

Esercitazione 6

Esercizio 1

Un rappresentante di commercio sa che c'è una probabilità del 10% che, durante il prossimo volo, la compagnia aerea perda il suo bagaglio contenente tutto il suo prezioso campionario. In caso di perdita del bagaglio è rovinato: la sua ricchezza è zero. Il bagaglio vale 400. In caso di regolare arrivo del bagaglio la sua ricchezza è 400. Prima del viaggio, all'aeroporto, una compagnia di assicurazioni offre la completa copertura di questo rischio per la cifra di 40. Inoltre il bagaglio è troppo ingombrante per essere portato a bordo.

(a) Determinare se la compagnia sta offrendo una polizza ad un premio perfettamente concorrenziale. Per favore spiegare il ragionamento svolto.

Si: il premio è pari alla probabilità di accadimento del danno moltiplicato per il valore monetario del danno

(b) Se il rappresentante di commercio non accetta l'assicurazione, quale è il valore atteso della sua ricchezza, data la situazione incerta in cui si viene a trovare.

$$9/10(400)$$

(c) Supponiamo, per la parte restante di questo problema, che la funzione di utilità del rappresentante di commercio si del tipo $U(w) = \sqrt{w}$ dove w indica la ricchezza (il solo bagaglio). L'individuo in questione è avverso, neutrale o amante del rischio? Spiegare il ragionamento svolto e illustrare la risposta con un grafico. Determinare il coefficiente di avversione al rischio e stabilire se è costante, crescente, decrescente o altro.

Avverso al rischio coefficiente di avversione Arrow-Pratt

$$\frac{dw^{\frac{1}{2}}}{dw} = \frac{1}{2\sqrt{w}} = \frac{1}{2}w^{-\frac{1}{2}} \text{ is true}$$

$$\frac{d\frac{1}{2\sqrt{w}}}{dw} = -\frac{1}{4w^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4}w^{-\frac{3}{2}} \text{ is true}$$

$$\frac{2w - \frac{3}{2}}{4w^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}w^{-1} \text{ is true}$$

(d) L'individuo accetterà l'offerta della compagnia di assicurazione nei termini di cui sopra? Per favore illustrare il vostro ragionamento.

si

(e) Qual è l'utilità attesa del rappresentante di commercio se non accetta la polizza di cui sopra? Per favore illustrare il vostro ragionamento. Determinare inoltre il reddito equivalente certo.

$$\frac{9}{10}\sqrt{400} = 18$$

equivalente certo

$$18 = \sqrt{x}, \text{ Solution is: } 324$$

(f) Qual'è il massimo premio che il rappresentante di commercio sarebbe disponibile a pagare per assicurarsi completamente nei confronti del rischio di perdita del bagaglio? Per favore illustrare il vostro ragionamento.

$$400 - 324 = 76$$

Esercizio 2

Un consumatore ha una funzione di utilità attesa data da $u(w) = \ln(w)$, dove w indica la sua ricchezza. Gli viene offerta la possibilità di scommettere sul lancio di una moneta che ha una probabilità p di venire testa. Se scommette la cifra x avrà ricchezza $w + x$ se viene fuori testa e $w - x$ se viene fuori croce. (a) Si trovi il valore ottimale di x in funzione di p . (b) Qual è il valore ottimale di x quando $p = \frac{1}{2}$? Si spieghi il ragionamento svolto.

$$\max_x p \ln(w + x) + (1 - p) \ln(w - x)$$

FOC

$$\frac{p}{w+x} - \frac{1-p}{w-x} = 0$$

$$(w+x)(1-p) = p(w-x)$$

$$x = w(2p - 1)$$

se $p \leq \frac{1}{2}$ allora $x = 0$. Infatti è avverso al rischio!

Esercizio 3

Un consumatore ha una funzione di utilità attesa data da $u(w) = \sqrt{w}$, e una ricchezza iniziale pari a 64. Gli viene offerta la possibilità di scommettere su una lotteria nella quale la probabilità di vincita è pari a p . Il biglietto della lotteria costa 36 e in caso di vincita il giocatore riceve una somma pari a 72.

(a) Il consumatore giocherà la lotteria se $p = 1/2$? Perché?

(b) Quale è il valore di p tale per cui il consumatore è indifferente tra giocare la lotteria e non giocarla?

Soluzione

1) Certamente no perchè è avverso al rischio, infatti

$$\frac{1}{2}\sqrt{64 - 36 + 72} + \frac{1}{2}\sqrt{64 - 36} = 7.6458 < 8$$

2) La probabilità si trova risolvendo la seguente equazione

$$p(\sqrt{64 + 36}) + (1 - p)(\sqrt{64 - 36}) = 8$$

$$\text{La soluzione è: } \left\{ p = \frac{\sqrt{7}-4}{\sqrt{7}-5} \right\} = \{p = 0.57524\}.$$

Esercizio 4

Un individuo ha una funzione di utilità bernoulliana $u(x) = \sqrt{x}$, dove x indica la sua ricchezza totale. Egli ha la possibilità di fare una scommessa su una corsa di cavalli. Una puntata costa 10 euro e in caso di vincita lo scommettitore riceve 69 euro. Il nostro scommettitore ha la possibilità di puntare sulla vittoria sul noto purosangue Natostanco, il quale ha una probabilità pari a $\frac{1}{3}$ di arrivare primo. Supponete che lo scommettitore abbia una ricchezza iniziale pari a 110.

(a) Lo scommettitore acquista il biglietto? (3 punti)

(b) Quale è il prezzo minimo al quale sarebbe disposto a rivendere il biglietto? (2 punti)

(c) Quale è il suo premio al rischio per questa scommessa? (2 punti)

Risposte

$$1) \frac{1}{3}\sqrt{169} + \frac{2}{3}\sqrt{100} = 11 > \sqrt{110} = 10.48809$$

$$2) \frac{1}{3}\sqrt{169} + \frac{2}{3}\sqrt{100} = \sqrt{100 + p}, \text{ che implica } p = 21, \text{ e quindi } CE = 121.$$

$$3) \frac{1}{3}(169) + \frac{2}{3}(100) - 121 = 2$$

Esercizio 5

Un agricoltore sa che c'è una probabilità del 8% di una grandinata che distrugga completamente il raccolto. In caso di distruzione del raccolto è rovinato: la sua ricchezza è zero. Il raccolto vale 400. In caso di vendita del raccolto la sua ricchezza è 400. Una compagnia di assicurazioni, neutrale al rischio, offre la completa copertura di questo rischio per la cifra di 34.

(a) Determinare se la compagnia sta offrendo una polizza ad un premio perfettamente concorrenziale. (1 punto)

Risposta: Il premio offerto dall'assicurazione non \tilde{A} concorrenziale perché il valore atteso della perdita \tilde{A} pari a 32, quindi i profitti attesi dell'assicurazione non sono pari a zero.

(b) Se l'agricoltore non accetta l'assicurazione, quale è il valore atteso della sua ricchezza, data la situazione incerta in cui si viene a trovare. (1 punto)

Risposta: il valore atteso della sua ricchezza \tilde{A} pari a 368

Supponiamo, per la parte restante di questo problema, che la funzione di utilità dell'agricoltore sia del tipo $u(w) = \sqrt{w}$ dove w indica la ricchezza.

(c) L'agricoltore accetterà l'offerta della compagnia di assicurazione nei termini di cui sopra? Spiegate il vostro ragionamento (2 punti)

Risposta: Sì in quanto l'utilità attesa in assenza di assicurazione \tilde{A} minore rispetto all'utilità in presenza di assicurazione.

(d) Qual è l'utilità attesa dell'agricoltore se non accetta la polizza di cui sopra? Determinate inoltre il reddito equivalente certo. (3 punti)

Risposta: se non accetta l'assicurazione l'utilità attesa \tilde{A} pari a $2\%\sqrt{200} + 8\%\sqrt{0} = 18,40$. L'equivalente certo \tilde{A} il reddito che mi consente di avere con certezza un'utilità di 18,40, ed \tilde{A} pari a 338,56

(e) Qual'è il massimo premio che l'agricoltore sarebbe disponibile a pagare per assicurarsi completamente nei confronti del rischio di perdita del raccolto? (3 punti)

Risposta: il massimo che sarebbe disposto a pagare \tilde{A} $400 - 338,56 = 61,44$

Esercizio 6

Il ragioniere Fantozzi deve decidere se acquistare un biglietto della lotteria natalizia aziendale (la Serpelloni Mazzanti S.p.A.). Il prezzo di un biglietto è pari a 5 euro e vi sono 200 biglietti. Vi è un unico premio del valore di 1100 euro. Il ragioniere Fantozzi è avverso al rischio e la sua funzione di utilità è \sqrt{w} dove w è la sua ricchezza totale. La ricchezza iniziale di Fantozzi è pari a 400 euro.

(i) Fantozzi desidera acquistare il biglietto? Argomentate la vostra risposta.

Risposta: Fantozzi non desidera acquistare il biglietto perché il valore atteso dell'utilità in caso di acquisto è pari a $\frac{1}{200}\sqrt{1495} + \frac{199}{200}\sqrt{395} = 19,968$, ed è minore del valore dell'utilità in caso di non acquisto che è pari a $\sqrt{400} = 20$

(ii) Quale è il massimo prezzo al quale il ragioniere Fantozzi è disposto ad acquistare il biglietto?

Risposta: il massimo prezzo (pa) che il ragioniere Fantozzi è disposto a pagare per il biglietto si ricava dalla risoluzione della seguente equazione: $\frac{1}{200}\sqrt{1500 - pa} + \frac{199}{200}\sqrt{400 - pa} = \sqrt{400}$

(ii) Se Fantozzi possiede un biglietto (rubato al ragioniere Filini) quale è il prezzo minimo al quale è disposto a rivendere il biglietto?

Risposta: il prezzo (pv) al quale il ragioniere Fantozzi è disposto a rivendere il biglietto si ricava dalla risoluzione della seguente equazione: $\frac{1}{200}\sqrt{1500} + \frac{199}{200}\sqrt{400} = \sqrt{400 + pv}$, da cui si ricava $pv = 3,75$

Esercizio 7

Un imprenditore deve decidere se acquistare un'attività imprenditoriale. Il prezzo al quale il vecchio proprietario cede l'attività è pari a 250. L'imprenditore stima che la distribuzione di probabilità dei futuri ricavi (al lordo del prezzo di acquisto) è la seguente: con probabilità pari a $\frac{2}{5}$ ricavi attesi pari a 800, con probabilità $\frac{1}{5}$ ricavi attesi pari a 250, ed infine con probabilità complementare ricavi attesi negativi (ossia perdite) pari a -100. L'imprenditore ha una funzione di utilità $u(x) = \sqrt{x}$ ed una ricchezza iniziale pari a 400.

1) L'imprenditore acquista o no questa attività? 3 punti

2) Quale è il prezzo massimo al quale è disposto ad acquistare l'attività? Mostrate solo l'equazione che vi permette di calcolare tale prezzo (2 punti)

3) Supponete ora che l'attuale proprietario (che stima nella stessa misura del potenziale acquirente i profitti attesi dell'attività, ed ha anche egli una funzione di utilità bernoulliana $u(x) = \sqrt{x}$) abbia una ricchezza iniziale pari a 200. Quale è il prezzo minimo al quale l'attuale proprietario è disposto a vendere la sua attività. (3 punti)

SOLUZIONE

(i) Se decide di acquistare la sua utilità attesa è pari a $\frac{2}{5}\sqrt{400 + 800 - 250} + \frac{1}{5}\sqrt{400 + 250 - 250} + \frac{2}{5}\sqrt{400 - 100 - 250} = 19.157$

se non acquista la sua utilità attesa è $\sqrt{400} = 20.0$.

L'imprenditore sceglie di non acquistare.

(ii) $0.4\sqrt{400 + 800 - x} + 0.2\sqrt{400 + 250 - x} + 0.4\sqrt{400 - 100 - x} = 20$

(iii) $\frac{2}{5}\sqrt{200 + 800} + \frac{1}{5}\sqrt{200 + 250} + \frac{2}{5}\sqrt{200 - 100} = 20.892$

$(20.892)^2 = 436,48$

Il prezzo minimo è 236,48

Esercizio 8

Un investitore che ha una funzione di utilità $U(w) = \sqrt{w}$ deve decidere come investire la sua ricchezza iniziale pari a 100. Vi sono due investimenti disponibili: l'investimento A offre un rendimento pari al 16% con probabilità $(1/3)$ ed un rendimento pari al 5% con probabilità $(2/3)$. L'investimento B, invece, offre un rendimento certo pari al 10%. L'investitore deve decidere come investire la sua ricchezza. Si assuma che l'investimento non sia frazionabile (ossia deve scegliere tra investire in A o in B).

a) Quale tipo di attitudine nei confronti del rischio presenta l'investitore? Perché? Calcolate l'equivalente certo di ciascun investimento.

$$\sqrt{116\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}\sqrt{105} = \sqrt{x}, \text{ Solution is: } \left(\frac{2}{3}\sqrt{29} + \frac{2}{3}\sqrt{105}\right)^2 = 108.61$$

$$\sqrt{110} = \sqrt{x} \text{ da cui } x = 110$$

b) A quanto ammonta il premio al rischio per ciascun investimento?

$$116\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)105 = 108.67$$

$$108.67 - 108.61 = 0.06$$

c) Quale è l'utilità attesa dell'investitore quando fa la scelta di investimento A e quando sceglie B? Quale è l'investimento preferito dall'investitore?

$$\sqrt{108.61} = 10.422 \text{ per l'investimento A}$$

$$\sqrt{110} = 10.488 \text{ per l'investimento B}$$