Esercitazione 4

Esercizio 1

La curva di domanda di un dato bene è perfettamente inelastica e pari a $y = 100$. Solo due imprese hanno la tecnologia per produrre il bene. La funzione di costo delle due imprese è $C(y) = \frac{1}{2}y^2 + 50y$. Le imprese scelgono simultaneamente il prezzo e rimangono sul mercato solamente se conseguono profitti positivi. Qualora le imprese scelgano lo stesso prezzo, la domanda si ripartisce equamente tra le imprese. Inoltre supponete che le imprese abbiano l'obbligo di soddisfare *tutta* la domanda che si rivolge a loro.

Tracciare in un grafico in scala la curva di costo medio, di costo marginale, la curva di domanda di mercato e la curva di domanda residuale per l'impresa 1, quando l'impresa 2 sceglie il prezzo $p_2 = 175$ e quando sceglie il prezzo $p_2 = 125$.

Soluzione Esercizio 1

Il costo marginale è $MC = 50 + y$ mentre il costo medio è $AC = 50 + \frac{1}{2}y$. Poichè i beni prodotti dall'impresa 1 e 2 sono identici, la domanda di mercato per l'impresa 1 sarà $y = 0$ se $p_1 > p_2$,$y = 50$ se $p_1 = p_2$ e infine $y = 100$ se $p_1 < p_2$.
La curva di domanda di mercato è una retta verticale posta a $y = 100$ e la curva di domanda residuale per l'impresa 1 è composta da:
1) il segmento dell'asse delle ordinate sopra il livello p_2;
2) un punto di coordinate $(50, p_2)$;
3) il segmento della curva di domanda di mercato sotto il livello livello p_2.

Esercizio 2

La tecnologia di un'impresa price-taker è caratterizzata dalla funzione di produzione $y = 2L + K$. Siano i prezzi dei fattori di produzione w e r rispettivamente. Sia inoltre $r = 1$.

a) L'impresa vuole produrre la quantità $\overline{Y}$ al minimo costo. Determinare le domande condizionate dei due fattori di lungo periodo.

b) Determinare la funzione di costo di lungo periodo, la funzione di costo medio e marginale.

c) Determinare la funzione di offerta dell'impresa di lungo periodo (attenzione: la tecnologia ha rendimenti di scala costanti!).

Soluzione Esercizio 2

In questa tecnologia i fattori sono perfetti sostituti.

a) Il saggio marginale di sostituzione tecnica $SMST_{KL}$ è pari a 2.
Se $SMST_{KL} < w$ la soluzione del problema di minimizzazione dei costi è l'intercetta verticale, per cui $L^* = 0$ e $K^* = \overline{Y}$. Se $SMST_{KL} > w$ la soluzione è l'intercetta orizzontale cioé $L^* = \frac{1}{2}\overline{Y}$ e $K^* = 0$. Infine se $SMST_{KL} = w$ ogni punto dell'isoquanto è indifferente ovvero la scelta è $(L^*, K^* = \overline{Y} - 2L^*)$

b) la curva di costo di lungo periodo $C(y)$ è

$$\begin{cases} y \quad se \quad w \geq 2 \\ \frac{1}{2}wy \quad se \quad w < 2 \end{cases} \tag{1}$$

La curva di costo medio e di costo marginale saranno $AC = MC$

$$\begin{cases} 1 \quad se \quad w \geq 2 \\ \frac{1}{2}w \quad se \quad w < 2 \end{cases} \tag{2}$$

c) poiché i costi marginali sono sempre costanti, l'impresa produce "infinito" se $p > MC$, "indeterminato" se $p = MC$ e zero se $p < MC$.

Esercizio 3

Un'impresa ha funzione di produzione pari a $Y = \sqrt{K} + \sqrt{L}$ dove K e L sono i fattori di produzione capitale e lavoro. Non tutte le combinazioni di capitale e lavoro sono disponibili sul mercato. Infatti, il capitale è razionato e il massimo livello di capitale ottenibile è $\overline{K}$. I prezzi di capitale e lavoro sono $r = w = 1$

a) Determinare la funzione di costo totale di lungo periodo (Hint: attenzione!)

b) Sia $\overline{K} = 9$ e sia il prezzo dell' output pari a $p = 10$. Determinare il livello di produzione che massimizza i profitti e i profitti corrispondenti.

c) il governo valuta la possibilità di allentare il razionamento di capitale sussidiando le banche. Di quanto aumenta la produzione se il governo espande $\overline{K}$ fino a 16?

d) continuando il punto c), di quanto aumenta la produzione se il governo espande $\overline{K}$ fino a 25?

Soluzione Esercizio 3

a) L'impresa per espandere la produzione deve acquistare più lavoro e più capitale e deve combinarli in modo efficiente. Per livelli bassi di produzione, non ci sono vincoli alla combinazione efficiente dei fattori, ma per livelli di produzioni relativamente elevati, la quantità di capitale necessaria per avere una combinazione efficiente non è disponibile, a causa del razionamento.

Si ha combinazione efficiente se

$$SMST_{KL} = \frac{w}{r}$$

ovvero se

$$\sqrt{\frac{K}{L}} = 1$$

che implica

$$K = L$$

Per produrre in modo efficiente si deve quindi usare la stessa quantità di capitale e lavoro. Ne consegue che il massimo livello di produzione per cui si può avere combinazione efficiente è

$$\overline{Y} = \sqrt{\overline{K}} + \sqrt{L^*}$$

con

$$L^* = \overline{K}$$

Quindi $\overline{Y} = 2\sqrt{\overline{K}}$.

Per tutti i livelli di produzione $Y \leqslant \overline{Y}$ la domanda condizionata di fattori è $K^* = L^* = \frac{Y^2}{4}$ e la funzione di costo di lungo periodo è

$$C(Y) = \frac{Y^2}{2}$$

Per tutti i livelli di produzione $Y > \overline{Y}$ non è possibile avere combinazione efficiente. Si deve allora usare la massima quantità di capitale disponibile $\overline{K}$ e utilizzare tanto lavoro quanto basta per produrre Y. Formalmente, la domanda condizionata di fattori è allora

$$\begin{aligned} K^* &= \overline{K} \\ L^* &= \left(Y - \sqrt{\overline{K}}\right)^2 \end{aligned}$$

La corrispondente funzione di costo di lungo periodo è

$$C(Y) = \overline{K} + \left(Y - \sqrt{\overline{K}}\right)^2$$

b) con $\overline{K} = 9$ la funzione di costo di lungo periodo $C(Y)$ diventa:

$$\begin{cases} \frac{Y^2}{2} \quad se \quad Y \leqslant 6 \\ 9 + (Y-3)^2 \quad se \quad Y > 6 \end{cases} \tag{3}$$

Il costo marginale MC è

$$\begin{cases} Y \quad se \quad Y \leqslant 6 \\ 2\,(Y-3) \quad se \quad Y > 6 \end{cases} \tag{4}$$

La condizione di massimo profitto $p = MC$ si verifica quindi nel secondo tratto della funzione di costo marginale

$$10 = 2\,(Y-3)$$

e quindi la produzione ottimale è

$$Y^* = 8$$

I profitti corrispondenti sono

$$\Pi = 80 - \left(9 + (8-3)^2\right) = 46$$

c) Se il governo espande la disponibilità di capitale fino a $\overline{K} = 16$ la funzione di costo $C(y)$ diventa

$$\begin{cases} \frac{Y^2}{2} \quad se \quad Y \leqslant 8 \\ 16 + (Y-4)^2 \quad se \quad Y > 8 \end{cases} \tag{5}$$

e la funzione di costo marginale MC

$$MC = \{.Y \quad se \quad Y \leqslant 8 2\,(Y-4) \quad se \quad Y > 8$$

Ancora la condizione $p = MC$ si verifica quindi nel secondo tratto della funzione e la produzione corrispondente è

$$Y^* = 9$$

con profitti pari a

$$\Pi = 90 - \left(16 + (9-4)^2\right) = 49$$

d) Espandendo ulteriormente il capitale fino a $\overline{K} = 25$, la funzione di costo $C(y)$ diventa

$$\begin{cases} \frac{Y^2}{2} \quad se \quad Y \leqslant 10 \\ 25 + (Y-5)^2 \quad se \quad Y > 10 \end{cases} \tag{6}$$

e la funzione di costo marginale MC

$$\left\{ \begin{array}{cc} Y \;\; se & Y \leqslant 10 \\ 2\,(Y-5) \;\; se & Y > 10 \end{array} \right. \tag{7}$$

Ora la condizione $p = MC$ si verifica quindi nel primo tratto della funzione di costo marginale e la produzione corrispondente è

$$Y = 10$$

con profitti pari a

$$\Pi = 100 - \left(\frac{10^2}{2}\right) = 50$$

Esercizio 4

Un'impresa ha funzione di produzione $F(L,K) = (L^\rho + K^\rho)^{\frac{1}{2\rho}}$ con $\rho < 1$. Siano w e r i prezzi del lavoro L e del capitale K rispettivamente.

a) Determinare le domande condizionate di fattori produttivi.

b) Determinare la funzione di costo di lungo periodo.

c) Sia p il prezzo del prodotto finito. Per quali valori dei parametri l'impresa deve cessare l'attività?

d) Determinare il livello di produzione che massimizza il profitto.

Soluzione Esercizio 4

La condizione di tangenza è $SMS_{KL} = \left(\frac{L}{K}\right)^{\rho-1} = \frac{w}{r}$ da cui $L = \left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} K$. Sostituendo nella funzione di produzione si ha

$$Y = \left(\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} K^\rho + K^\rho\right)^{\frac{1}{2\rho}} = \left[\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + 1\right]^{\frac{1}{2\rho}} K^{\frac{1}{2}}$$

a) le domande condizionate di fattori sono:

$$K^* = \frac{1}{\left[\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + 1\right]^{\frac{1}{\rho}}} Y^2$$

e

$$L^* = \frac{\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left[\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + 1\right]^{\frac{1}{\rho}}} Y^2$$

b) La funzione di costo è

$$C(Y) = \frac{w\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left[\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + 1\right]^{\frac{1}{\rho}}} Y^2 + \frac{r}{\left[\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + 1\right]^{\frac{1}{\rho}}} Y^2 = \Omega Y^2$$

c) $MC = 2\Omega Y \quad AC = \Omega Y$. Il costo medio minimo è zero. Quindi per ogni p positivo esistono sempre livelli di produzione per cui $AR > AC$.

d) il profitto è

$$\pi = pY - \Omega Y^2$$

il livello di produzione che max il profitto è

$$Y = \frac{p}{2\Omega}$$

Esercizio 5

Un'impresa prende i prezzi di input e output come dati. La sua funzione di produzione è $Y = L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{4}}$ dove L sono le unità di lavoro e K le unità di capitale. Il prezzo del lavoro è w, il prezzo del capitale è $r = 1$ e il prezzo dell'output è p.

a) Sul mercato operano 8 imprese uguali. Determinare la curva di domanda di lavoro dell'industria e la curva di offerta dell'industria.

b) La curva di domanda di mercato per il bene Y è data da $p = 200 - aY$, dove a è un parametro che cattura la pendenza della domanda. Determinare l'equilibrio sul mercato del prodotto e determinare quanto ciascuna impresa produce.

c) Sul mercato del lavoro opera un sindacato monopolista che determina il salario prendendo la domanda il lavoro delle imprese come data. L'obiettivo del sindacato è quello di massimizzare una sua propria funzione di utilità che dipende sia dal salario che dalla quantità di lavoro effettivamente occupata dalle imprese a quel salario. Sia questa utilità data da $U = \min[L^{\frac{1}{2}}, w^{\frac{1}{4}}]$. Quale combinazione di lavoro e salario sceglierà il sindacato? Che relazione c'è tra la domanda del bene finito (il parametro a in pratica) e il salario che il sindacato riesce a spuntare? Commentare.

Soluzione Esercizio 5

a) La curva di domanda di lavoro dell'industria è la somma orizzontale della curva di domanda derivata di lavoro delle imprese. Per una data impresa la domanda derivata deriva dal problema di massimo profitto:

$$\max_{L,K} pL^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{4}} - wL - K$$

Dalle condizioni di primo ordine si ottiene

$$L^* = \frac{p^2}{16w^{\frac{3}{2}}}$$

$$K^* = \frac{p^2}{16w^{\frac{1}{2}}}$$

per cui la curva di domanda di lavoro dell'industria è pari a

$$L^D = 8L^* = 8\frac{p^2}{16w^{\frac{3}{2}}} = \frac{p^2}{2w^{\frac{3}{2}}}$$

) La curva di offerta dell'impresa si può ottenere calcolando la curva di costo totale e poi prendendo la curva di costo marginale, oppure sostituendo direttamente L^* e K^* nella funzione di produzione. Seguendo quest'ultima strada si ottiene

$$Y^* = \left(\frac{p^2}{16w^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{p^2}{16w^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{p}{4w^{\frac{1}{2}}}$$

e l'offerta dell'industria è pari a

$$Y^S = 8Y^* = \frac{2p}{w^{\frac{1}{2}}}$$

b) Sul mercato del bene l'equilibrio è dato da domanda=offerta

$$\{.Y = \frac{2p}{w^{\frac{1}{2}}} p = 200 - aY$$

L'equilibrio è

$$p^* = \frac{200w^{\frac{1}{2}}}{w^{\frac{1}{2}} + 2a}$$

$$Y^* = \frac{400}{w^{\frac{1}{2}} + 2a}$$

e la produzione di ciascuna impresa è $y_i = \frac{1}{8}Y^* = \frac{50}{w^{\frac{1}{2}}+2a}$

c) Il sindacato vuole scegliere un punto sulla curva di domanda di lavoro dell'industria che massimizza la sua utilità. Date le preferenze del sindacato, le sue curve di indifferenza sono curve ad angolo. Il luogo dei punti d'angolo si ottiene eguagliando gli argomenti della funzione minimo. Quindi la soluzione del sindacato è data dal sistema:

$$L = \frac{(p^*)^2}{2w^{\frac{3}{2}}} = \frac{200^2}{2w^{\frac{1}{2}}(w^{\frac{1}{2}} + 2a)^2}$$

$$L^{\frac{1}{2}} = w^{\frac{1}{4}}$$

Sostituendo si ottiene

$$\frac{200}{\sqrt{2}w^{\frac{1}{4}}(w^{\frac{1}{2}} + 2a)} = w^{\frac{1}{4}}$$

ovvero

$$w + 2aw^{\frac{1}{2}} - 100\sqrt{2} = 0$$

Risolvendo $w^{\frac{1}{2}}$, le soluzioni sono

$$w^{\frac{1}{2}} = -a \pm \sqrt{a^2 + 100\sqrt{2}}$$

Solo una soluzione è accettabile ovvero

$$w^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2 + 100\sqrt{2}} - a$$

La derivata del termine di destra rispetto ad a produce

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 100\sqrt{2}}} - 1$$

che è sicuramente negativa. Quindi il salario che il sindacato può spuntare decresce al crescere di a. Al crescere di a infatti sia la produzione che il prezzo del prodotto finito sono inferiori (perché la domanda di bene finito si riduce) come pure la domanda di lavoro.Quindi c'è meno "spazio" per ottenere salari elevati.

Esercizio 6

Un'impresa ha la seguente funzione di produzione: $F(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$ dove x_1 e x_2 sono le quantità di fattori di produzione. I prezzi dei fattori sono w_1 e w_2.

a) determinare i rendimenti di scala di questa tecnologia

b) determinare la funzione di costo di lungo periodo dell'impresa.

c) determinare le funzioni di costo medio e di costo marginale.

d) determinare la curva di offerta di lungo periodo di questa impresa

e) determinare la curva di offerta di lungo periodo dell'industria

f) la curva di domanda di mercato per il bene prodotto dall'impresa è $p = 100 - Y$. Determinare l'equilibrio di mercato, la quantità prodotta da ciascuna impresa e il numero di imprese che operano sul mercato. (Hint: attenzione a che rendimenti di scala ha l'impresa e a cosa questi significano)

Soluzione Esercizio 6

a) i rendimenti di scala sono costanti:

$$(\lambda x_1)^{1/2} (\lambda x_2)^{1/2} = \lambda x_1^{1/2} x_2^{1/2}$$

b) la funzione di costo di lungo periodo si ottiene dal problema di minimizzazione dei costi:

$$\begin{aligned} & \min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2 \\ s.v.\ \overline{Y} &= x_1^{1/2} x_2^{1/2} \end{aligned}$$

Questo problema equivale a trovare un punto di tangenza sull'isoquanto $\overline{Y}$. Ovvero, si risolve il sistema

$$\begin{cases} SMST_{x_2 x_1} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{w_1}{w_2} \\ \overline{Y} = x_1^{1/2} x_2^{1/2} \end{cases}$$

L'allocazione efficiente è

$$\begin{aligned} x_1^* &= \sqrt{\frac{w_2}{w_1}}Y \\ x_2^* &= \sqrt{\frac{w_1}{w_2}}Y \end{aligned}$$

La funzione di costo di lungo periodo è quindi

$$C(Y) = w_1\sqrt{\frac{w_2}{w_1}}Y + w_2\sqrt{\frac{w_1}{w_2}}Y = 2\sqrt{w_1 w_2}Y$$

c) le funzioni di costo medio e costo marginale sono $AC(Y) = MC(Y) = 2\sqrt{w_1 w_2}$

d) la curva di offerta di lungo periodo dell'impresa è

$$Y = \begin{cases} 0 \;\; se \;\; p < 2\sqrt{w_1 w_2} \\ [0, +\infty) \;\; se \;\; p = 2\sqrt{w_1 w_2} \\ +\infty \;\; se \;\; p > 2\sqrt{w_1 w_2} \end{cases}$$

e) la curva di offerta di lungo periodo dell'industria è data dalla condizione $p = AC_{\min}$. Essa è quindi $p = 2\sqrt{w_1 w_2}$. A questo prezzo l'industria produce qualsiasi quantità.

f) l'equilibrio di mercato di lungo periodo è dato dall'uguaglianza tra domanda e offerta, ovvero

$$\begin{cases} p = 100 - Y \\ p = 2\sqrt{w_1 w_2} \end{cases}$$

che dà

$$Y^* = 100 - 2\sqrt{w_1 w_2} \;\; e \;\; p^* = 2\sqrt{w_1 w_2}$$

La quantità prodotta da ciascuna impresa è quindi ideterminata come pure il numero di imprese operanti nell'industria in equilibrio, dato che al prezzo di equilibrio ogni impresa offre qualsiasi quantità.

Esercizio 7

Un'impresa agricola necessita di tre input di produzione, lavoro L, capitale K e terra T. I prezzi dei fattori sono rispettivamente $w = 1$, $r = 1$, $k = 1$. La funzione di produzione è data da $F(L, K, T) = L^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}}T^{\frac{1}{2}}$.

a) nel breve periodo il livello di terra è fissato a $T = 10$. Determinare la curva di costo di breve periodo.

b) determinare la curva di costo di lungo periodo.

c) determinare la curva di offerta dell'impresa di lungo periodo.

Soluzione Esercizio 7

a) nel breve periodo la funzione di produzione è

$$Y = \sqrt{10} L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{4}} \tag{8}$$

Il $SMST_{KL} = \frac{K}{L}$. La condizione di minimizzazione dei costi è quindi

$$\{ . \frac{K}{L} = 1 Y = \sqrt{10} L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{4}} \tag{9}$$

per cui la combinazione efficiente dei fattori è $L = K = \frac{Y^2}{10}$ e la funzione di costo di breve periodo è

$$C_{SR}(Y) = \frac{Y^2}{5} \tag{10}$$

b) nel lungo periodo tutti i fattori sono liberi. Il problema da risolvere è

$$\min_{L,K,T} L + K + T \tag{11}$$

$$s.v. Y = L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{4}} T^{\frac{1}{2}} \tag{12}$$

Si può procedere sia geometricamente sia applicando il metodo di Lagrange. Seguendo la prima strada si ha

$$\begin{cases} SMST_{KL} = \frac{K}{L} = 1 \\ SMST_{TL} = \frac{1}{2}\frac{T}{L} = 1 \\ Y = L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{4}} T^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{13}$$

Sostituendo per L nel vincolo di produzione si ha

$$L = \frac{Y}{\sqrt{2}} \quad K = \frac{Y}{\sqrt{2}} \quad T = \frac{2Y}{\sqrt{2}} \tag{14}$$

per cui la funzione di costo di lungo periodo è

$$C_{LR} = 2\sqrt{2}Y \tag{15}$$

c) Essendo i costi marginali e medi costanti, la curva di offerta dell'impresa di lungo periodo è

$$\begin{cases} Y = +\infty \quad se \quad p > 2\sqrt{2} \\ Y \in [0, +\infty) \quad se \quad p = 2\sqrt{2} \\ Y = 0 \quad se \quad p < 2\sqrt{2} \end{cases} \tag{16}$$

Esercizio 8

La funzione di produzione di un'impresa è $y = L^{1/3}K^{2/3}$ dove L è il lavoro e K il capitale. Il prezzo del lavoro è w e il prezzo del capitale è r.

a) determinare la funzione di costo di lungo periodo dell'impresa.

b) supponete che il prezzo del lavoro sia una funzione crescente della quantità di lavoro domandata dall'impresa, e che in particolare sia $w = \frac{1}{2}L$. Determinare il costo di lungo periodo dell'impresa.

c) nel caso b), calcolare la funzione di costo medio e dire se è crescente, costante o decrescente. L'andamento della funzione di costo medio è legata ai rendimenti di scala della teconologia secondo la regola studiata per l'impresa price-taker? Commentare.

Soluzione Esercizio 8

a) la funzione di costo di lungo periodo deriva dal problema di minimizzazione dei costi. Il sistema derivante è:

$$SMST_{KL} = \frac{1}{2}\frac{K}{L} = \frac{w}{r} \tag{17}$$

$$\overline{y} = L^{1/3}K^{2/3} \tag{18}$$

La combinazione efficiente di fattori è

$$K^* = \overline{y}\left(2\frac{w}{r}\right)^{1/3} \quad e \quad L^* = \overline{y}\left(2\frac{w}{r}\right)^{-2/3} \tag{19}$$

e la funzione di costo di lungo periodo è

$$C(y) = y\left[w\left(2\frac{w}{r}\right)^{-2/3} + r\left(2\frac{w}{r}\right)^{1/3}\right] \tag{20}$$

b) il sistema precedente si modifica come segue

$$\frac{1}{2}\frac{K}{L} = \frac{1/2L}{r} \tag{21}$$

$$\overline{y} = L^{1/3}K^{2/3} \tag{22}$$

e la combinazione efficiente di fattori è

$$K^* = L^2/r = \overline{y}^{6/5}r^{-1/5} \quad e \quad L^* = \left(\overline{y}r^{2/3}\right)^{3/5} = \overline{y}^{3/5}r^{2/5} \tag{23}$$

La funzione di costo di lungo periodo è

$$C(y) = \left(\frac{1}{2}L^*\right)L^* + rK^* = \frac{1}{2}y^{6/5}r^{4/5} + y^{6/5}r^{4/5} = \frac{3}{2}y^{6/5}r^{4/5} \tag{24}$$

c) la funzione di costo medio è

$$AC(y) = \frac{3}{2}y^{1/5}r^{4/5} \tag{25}$$

che è una funzione crescente di y. Il costo medio è costante quando la tecnologia ha rendimenti di scala costanti.