ESERCITAZIONI ECONOMIA POLITICA I - 1

1. Massimizzazione dell'utilità sotto il vincolo di bilancio

1.1. **Esercizio 1.** Si consideri due beni x e y; i prezzi dei due sono rispettivamente: $p_x = 20$ e $p_y = 40$.

Si determini la scelta ottimale per un individuo le cui preferenze sono rappresentate dalla funzione di utilità:

$$U_1(x, y) = x \cdot y$$

e che dispone di un reddito pari a 5000.

Come cambierebbe la scelta, se la funzione di utilità dell'individuo fosse:

$$U_2(x, y) = \log x + \log y + 20$$

$$\max U_1(x, y) = x \cdot y \qquad \text{(funzione obiettivo)}$$
$$20x + 40y = 5000 \qquad \text{(vincolo)}$$

Risolvendo utilizzando il metodo della lagrangiana:

$$\mathcal{L} = xy - \lambda\,[20x + 40y - 5000]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y - 20\lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x - 40\lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 20x + 40y - 5000 = 0$$

Dalla prima equazione ricaviamo $y = 20\lambda$ e dalla seconda $x = 40\lambda$. Quindi posso riscrivere il vincolo di bilancio (terza equazione):

$$800\lambda + 800\lambda = 5000$$

da cui ricaviamo:

$$\lambda = \frac{25}{8}$$
$$y = 62,5$$
$$x = 125$$

Alternativamente, uguagliando saggio marginale di sostituzione (in valore assoluto) e inclinazione del vincolo di bilancio (rapporto tra i prezzi) otteniamo:

$$\mathsf{MRS} = \frac{p_x}{p_y} \qquad \frac{y}{x} = \frac{1}{2}$$

da cui ricaviamo $y = \frac{1}{2}x$ e sostituendo nel vincolo di bilancio: $x = 125$.

Considerando ora la funzione di utilità U_2:

$$\max U_2(x, y) = \log x + \log y + 20$$
$$\text{sub vincolo} \qquad 20x + 40y = 5000$$

$$\mathcal{L} = \log x + \log y + 20 - \lambda\,[20x + 40y - 5000]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{1}{x} - 20\lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{1}{y} - 40\lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 20x + 40y - 5000 = 0$$

Ottenendo: $x = \frac{1}{20\lambda}$ e $y = \frac{1}{40\lambda}$. Sostituendo nel vincolo di bilancio ricaviamo $\lambda = \frac{1}{2500}$ e quindi nuovamente $x = 125$ e $y = 62,5$.
La seconda funzione di utilità U_2 non è altro che una trasformazione monotona della prima funzione di utilità U_1. Cambia il valore dell'utilità ma non il valore ottimo del paniere di beni che massimizza la funzione.

1.2. **Esercizio 2.** Le preferenze di un consumatore tra i beni x_1 e x_2 sono rappresentate dalla funzione di utilità:

$$U(x_1, x_2) = x_1^{1/2} + 2x_2.$$

Si determini la scelta ottimale del consumatore con: $p_1 = 4, p_2 = 8$ e $I = 81$. Come cambierebbe la scelta ottimale se i prezzi di entrambi i beni e il reddito I triplicassero?

Utilizzando il metodo della lagrangiana:

$$\mathcal{L} = x_1^{1/2} + 2x_2 - \lambda\,[4x_1 + 8x_2 - 81]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{1}{2}x_1^{-1/2} - 4\lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 2 - 8\lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 4x_1 + 8x_2 - 81 = 0$$

Dalla seconda equazione ottengo $\lambda = 1/4$ e sostituendo nella prima ottengo $x_1 = 1/4$. Quindi utilizzando il vincolo di bilancio ottengo anche il valore di x_2 pari a 10.

E' possibile partire direttamente dall'eguaglianza tra saggio marginale di sostituzione e inclinazione del vincolo di bilancio:

$$\mathrm{MRS} = \frac{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}}{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}} = \frac{1/2x_1^{-1/2}/2}{2} = \frac{1}{4x_1^{1/2}}$$

quindi

$$\frac{1}{4x_1^{1/2}} = \frac{4}{8}$$

da cui ottengo $x_1 = \frac{1}{4}$

Se risolvessimo nuovamente il problema con prezzi e reddito triplicati troveremmo lo stesso paniere di beni. Ciò è dovuto al fatto che la domanda è una funzione omogenea di grado zero, cioè:

$$x(\alpha p, \alpha I) \equiv x(p, I)$$

o in maniera più generale:

$$f(tx) \equiv t^r \cdot f(x) \qquad \text{con} \quad r = 0$$

1.3. **Esercizio 3.** Si consideri un consumatore con funzione di utilità:

$$U(x_1, x_2) = 2x_1 \cdot x_2$$

Il prezzo del bene x_2 è $p_2 = 1$. Quale dovrebbe essere il prezzo del bene x_1 e quale il reddito del consumatore, per far sì che il paniere:

$$\{x_1 = 10, x_2 = 20\}$$

sia ottimale?

Uguagliando saggio marginale di sostituzione e inclinazione vincolo di bilancio possiamo facilmente ricavare il valore del prezzo p_1:

$$MRS = \frac{p_1}{p_2} \qquad \frac{2x_2}{2x_1} = \frac{p_1}{1}$$

Da cui si ricava: $p_1 = 2$

Sostituendo i valori nel vincolo di bilancio: $p_1x_1 + p_2x_2 = I$, si ottiene facilmente che il reddito dovrà essere pari a: $I = 40$. Si può notare come i valori di ottimo rappresentino una soluzione interna del problema di massimizzazione.

1.4. **Esercizio 4.** Le preferenze di un consumatore sono espresse dalla seguente funzione di utilità:

$$U(x_1, x_2) = x_1^a \cdot x_2^b \qquad \text{con } a, b > 0$$

Si trovino le funzioni di domanda dei due beni indicando con: p_1, p_2 i prezzi dei beni e con I il reddito.

Le funzioni di domanda potranno essere indicate da: $x_1(p, I)$ e da $x_2(p, I)$ cioà la quantità di x_1 e di x_2 dipenderanno dal prezzo e dal reddito disponibile.

Per trovare la quantità ottima dei due beni procederemo con la condizione di ottimo:

$$MRS = \frac{p_1}{p_2} \qquad \text{cioè} \quad \frac{a/x_1}{b/x_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

da cui:

$$x_2 = \frac{b}{a}\frac{p_1}{p_2} \cdot x_1$$

sostituendo nel vincolo:

$$p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot \left(\frac{b}{a}\frac{p_1}{p_2} \cdot x_1\right) = I$$

da cui otteniamo:

$$x_2 = \frac{I}{p_2} \cdot \frac{b}{a+b} \qquad \text{e} \quad x_1 = \frac{I}{p_1} \cdot \frac{a}{a+b}$$

La domande trovate sono direttamente proporzionali al reddito e inversamente ai prezzi. L'elasticità incrociata è invece nulla.

Nel caso in cui volessimo partire dalla definizione della lagrangiana potremmo, per comodità di calcolo, utilizzare una trasformazione monotona della funzione di utilità. Il problema di massimizzazione sarà quindi:

$$\max U(x_1, x_2) = a \cdot \log x_1 + b \log x_2 \qquad \text{(funzione obiettivo)}$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = I \qquad \text{(vincolo)}$$

$$\mathcal{L} = a \cdot \log x_1 + b \cdot \log x_2 - \lambda \left[p_1 x_1 + p_2 x_2 - I\right]$$

Condizione del primo ordine:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{a}{x_1} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \frac{b}{x_2} - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - I = 0$$

Trovare x_1 dalla prima equazione e x_2 dalla seconda equazione. Sostituire nel vincolo.

1.5. **Esercizio 5.** Le preferenze di un consumatore sono espresse dalla seguente funzione di utilità:

$$U_1(x_1, x_2) = 2x_1 + \log x_2$$

(i) Si determini il paniere ottimale dei beni x_1 e x_2 con: $p_1 = 10$, $p_2 = 4$ e il reddito $I = 200$.

(ii) Come varierebbe il paniere ottimale nel caso la funzione di utilità fosse:

$$U_2(x_1, x_2) = \frac{1}{4} \cdot x_1 + \log x_2$$

e i prezzi fossero $p_1 = 80$ e $p_2 = 1$ e il reddito rimanesse pari a $I = 200$.

La funzione U_1 è detta funzione quasi-lineare (lineare nel consumo del bene x_1 e non lineare in x_2). Per determinare la condizione di ottimo uguagliamo il MRS con l'inclinazione del vincolo di bilancio:

$$MRS = \frac{p_1}{p_2} \qquad \frac{2}{1/x_2} = \frac{10}{4} \qquad 2x_2 = \frac{10}{4} \qquad x_2 = \frac{5}{4}$$

Sostituendo nel vincolo di bilancio $p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$:

$$10 \cdot x_1 + 4 \cdot \frac{5}{4} = 200 \qquad \text{allora,} \qquad x_1 = \frac{195}{10}$$

Nel secondo caso prospettato la funzione di utilità rimane una funzione quasi-lineare ma in cui la componente del bene x_1 incide meno. Inoltre, anche i prezzi relativi sono cambiati rendendo molto meno conveniente il bene x_1. Uguagliando MRS e rapporto tra i prezzi otteniamo:

$$\frac{1}{4} x_2 = 80 \qquad \text{da cui,} \qquad x_2 = 320$$

sostituendo nel vincolo di bilancio:

$$80 \cdot x_1 + 1 \cdot 320 = 200 \qquad \text{da cui,} \qquad x_1 = -\frac{3}{2}$$

I valori del paniere determinato sono privi di senso economico (è la soluzione matematica del problema di massimizzazione). Tale risultato ci conduce verso una soluzione d'angolo con $x_1 = 0$ e tutto il reddito speso nell'acquisto del bene x_2 ($x_2 = 200$). Ciò appare sensato in considerazione del elevato aumento del prezzo del bene x_1 e il suo relativo minor peso all'interno della funzione di utilità.

Nel primo punto abbiamo determinato una soluzione interna uguagliando saggio marginale di sostituzione e rapporto tra i prezzi. Nel secondo punto abbiamo verificato la presenza di una soluzione d'angolo dove, appunto, si presenta una disuguaglianza tra MRS e pendenza del vincolo di bilancio.

Il problema può essere risolto diversamente andando a verificare come i valori della pendenza della curva di indifferenza non possono mai essere uguali alla pendenza del vincolo di bilancio. Quindi, stabile se il saggio marginale di sostituzione sia inferiore o maggiore del rapporto tra i prezzi.