COMPITO DI MICROECONOMIA
Prof. Michele Moretto
22 Gennaio 2020

N.B. Le spiegazioni richieste o quelle che si ritiene utile dare non devono superare le 10 righe.

A) (8 punti) La funzione di produzione di una impresa è inizialmente $Q = L^{1/2}K^{1/2}$. Dopo un intervento sul processo di produzione diventa $Q = L^{1/2} + K^{1/2}$.

1) Calcolate le produttività marginali dei fattori prima e dopo il cambiamento.

2) Pensate che ci sia stato un miglioramento tecnologico? Se no spiegate in modo formale perchè.

3) Il cambiamento di tecnologia porta ad un maggior risparmio di lavoro e/o di capitale? Dimostratelo analiticamente per $Q = 10$ (ponete il costo dei fattori $w = r = 1$)!

B) (6 punti) In un mercato operano due imprese che competono a la Cournot. Le due imprese hanno funzione di costo uguale e pari a $C_i = 50q_i$,$i = 1, 2$. Se le imprese intraprendessero una attività di Ricerca e Sviluppo sul loro processo di produzione potrebbero ridurre il costo marginale di produzione a 30. Il progetto di ricerca costa 1000 e la probabilità di successo è $p = 0.5$. Infine la fuzione di domanda è $Q = 200 - p$.

1) L'impresa 1 ha convenienza ad intraprendere il progetto di ricerca se l'impresa 2 non lo attuasse? (Calcolate sempre il profitto atteso)

2) L'impresa 1 dovrebbe intraprendere il progetto di ricerca se sapesse che l'impresa 2 realizzerà il suo?

3) Poichè la collaborazione fra le imprese può essere vantaggiosa in termini di Ricerca e Sviluppo, l'Agenzia governativa untitrust consente alla due imprese di collaborare tra loro (cioè formare una joint venture) se e solo se le due imprese sivilupperanno un progetto molto ambizioso che può ridurre i costi marginali a 10 ma che costa 5000 euro. Le due imprese realizzeranno il nuovo progetto?

C) (11 punti) Michele consuma Pane e Marmellata e la sua funzione di utilità è $U = x - \frac{3}{y}$.

1) Assumendo p_x e p_y rispettivamente il prezzo delle Pasta e della Marmellata, trovate il paniere ottimale con redditto $I = 6$

2) Calcolate l'elasticità della funzione di domanda di Pasta rispetto al prezzo della Pasta con prezzi $p_x = 1, p_y = 1$ e dimostrate che è maggiore di uno

3) Dimostrate che Michele non soffre di illusione monetaria.

4) Calcolate l'effetto reddito e effetto sostituzione se $p'_x = 3$ e dite se il bene x è un bene inferiore o normale (questo punto vale 5) .

5) Poichè il carattere ordinale delle funzioni di utilità non influisce sulla scelta del paniere ottimale, le funzioni di utilità $U' = \ln(x - \frac{3}{y})$ e $U'' = 15 + 2(x - \frac{3}{y})$ soddisfano questa proprità?

D) (8 punti) Il responsabile del corso di Microeconomia è un fanatico di teoria dei giochi e deve decidere se introdurre tale teoria nel programma del corso (G) oppure no (NG). Il corso però è diventato opzionale, e lo studente Tipo deve decidere se inserire (I) il corso nel proprio piano di studi oppure no (NI).

Se la teoria dei giochi fosse in programma e lo studente scegliesse di iscriversi al corso, l'utilità del Professore sarebbe pari a 10 (quella dello studente Tipo sarebbe 5), mentre l'utilità del professore sarebbe 7 se escludesse la teoria dei giochi e lo studente si iscrivesse (l'utilità dello studente sarebbe 10). Se lo studente decidesse di iscriversi ad un altro corso, la sua utilità sarebbe pari a 7; in questo caso, l'utilità del Professore sarebbe pari a 1, se la teoria dei giochi fosse comunque inserita, e pari a 0 se non lo fosse.

1) Descrite il gioco in forma normale e trovate se ci sono strategie dominanti

2) Trovate l'equilibrio di Nash.

3) Supponete ora che il gioco si svolga in modo sequenziale. In particolare, supponete che il Professore comunichi, in modo irrevocabile, se la teoria dei giochi sarà in programma o meno, prima che lo studente si iscriva. Scrivete il gioco in forma estesa e individuate gli equilibri di Nash di questo gioco, distinguendo tra quelli perfetti e gli altri.

Soluzioni

A)

1) Le produttività marginali dei fattori sono:

$$MP_K = 0.5\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{K}}, \quad MP_L = 0.5\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L}}$$

e nel secondo caso

$$MP_K = 0.5\frac{1}{\sqrt{K}}, \quad MP_L = 0.5\frac{1}{\sqrt{L}}$$

2) Con le stesse quantità di input nel secondo caso si produce di meno. Quindi c'e' stato un peggioramentto tecnologico. La cosa si può dimostrare calcolando i Rendimenti di Scala.

$$\sqrt{(\alpha K)(\alpha L)} = \alpha Q$$

$$\sqrt{\alpha K} + \sqrt{\alpha L} = \alpha^{1/2} Q$$

Nel secondo caso si hanno rendimenti di scala dcrescenti quindi, a parità di aumento degli input, l'impresa produce di meno.

3) Nel primo caso il SMST risulta:

$$SMST_{LK} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{K}{L}$$

nel secondo caso

$$SMST_{LK} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{K^{1/2}}{L^{1/2}} = \sqrt{\frac{K}{L}}$$

Per qualsiasi rapporto capitale lavoro, il SMST è minore nel secondo caso rispetto al primo caso. Quindi se, per esempio, i prezzi dei fattori fossero $w = r = 1$ rispettivamente del lavoro e del capitale la combinazione ottima sarebbe:

Nel primo caso:

$$K = L$$

e pure nel secondo caso

$$K = L$$

Da cui risulta che nel primo caso la domanda di capitale per produrre una certa produzione Q è:

$$K^{1/2}L^{1/2} = K^{1/2}K^{1/2} = K = Q$$

mentre nel secondo caso è:

$$\begin{aligned}
K^{1/2} + L^{1/2} &= K^{1/2} + K^{1/2} = 2K^{1/2} = Q \\
K &= \frac{Q^2}{4}
\end{aligned}$$

da cui si evince che l'impresa nel secondo caso ha bisogno di maggior capitale se $Q = 10$

Lo stesso ragionameto vale per il lavoro.

B)

1) Calcoliamo i profitti attesi per l'impresa 1 se attuasse il progetto mentre l'impresa due no (in questo caso l'impresa due non produce):

$$\begin{aligned}
E(\pi_1) &= (200 - Q)Q - [0.5(50Q) + 0.5(30Q)] - 1000 \\
&= 200Q - Q^2 - 25Q - 15Q - 1000 \\
&= 160Q - Q^2 - 1000
\end{aligned}$$

Da cui risulta che:

$$\frac{dE(\pi_1)}{dQ} = 160 - 2Q = 0 \rightarrow Q^* = 80$$

Il profitto atteso sarebbe

$$E(\pi_1) = 160Q - Q^2 - 1000 = 5400$$

1.bis SE QUALCUNO HA CALCOLATO IL PROFITTO DELL'IMPRESA 1 MENTRE L'IMPRESA 2 PRODUCE CON COSTI MARGINALI 50 VA BENE LO STESSO.

2) Se entrambe attuassero il progetto di riceca i profitti attesi sarebbero:

$$\begin{aligned}
E(\pi_1) &= (200 - q_1 - q_2)q_1 - [0.5(50q_1) + 0.5(30q_1)] - 1000 \\
&= 200q_1 - q_1^2 - q_1q_2 - 25q_1 - 15q_1 - 1000 \\
&= 160q_1 - q_1^2 - q_1q_2 - 1000
\end{aligned}$$

e una fomula simile per l'impresa 2.

Calcoliamo le funzioni di reazione:

$$\frac{dE(\pi_1)}{dq_1} = 160 - 2q_1 - q_2 = 0 \rightarrow q_1 = \frac{160 - q_2}{2}$$

$$q_2 = \frac{160 - q_1}{2}$$

Poichè le imprese sono simmetriche la produzione sarebbe:

$$
\begin{aligned}
q_1 = q_2 &= \frac{160}{3} \\
E(\pi_1) &= 160q_1 - q_1^2 - q_1q_2 - 1000 = 1844.4
\end{aligned}
$$

Quindi la risposta è si!

3) La joint venture è di fatto una collaborazione dove le imprese massimizzano la somma dei loro profitti. Essendo le imprese simmetriche si avrà:

$$
\begin{aligned}
E(\pi_1) + E(\pi_2) &= (200 - q_1 - q_2)q_1 - [0.5(50q_1) + 0.5(10q_1)] \\
&\quad (200 - q_1 - q_2)q_2 - [0.5(50q_2) + 0.5(10q_2)] - 5000 \\
&= (200 - Q)Q - [0.5(50Q) + 0.5(10Q)] - 5000 \\
&= 200Q - Q^2 - 25Q - 5Q - 5000 \\
&= 170Q - Q^2 - 5000
\end{aligned}
$$

Da cui la condizione per un massimo risulta:

$$
170 - 2Q = 0 \rightarrow Q^{**} = 85
$$

e il profitto congiunto

$$
E(\pi_1) + E(\pi_2) = 170Q - Q^2 - 5000 = 2225
$$

Quindi le due imprese non hanno convenienza a formare una joint venture perchè i profitti per ogni impresa sarebbero miniori rispetto al caso precedente.

C) 1) La condizione di equilibrio è data :

$$
\begin{aligned}
SMS_{xy} \equiv \frac{U_x}{U_y} &= \frac{p_x}{p_y} \\
= \frac{1}{\frac{3}{y^2}} &= \frac{p_x}{p_y} \\
&e \\
p_x x + p_y y = 6
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt{3\frac{p_x}{p_y}} \\
x &= \frac{6 - p_y y}{p_x} = \frac{6}{p_x} - \sqrt{3\frac{p_y}{p_x}}
\end{aligned}
$$

2) L'elasticità rispetto al prezzo è data da

$$\varepsilon_x = -\frac{dx}{dp_x}\frac{p_x}{x} = -\left[-\frac{6}{p_x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}p_y^{1/2}p_x^{-3/2}\right]\frac{p_x}{x}$$
$$= \left[\frac{6}{p_x} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{\frac{p_y}{p_x}}\right]\frac{1}{x}$$
$$= \left[6 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right]\left[6 - \sqrt{3}\right]^{-1} > 1$$

3) Michele non soffre di illusione monetaria IN QUANTO se vi è uno stesso aumento % dei pezzi e del reddito non cambia il suo paniere ottimale.

$$y = \sqrt{3\frac{\%p_x}{\%p_y}} = \sqrt{3\frac{p_x}{p_y}}$$
$$x = \frac{6 - p_y y}{p_x} = \frac{\%6}{\%p_x} - \sqrt{3\frac{\%p_y}{\%p_x}} =$$
$$= \frac{6}{p_x} - \sqrt{3\frac{p_y}{p_x}}$$

4) Se $p_x = p_y = 1$ il paniere ottimale è

$$x_1 = 6 - \sqrt{3}, y_1 = \sqrt{3}$$

Mentre se il prezzo sale a $p'_x = 3$ il nuovo paniere è

$$SMS_{xy} \equiv \frac{U_x}{U_y} = \frac{p_x}{p_y}$$
$$= \frac{1}{\frac{3}{y^2}} = \frac{p'_x}{p_y} = 3$$
$$e$$
$$p'_x x + p_y y = 6$$

$$\frac{1}{\frac{3}{y^2}} = 3$$
$$e$$
$$3x + y = 6$$

quindi

$$x_2 = 1,\ y_2 = 3$$

Se il prezzo sale devo calcolare il paniere x_c, y_c che fornisce la stessa utilità prima dell'aumento di prezzo, cioè $U(x_c, y_c) = U(x_1, y_1) = 6 - \sqrt{3} - \frac{3}{\sqrt{3}} = 6 - 2\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} SMS_{xy} &\equiv \frac{U_x}{U_y} = \frac{p_x}{p_y} \\ &= \frac{1}{\frac{3}{y^2}} = \frac{p'_x}{p_y} = 3 \\ &e \\ U(x_c, y_c) &= 6 - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$x_c = 7 - 2\sqrt{3}, y_c = 3,$$

Quindi

$$\begin{aligned} x_c - x_1 &= 7 - 2\sqrt{3} - 6 + \sqrt{3} = 1 - \sqrt{3} < 0 \text{ Effetto sostituzione} \\ x_2 - x_c &= 1 - 7 + 2\sqrt{3} = -6 + 2\sqrt{3} < 0 \text{ Effetto reddito} \end{aligned}$$

Poichè un aumento del prezzo che comporta una diminuzione del reddito reale genera un effetto reddito negativo (diminuisce il consumo del bene x), il bene è normale

Caso Slutsky, In questo caso si calcola il reddito aggiuntivo (compensativo) che Michele dovrebbbe ricevere per essere in grado di acquistare il paniere prima dell'aumento del prezzo.

$$6 + \Delta I = 3(6 - \sqrt{3}) + 1(\sqrt{3}) = 18 - 2\sqrt{3} = 6 + (12 - 2\sqrt{3})$$

Con questo reddito acquisterà il paniere:

$$\begin{aligned} SMS_{xy} &\equiv \frac{U_x}{U_y} = \frac{p_x}{p_y} \\ &= \frac{1}{\frac{3}{y_c^2}} = \frac{p'_x}{p_y} = 3 \\ &e \\ 3x_c + 1y_c &= 18 - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

quindi

$$y_c = 3, \ x_c = \frac{15 - 2\sqrt{3}}{3}$$

Quindi

$$x_c - x_1 = \frac{15 - 2\sqrt{3}}{3} - 3 = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3} < 0 \text{ Effetto sostituzione}$$
$$x_2 - x_c = 1 - \frac{15 - 2\sqrt{3}}{3} = \frac{-12 + 2\sqrt{3}}{3} < 0 \text{ Effetto reddito}$$

4) Entrambe sono trasformazioni monotone e quindi il paniere ottimale non cambia.

D)

1) Forma normale dei gioco

G è strategia dominante per il professore. Lo studente non ha una strategia dominate. Poichè lo studente sa che il prof ha una strategia dominate si aspetterà che la giochi, quindi lui giocherà NI

2) L'Equilibrio di Nash è { G, NI}

3) La forma estesa del gioco è

Gli equilibri di Nash nei sotto giochi sono (G NI) e (NG,I) ma l'unico che è sub-game perfect è (NG,I).