Esame di Economia Politica 1
Appello del 23 luglio 2013

Rispondere in modo chiaro e coinciso alle seguenti domande
Tempo a disposizione: 90 minuti

1) Le preferenze di un consumatore sui beni 1 e 2 sono rappresentate dalla funzione di utilità $U(x_1, x_2) = \frac{3}{4}\log x_1 + \frac{1}{4}\log x_2$. Il consumatore dispone di una dotazione iniziale di beni pari a $\overline{x}_1 = 4$ e $\overline{x}_2 = 4$. I prezzi dei beni sono p_1 e p_2.

a) scrivere il vincolo di bilancio del consumatore e rappresentarlo graficamente per $\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2}, 1, 2$.

b) calcolare la domanda di bene 1 e 2

c) per quali valori del prezzo relativo del bene 1, $\frac{p_1}{p_2}$, il consumatore è un venditore netto di bene 1?

d) considerate un particolare $\frac{p_1}{p_2}$ tale per cui il consumatore sia venditore netto di bene 1. Senza fare ulteriori calcoli, come ritenete cambino le scelte del consumatore se il prezzo relativo del bene 1 aumenta (hint: fate riferimento agli effetti di sostituzione e reddito)?

e) Siano inizialmente $p_1 = 4$ e $p_2 = 1$. Supponete poi che il prezzo del bene 1 aumenti fino a $p_1 = 6$. Usando il metodo di Slutsky, scomponete la variazione della domanda di bene 1 in effetto di reddito e effetto di sostituzione.

2) Un individuo dispone dispone di T_0 ore di tempo nel corso della sua vita che può dedicare al consumo o al tempo libero. Inoltre riceve dai genitori un'eredità pari a $M = 1000$. Esiste una tecnologia che consente di trasformare M in T. Ad esempio, investire in istruzione consente di allungare la vita lavorativa in quanto il capitale umano accumulato a scuola riduce i periodi di disoccupazione e la lunghezza del periodo di inserimento nel mondo del lavoro, spesso caratterizzato da una sequenza di occupazioni saltuarie. Questa tecnologia è lineare e possiamo scriverla come $T = T_0 + m$. Questa relazione indica che investendo m, con $0 \leq m \leq M$ il tempo totale a dispozione passa da T_0 a $T_0 + m$ Il salario orario prevalente sul mercato del lavoro è $w = 10$ e la funzione di utilità dell'individuo è $U(c, l) = c^{0.6} l^{0.4}$.

a) sia $m = 500$. Rappresentare il vincolo di bilancio del consumatore

b) sia $m = 500$. Deteminare la scelta del consumatore

c) quale sarà la scelta ottima di m che massimizza l'utilità del consumatore? (hint: è sufficiente scrivere il vincolo di bilancio per poter rispondere alla domanda)

3) Due duopolisti competono secondo il modello di Stackelberg. L'impresa leader deve però sostenere un costo di R&S per ottenere la tecnologia produttiva che la follower, in seguito, copierà. Inoltre, quanto più la leader investe in R&S tanto più efficiente sarà la produzione e tanto minori saranno i costi marginali. Sia F il corso di ricerca e sviluppo e sia $MC(q) = 10 - \alpha F$ il costo marginale di

produzione sia per la leader che per la follower. Poiché il costo marginale non può essere negativo, $F < \frac{10}{\alpha}$. Sia infine $P = 100 - Q$ la curva di domanda di mercato dove Q è la quantità complessiva offerta sul mercato.

a) Per ogni fissato F determinare l'equilibrio di Stackelberg

b) Calcolare i profitti d'equilibrio delle due imprese.

c) Sia $\alpha = \frac{1}{45}$ e quindi $F < 450$. Quale valore di F conduce l'impresa leader ad ottenere profitti massimi (al netto del costo dell'investimento in R&S)?

d) Sia ora $\alpha = \frac{2}{45}$ e quindi $F < 225$. Quale valore di F conduce l'impresa leader ad ottenere profitti massimi (al netto del costo dell'investimento in R&S)? Commentare in relazione ai risultati ottenuti nel punto precedente.

4) Considerate il seguente gioco sequenziale. Il giocatore 1 muove per primo e scegli tra tre azioni A, B, C. Il giocatore 2, osserva la mossa del giocatore 1, e risponde scegliendo tra le azioni D, E. I payoff corrispondenti ai sentieri del gioco sono

	D	E
A	5,3	6,2
B	4,4	7,6
C	3,8	8,3

dove il primo numero in ogni cella rapprensenta il payoff per il giocatore 1, il secondo numero il payoff per il giocatore 2 e la cella indica qual è il sentiero seguito nel gioco (ad esempio la cella (A,D) indica che prima il giocatore 1 ha giocato A e poi il giocatore 2 ha scelto D - attenzione: questa non è la forma normale del gioco!!!)

a) rappresentare il gioco in forma estesa

b) determinare qual è l'esito di backward induction (o equilibrio perfetto nei sottogiochi)

c) rappresentare il gioco in forma normale

d) determinare l'insieme degli equilibri di Nash.

Soluzioni

Esercizio 1)

1.a) il vincolo di bilancio è $p_1x_1 + p_2x_2 = 4p_1 + 4p_2$ ovvero spesa = valore della dotazione iniziale. Graficamente è una retta che passa per il punto $(4, 4)$ e ha pendenza pari a $-p_1/p_2$. Quindi sarà più inclinata per $p_1/p_2 = 2$ e meno inclinata per $p_1/p_2 = 1/2$.

1.b) Il SMS_{x2x1} è pari a $3\frac{x_2}{x_1}$ (notate che la funzione di utilità è il log di una Cobb-Douglas). La domanda dei beni si ottiene dal sistema

$$\begin{cases} 3\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \\ p_1x_1 + p_2x_2 = 4p_1 + 4p_2 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} x_1^* = 3\left(1 + \frac{p_2}{p_1}\right) \\ x_2^* = 1 + \frac{p_1}{p_2} \end{cases}$$

1.c) il consumatore è un venditore netto di bene 1 se $x_1^* < \overline{x}_1$ ovvero se $3\left(1 + \frac{p_2}{p_1}\right) < 4$ che implica $\frac{p_1}{p_2} > 3$.

1.d) se inizialmente il consumatore è un venditore netto di bene 1, un aumento del prezzo relativo del bene 1 ha due effetti sulla scelta del consumatore: per effetto di sostituzione la domanada di bene 1 diminuisce in quanto il bene 1 diventa relativamente meno conveniente rispetto al bene 2; per effetto di reddito la domanda di bene 1 aumenta perché il ricavo del consumatore ottenuto dalla vendita di bene 1 aumenta e questo spinge verso l'alto la domanda di bene 1. Complessivamente, quindi, l'effetto dell'aumento del prezzo relativo sulla domanda di bene 1 è ambiguo.

1.e) usando le funzioni di domanda ottenute nel punto 1.b), si ha che la domanda iniziale, per $p_1 = 4$ e $p_2 = 1$, è

$$\begin{cases} x_1^1 = \frac{15}{4} \\ x_2^1 = 5 \end{cases}$$

e la domanda finale per $p_1 = 6$ e $p_2 = 1$, è

$$\begin{cases} x_1^2 = \frac{7}{2} \\ x_2^2 = 7 \end{cases}$$

Il reddito inizale del consumatore è $I_1 = 4 \times 4 + 1 \times 4 = 20$.

La compensazione à la Slutsky che deve essere data al consumatore in corrispondenza dei nuovi prezzi per consentirgli gli consumare ancora il paniere $\left(\frac{15}{4}, 5\right)$, ovvero la sua scelta iniziale, è pari a $\Delta I = \Delta p_1 \times\, x_1^1 = \frac{15}{2}$. Infine, la scelta compensata del consumatore si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 3\frac{x_2}{x_1} = 6 \\ 6x_1 + x_2 = I_1 + \Delta I = 20 + \frac{15}{2} \end{cases}$$

ed è

$$\begin{cases} x_1^C = 3,4375 \\ x_2^C = 6,875 \end{cases}$$

Si ricava che l'effetto di sostituzione è

$$x_1^C - x_1^1 = -0.3125$$

e l'effetto di reddito è

$$x_1^2 - x_1^C = 0.0625$$

Come si vede i due effetti sono di segno opposto e tendono a compensarsi.

Esercizio 2)

2.a) Il vincolo di bilancio per $m = 500$ deriva da:

$$\begin{aligned} c &= 10L + 500 \\ l + L &= T_0 + 500 \end{aligned}$$

(la prima equazione dice che la spesa per cosumo è pari al reddito da lavoro più la parte di eredità che non è stata investita; la seconda equazione dice che tempo libero + lavoro devono essere pari al tempo complessivo a disposizione). Per cui il vincolo è

$$c + 10l = 10T_0 + 5500 \text{ con } l \leq T_0 + 500$$

Nota: il paniere delle dotazioni è $(T_0 + 500, 500)$

2.b) La scelta del consumatore per $m = 500$ deriva dal solito sistema

$$\begin{cases} SMS_{cl} = \frac{2}{3}\frac{c}{l} = 10 \\ c + 10l = 10T_0 + 5500 \end{cases}$$

Notate che nel punto delle dotazioni il SMS_{cl} (ovvero il salario di riserva del consumatore) vale $\frac{2}{3}\frac{500}{T_0+500}$ che è sicuramente minore del salario di mercato (10). Quindi la scelta del consumatore sarà interna e vale

$$\begin{cases} l^* = \frac{2}{5}T_0 + 220 \\ c^* = 6T_0 + 3300 \end{cases}$$

2.c) Riscriviamo il VdB per m parametrico. Abbiamo

$$\begin{aligned} c &= 10L + (M - m) \\ l + L &= T_0 + m \end{aligned}$$

da cui

$$c + 10l = 10T_0 + 9m + M \text{ con } l \leq T_0 + m$$

Si vede immediatamente che all'aumentare di m l'insime delle opportunità per il consumatore si espande (il VdB si sposta verso l'esterno). Quindi la scelta ottima del consumatore deve essere $m = M = 1000$, ovvero tutta l'eredità viene investita.

Esercizio 3)

3.a) Si risolve prima il problema della follower. Il ricavo della follower è $R_2 = (100 - q_1 - q_2)q_2$ e il ricavo marginale è quindi $MR_2 = 100 - q_1 - 2q_2$. Dalla condizione $MR_2 = MC$ si ottiene la curva di reazione della follower

$$q_2 = 45 - \frac{1}{2}q_1 + \frac{\alpha F}{2}$$

Il ricavo della leader è $R_1 = [100 - q_1 - (45 - \frac{1}{2}q_1 + \frac{\alpha F}{2})]q_1 = (55 - \frac{1}{2}q_1 - \frac{\alpha F}{2})q_1$. Il ricavo marginale $MR_1 = 55 - q_1 - \frac{\alpha F}{2}$. Dalla condizione $MR_1 = MC$ si ottiene la quantità ottima per la leader $q_1^* = 45 + \frac{\alpha F}{2}$. Sostituendo nella funzione di reazione, la quantità ottima per la follower è $q_2^* = \frac{45}{2} + \frac{\alpha F}{4}$ e infine il prezzo di equilibrio è $p^* = \frac{65}{2} - \frac{3}{4}\alpha F$.

3.b) Sostituendo i valori d'equilibrio determinati nel punto 3.a), i profitti di equilibrio delle due imprese sono

$$\pi_1 = \frac{1}{2}\left(45 + \frac{\alpha F}{2}\right)^2$$

e

$$\pi_2 = \frac{1}{4}\left(45 + \frac{\alpha F}{2}\right)^2$$

3.c) con $\alpha = \frac{1}{45}$ il profitto netto (al netto dei costi per l'investimento in R&S) della leader è $\frac{1}{2}\left(45 + \frac{F}{90}\right)^2 - F$. La derivata di questa espressione rispetto a F fa

$$\left(45 + \frac{F}{90}\right)\frac{1}{90} - 1$$

che è positiva se $F > 4050$ e negativa altrimenti. Poiché c'è il vincolo $F < 450$ concludiamo che la derivata dei profitti netti rispetto a F è negativa per gli F ammissibili, ovvero aumentando F calano i profitti netti. Ne consegue che la scelta migliore per l'impresa leader è settare $F = 0$.

3.d) con $\alpha = \frac{2}{45}$ la derivata del profitto netto rispetto a F è

$$\left(45 + \frac{F}{45}\right)\frac{1}{45} - 1$$

che è positiva per $F > 0$, ovvero il profitto netto cresce con F per gli F ammissibili. Ne consegue che la scelta migliore per l'impresa leader è settare $F = 225$ (il livello di investimento massimo possibile).

Esercizio 4).

4.a) l'albero è composta dalla radice, in cui gioca il giocatore 1, da cui partono tre rami (A,B,C). Per ciascun ramo, abbiamo due ulteriori diramazioni (D,E). Tutti gli insiemi informativi contengono un solo nodo.

4.b) procedendo a ritroso, la strategia ottima per il giocatore 2 è DED (ovvero D dopo A; E dopo B; D dopo C). Anticipando questo risultato, il giocatore 1 sceglie la strategia B. Quindi l'esito di backward induction (o equilibrio perfetto nei sottogiochi) di questo gioco è (B,DED)

4.c) la forma normale di questo gioco è

	DDD	DDE	DED	DEE	EDD	EDE	EED	EEE
A	5,3	5,3	5,3	5,3	6,2	6,2	6,2	6,2
B	4,4	4,4	7,6	7,6	4,4	4,4	7,6	7,6
C	3,8	8,3	3,8	8,3	3,8	8,3	3,8	8,3

4.d) gli equilibri di Nash sono (A,DDD), (B,DED), (B,EED)