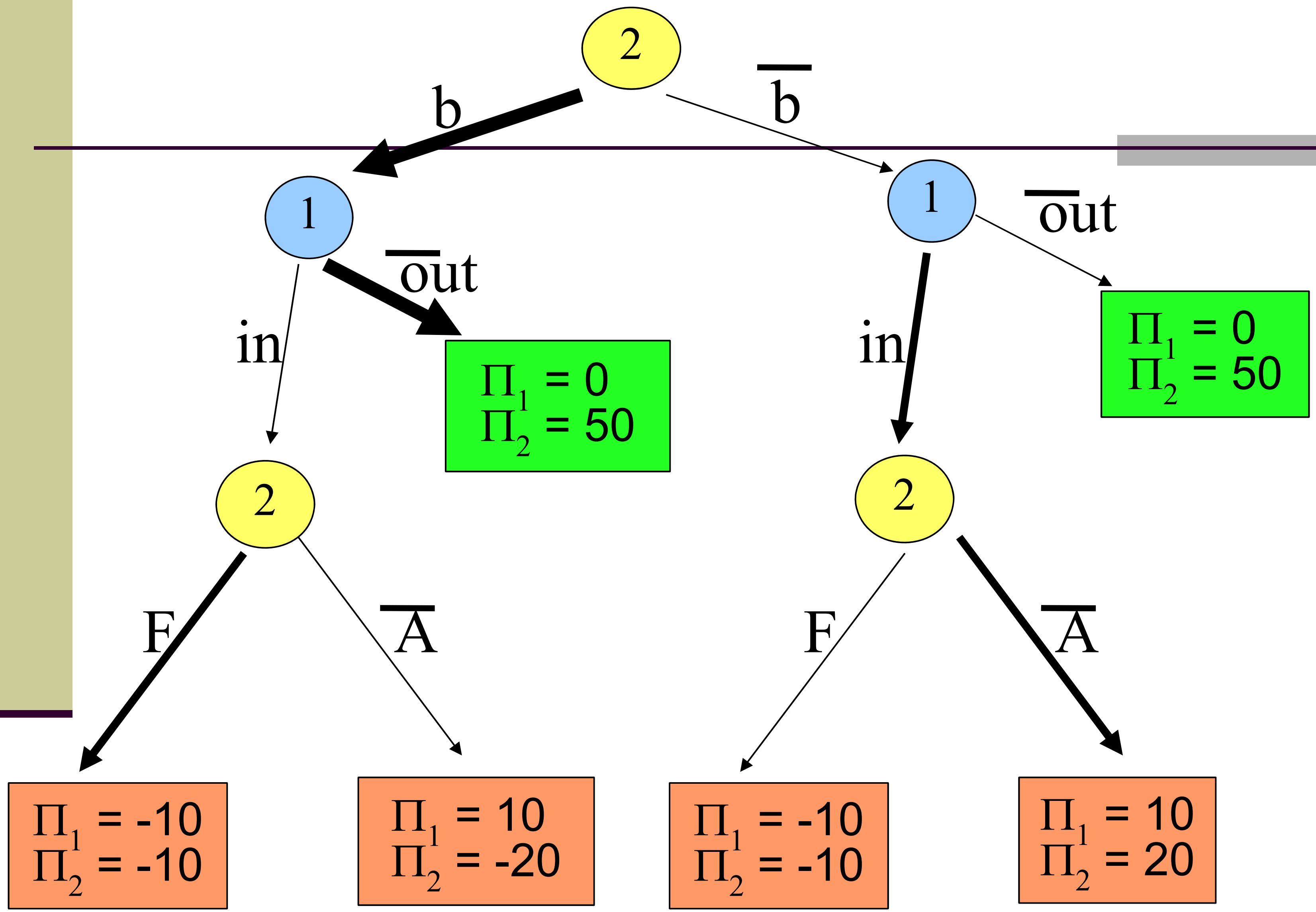


“*non b*”: $\overline{b}$ non impegnarsi a fare Guerra

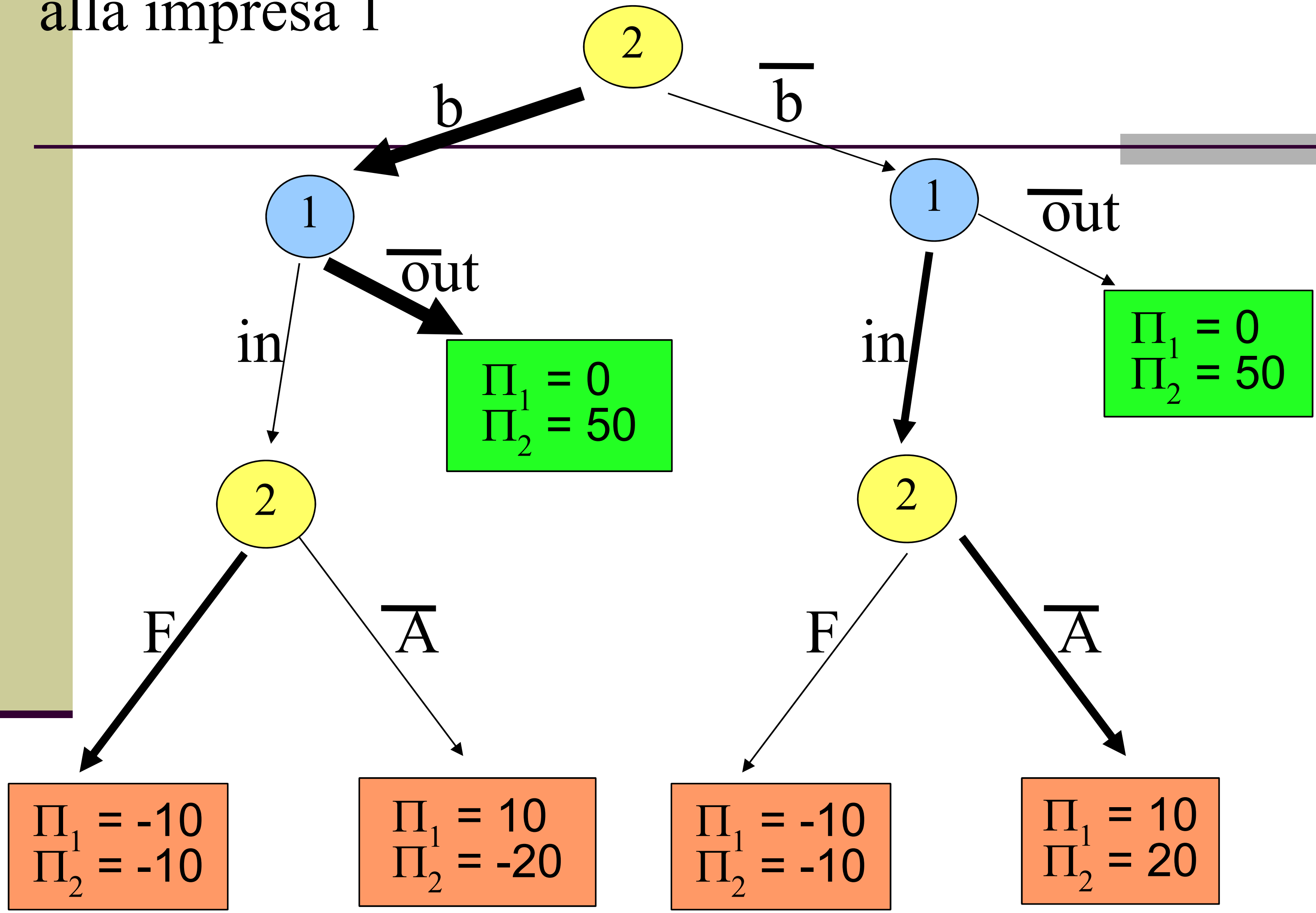


Se l'impresa 2 si impegna e non mantiene, paga una penale

Albero del gioco – soluzione con induzione a ritroso

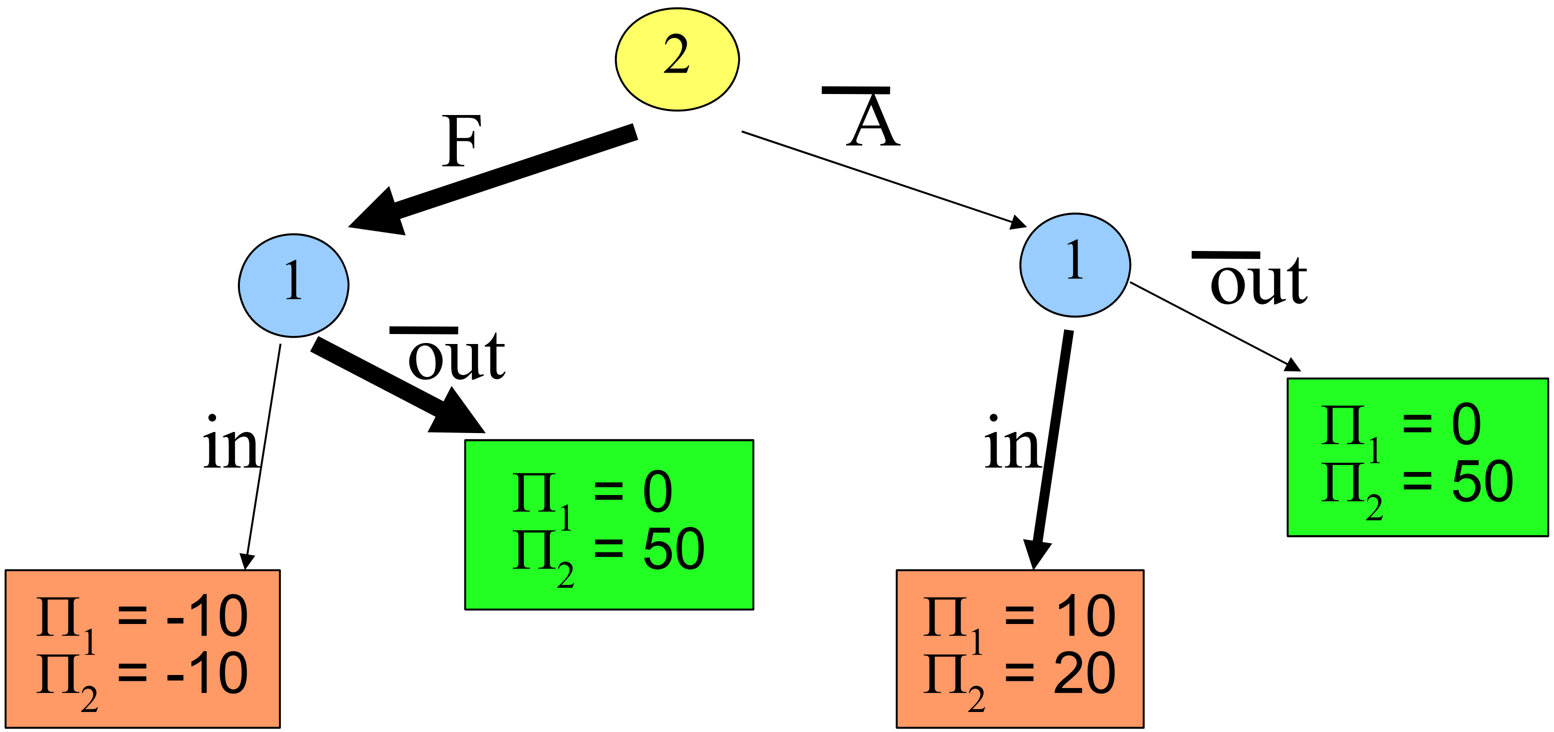


L'impresa 2 si è impegnata in modo vincolante e noto alla impresa 1



La minaccia di ritorsione è diventata credibile e “1” non entra

L'impegno vincolante alla ritorsione può essere presentato anche così:



La minaccia di ritorsione credibile costringe "1" a non entrare

Ultimatum Game

- Two players bargain (anonymously) to divide a fixed amount between them.
- P1 (proposer) offers a division of the “pie”
- P2 (responder) decides whether to accept it
- If accepted both player gets their agreed upon shares
- If rejected players receive nothing.

What do game theorists say?

- Ariel Rubenstein (1982)
  - showed that there exist a unique subgame perfect Nash equilibrium solution to this problem
    - D= $(\pi - \varepsilon , \varepsilon)$

So the rational solution was predicting that proposer should offer the smallest possible share and responder would accept it.

Experimental data is inconsistent !

- Güth, Schmittberger, Schwarze (1983)
  - They did the first experimental study on this game.
  - The mean offer was 37% of the "pie"
- Since then several other studies has been conducted to examine this gap between experiment and theory.
- Almost all show that humans disregard the rational solution in favor of some notion of fairness*.
  - The average offers are in the region of 40-50% of the pie
  - About half of the responders reject offers below 30%