Esercitazione 3

Esercizio 1

Le preferenze di un consumatore sui beni 1 e 2 sono rappresentate dalla funzione di utilità $U(x_1, x_2) = \frac{3}{4}\log x_1 + \frac{1}{4}\log x_2$. Il consumatore dispone di una dotazione iniziale di beni pari a $\overline{x}_1 = 4$ e $\overline{x}_2 = 4$. I prezzi dei beni sono p_1 e p_2.

a) scrivere il vincolo di bilancio del consumatore e rappresentarlo graficamente per $\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2}, 1, 2$.

b) calcolare la domanda di bene 1 e 2

c) per quali valori del prezzo relativo del bene 1, $\frac{p_1}{p_2}$, il consumatore è un venditore netto di bene 1?

d) considerate un particolare $\frac{p_1}{p_2}$ tale per cui il consumatore sia venditore netto di bene 1. Senza fare ulteriori calcoli, come ritenete cambino le scelte del consumatore se il prezzo relativo del bene 1 aumenta (hint: fate riferimento agli effetti di sostituzione e reddito)

e) Siano inizialmente $p_1 = 4$ e $p_2 = 1$. Supponete poi che il prezzo del bene 1 aumenti fino a $p_1 = 6$. Usando il metodo di Slutsky, scomponete la variazione della domanda di bene 1 in effetto di reddito e effetto di sostituzione.

Soluzione Esercizio 1

a) il vincolo di bilancio è $p_1x_1 + p_2x_2 = 4p_1 + 4p_2$ ovvero spesa = valore della dotazione iniziale. Graficamente è una retta che passa per il punto $(4, 4)$ e ha pendenza pari a $-p_1/p_2$. Quindi sarà più inclinata per $p_1/p_2 = 2$ e meno inclinata per $p_1/p_2 = 1/2$.

b) Il SMS_{x2x1} è pari a $3\frac{x_2}{x_1}$ (notate che la funzione di utilità è il log di una Cobb-Douglas). La domanda dei beni si ottiene dal sistema:

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \\ \\ p_1x_1 + p_2x_2 = 4p_1 + 4p_2 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} x_1^* = 3\left(1 + \frac{p_2}{p_1}\right) \\ \\ x_2^* = 1 + \frac{p_1}{p_2} \end{cases}$$

c) il consumatore è un venditore netto di bene 1 se $x_1^* < \overline{x}_1$ ovvero se $3\left(1 + \frac{p_2}{p_1}\right) < 4$ che implica $\frac{p_1}{p_2} > 3$.

d) se inizialmente il consumatore è un venditore netto di bene 1, un aumento del prezzo relativo del bene 1 ha due effetti sulla scelta del consumatore: per effetto di sostituzione la domanda di bene 1 diminuisce in quanto il bene 1 diventa relativamente meno conveniente rispetto al bene 2; per effetto di reddito la domanda di bene 1 aumenta perché il ricavo del consumatore ottenuto dalla vendita di bene 1 aumenta e questo spinge verso l'alto la domanda di bene 1. Complessivamente, quindi, l'effetto dell'aumento del prezzo relativo sulla domanda di bene 1 è ambiguo.

e) usando le funzioni di domanda ottenute nel punto 1.b), si ha che la domanda iniziale, per $p_1 = 4$ e $p_2 = 1$, è

$$\begin{cases} x_1^1 = \frac{15}{4} \\ \\ x_2^1 = 5 \end{cases}$$

e la domanda finale per $p_1 = 6$ e $p_2 = 1$, è

$$\begin{cases} x_1^2 = \frac{7}{2} \\ \\ x_2^2 = 7 \end{cases}$$

Il reddito iniziale del consumatore è $I_1 = 4 \times 4 + 1 \times 4 = 20$.

La compensazione à la Slutsky che deve essere data al consumatore in corrispondenza dei nuovi prezzi per consentirgli gli consumare ancora il paniere $\left(\frac{15}{4}, 5\right)$, ovvero la sua scelta iniziale, è pari a $\Delta I = \Delta p_1 \times\ x_1^1 = \frac{15}{2}$. Infine, la scelta compensata del consumatore si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = 6 \\ \\ 6x_1 + x_2 = [I_1 + \Delta I] = 20 + \frac{15}{2} \end{cases}$$

ed è

$$\begin{cases} x_1^C = 3,4375 \\ \\ x_2^C = 6,875 \end{cases}$$

Si ricava che l'effetto di sostituzione è

$$x_1^C - x_1^1 = -0.3125$$

e l'effetto di reddito è

$$x_1^2 - x_1^C = 0.0625$$

Come si vede i due effetti sono di segno opposto e tendono a compensarsi.

Esercizio 2

Le preferenze di un consumatore sui beni x e y sono rappresentabili con la funzione di utilità $U = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$. I prezzi sono $p_x = 10$, $p_y = 10$ e il reddito è $I = 300$.

a) calcolare la scelta del consumatore.

b) supponete che il prezzo del bene x cresca a $p_x = 20$. Calcolare la nuova scelta del consumatore.

c) utilizzando il metodo di Hicks, scomporre la variazione nel consumo determinata ai punti precedenti in effetto di reddito e sostituzione.

Soluzione Esercizio 2

a) la scelta iniziale del consumatore, derivante dal sistema $SMS_{yx} = \frac{p_x}{p_y}$ e vincolo di bilancio è: $x_1 = 10$ e $y_1 = 20$

b) dopo l'aumento del prezzo, la scelta finale del consumatore è: $x_2 = 5$ e $y_2 = 20$

c) la scelta compensata deriva dal sistema $SMS_{yx} = \frac{p'_x}{p_y}$ e $U(x, y) = U(x_1, y_1)$, ovvero

$$\frac{1}{2}\frac{y}{x} = 2 \tag{1}$$

$$x^{1/3} y^{2/3} = 10^{1/3} 20^{2/3} = 10 * 2^{2/3} \sim 15.87 \tag{2}$$

la cui soluzione è

$$x_c = \frac{10}{2^{2/3}} \quad e \quad y_c = \frac{40}{2^{2/3}} \tag{3}$$

L'effetto di sostituzione è $x_c - x_1$ e l'effetto di reddito è $x_2 - x_c$. Entrambi gli effetti sono negativi.

Esercizio 3

La funzione di utilità di un consumatore è $U = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Il consumatore dispone di un reddito iniziale pari a I. I prezzi dei beni sono $p_x = p_y = 1$.

a) determinare il paniere scelto dal consumatore

b) per coprire un buco di bilancio, il governo valuta l'introduzione dell'IVA sul bene x e deve deciderne l'aliquota. Indichiamo con t l'aliquota IVA. Il prezzo del bene x comprensivo di IVA sarà quindi $1 + t$. Dato t, determinare la nuova scelta del consumatore.

c) usando il metodo di Slutsky, scomporre la variazione nel consumo di bene x in effetto di reddito e di sostituzione.

d) calcolare l'elasticità dell'effetto di sostituzione rispetto all'aliquota fiscale.

Soluzione Esercizio 3

a) il SMS_{yx} è pari a $\sqrt{\frac{y}{x}}$. La scelta del consumatore che deriva dal sistema:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{y}{x}} &= \frac{p_x}{p_y} = 1 \\ x + y &= I \end{aligned}$$

è quindi

$$x^1 = y^1 = \frac{I}{2}$$

b) dopo l'introduzione dell'IVA, la nuova scelta del consumatore risolve il sistema:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{y}{x}} &= \frac{p'_x}{p_y} = 1 + t \\ (1+t)x + y &= I \end{aligned}$$

e sarà pari a:

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{I}{(1+t)(2+t)} \\ y^2 &= \frac{(1+t)I}{2+t} \end{aligned}$$

c) il vincolo di bilancio compensato che passa per la scelta iniziale del consumatore, applicando i nuovi prezzi è

$$(1+t)x + y = I + \Delta p_x x^*$$

dove $\Delta p_x x^*$ è la compensazione applicata, pari a $t\frac{I}{2}$.
La scelta compensata risolve allora il sistema:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{y}{x}} &= \frac{p'_x}{p_y} = 1+t \\ (1+t)x + y &= I + t\frac{I}{2} \end{aligned}$$

e vale:

$$\begin{aligned} x^C &= \frac{I(2+t)}{2(1+t)(2+t)} = \frac{I}{2(1+t)} \\ y^C &= \frac{(1+t)I}{2} \end{aligned}$$

L'effetto di sostituzione è $\Delta x^S = x^C - x^1 = \frac{I}{2(1+t)} - \frac{I}{2} = -\frac{I}{2}\frac{t}{1+t}$. L'effetto di reddito è $\Delta x^I = x^2 - x^C = \frac{I}{(1+t)(2+t)} - \frac{I}{2(1+t)} = -\frac{I}{2}\frac{t}{(1+t)(2+t)}$.

d) l'elasticità dell'effetto di sostituzione è

$$\frac{\partial \Delta x^S}{\partial t}\frac{t}{\Delta x^S} = -\frac{I}{2}\frac{1}{(1+t)^2}\frac{2t(1+t)}{It} = -\frac{1}{1+t}.$$

Esercizio 4

Un consumatore vive due periodi. Nel primo periodo lavora e riceve un reddito I_0. Nel secondo periodo è in pensione e riceve un reddito $I_1 < I_0$. Le sue preferenze sono descritte dalla curva di utilità $U(c_0, c_1) = \sqrt{c_0} + \beta\sqrt{c_1}$ dove c_i , $i = 0, 1$ sono i consumi nei due periodi e $0 < \beta < 1$ è il parametro che misura il tasso di sconto psicologico dell'individuo, ovvero quanto egli pesa il futuro rispetto al presente nelle sue preferenze. Il tasso di interesse di mercato cui il consumatore può prendere o dare a prestito è $r > 0$.

a) dire per quali valori dei parametri il consumatore sarà un risparmiatore

b) considerate il caso benchmark $\beta = 1$. Il consumatore è paziente e per lui presente e futuro pesano allo stesso modo. Data la condizione sui redditi, è possibile che il consumatore decida di prendere a prestito?

c) supponiamo ora che il consumatore sia impaziente ($\beta < 1$). Qual è il minimo tasso di interesse che indurrà il consumatore a risparmiare?

Soluzione Esercizio 4

a) il vincolo di bilancio intertemporale è

$(1+\mathrm{r})\mathrm{c}_0 + c_1 = (1 + r)I_0 + I_1$

Il saggio marginale di sostituzione è

$\mathrm{SMS}_{c_1 c_0} = \frac{MU_{c_0}}{MU_{c_1}} = \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{c_1}{c_0}}$

La scelta del consumatore è $\mathrm{c}_0 = \frac{(1+r)I_0+I_1}{(1+r)+(1+r)^2\beta^2}$ $\;c_1 = (1 + r)^2\beta^2 c_0$

Il consumatore sarà risparmiatore se

$$\frac{(1 + r)I_0 + I_1}{(1 + r) + (1 + r)^2\beta^2} < I_0$$

ovvero se

$$\frac{I_1}{I_0} < (1 + r)^2\beta^2$$

b) con $\beta = 1$ la condizione qui sopra è sempre verificata dato che $\frac{I_1}{I_0} < 1 < (1 + r)^2$ e quindi il consumatore non prenderà mai a prestito.

c) se $\beta < 1$ il consumatore risparmierà se $(1+r)^2 > \frac{1}{\beta^2}\frac{I_1}{I_0}$ ovvero se $(1+r) > \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{I_1}{I_0}}$.

Esercizio 5

Si consideri un consumatore che ha una funzione di utilità pari a $U(x,y) = 2x^{0.7}y^{0.3}$.

1) Si calcoli la funzione di domanda ("mashalliana") per entrambi i beni.

2) quale è il paniere ottimale che il consumatore acquista se $I = 300$, $p_x = 3, p_y = 1$?

3) Si calcoli la domanda compensata ("hicksiana") per ciascun bene.

4) Quale è il paniere ottimale per raggiungere un'utilità pari a 10?

5) Il bene x è un bene normale o un bene inferiore? Fornite una spiegazione.

6) Come cambia la vostra risposta ai punti 1 e 2 se ora l'individuo ha preferenze rappresentate da una funzione di utilità $U(x,y) = \frac{1}{2}x^{0.7}y^{0.3}$.

Soluzione Esercizio 5

1) La funzione di domanda Marshalliana si trova risolvendo il seguente problema di massimizzazione:

$$MaxU(x,y) = 2x^{0.7}y^{0.3}$$

$$s.t.I = p_x x + p_y y$$

Che si può risolvere ponendo:

$$\begin{cases} SMS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{7}{3}\frac{y}{x} = \frac{P_x}{P_y} \\ \\ I = p_x x + p_y y \end{cases}$$

Sostituendo si ottiene la soluzione:

$$\begin{cases} x^* = \frac{7}{10}\frac{I}{P_x} \\ \\ y^* = \frac{3}{10}\frac{I}{P_y} \end{cases}$$

2) Il paniere ottimale corrispondente dati $I = 300$, $p_x = 3$ e $p_y =$ è :

$$\begin{cases} x^* = \frac{7}{10}\frac{I}{P_x} = \frac{7}{10}\frac{300}{3} = 70 \\ \\ y^* = \frac{3}{10}\frac{I}{P_y} = \frac{3}{10}\frac{300}{1} = 90 \end{cases}$$

3) La domanda Hicksiana si ottiene dal seguente problema di minimizzazione:

$$MinI(x,y) = p_x x + p_y y$$
$$s.t.2x^{0.7}y^{0.3} = \bar{u}$$

Senza ricorrere al Lagrangiano, la soluzione di può trovare ponendo:

$$\begin{cases} SMS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{7}{3}\frac{y}{x} = \frac{P_x}{P_y} \\ \\ 2x^{0.7}y^{0.3} = \bar{u} \end{cases}$$

Sostituendo si trova la soluzione:

$$\begin{cases} x^* = \bar{u}\frac{1}{2}(\frac{7}{3})^{0.3}(\frac{P_y}{P_x})^{0.3} \\ \\ y^* = \bar{u}\frac{1}{2}(\frac{3}{7})^{0.7}(\frac{P_x}{P_y})^{0.7} \end{cases}$$

4) Il paniere ottimale per raggiungere un'utilità pari a 10 è :

$$\begin{cases} x^* = \bar{u}\frac{1}{2}(\frac{7}{3})^{0.3}(\frac{P_y}{P_x})^{0.3} = 10\frac{1}{2}(\frac{7}{3})^{0.3}(\frac{P_y}{P_x})^{0.3} = 6.44(\frac{P_y}{P_x})^{0.3} \\ \\ y^* = \bar{u}\frac{1}{2}(\frac{3}{7})^{0.7}(\frac{P_x}{P_y})^{0.7} = 10\frac{1}{2}(\frac{3}{7})^{0.7}(\frac{P_x}{P_y})^{0.7} = 2.76(\frac{P_x}{P_y})^{0.7} \end{cases}$$

5) Il bene x è un bene normale poichè la quantità domandata di x aumenta all'aumentare del reddito I. Prendendo la domanda Marshalliana $x^* = \frac{7}{10}\frac{I}{P_x}$, $\eta_{x,I} = 1 > 0$. Si ricordi che per un bene normale l'effetto reddito è sempre negativo.

6) Chiamiamo $U(x,y) = 2x^{0.7}y^{0.3}$ e $U^{'}(x,y) = \frac{1}{2}x^{0.7}y^{0.3}$. Si nota che $\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{MU_x^{'}}{MU_y^{'}}$, quindi le risposte a) e b) non cambiano. Si noti che invece il livelli di utilità raggiunto in equilibro è invece minore con $U^{'}(x,y)$.