Sia dato un mercato caratterizzato dalla seguene funzione di domanda: $D : P = a - bQ$ e, nel lato dell'offerta, da costi marginali costanti pari a $MC = c$. Non ci sono costi fissi, quindi i costi totali sono pari a $C(Q) = c \cdot Q$.

1. Supponete il mercato sia composto da un numero infinito di aziende. Calcolare l'equilibrio in concorrenza perfetta
2. Supponete il mercato sia composto da una singola azienda monopolista. Calcolare l'equilibrio
3. Supponete il mercato sia composto da due aziende che competono à là Cournot sulle quantità. Calcolare l'equilibrio.
4. Supponete il mercato sia composto da due aziende che competono à là Stackelberg sulle quantità. Calcolare l'equilibrio
5. Supponete il mercato sia composto da due aziende che competono à là Betrand sul prezzo. Calcolare l'equilibrio.
6. Supponete il mercato sia composto da due aziende che competono à là Betrand sul prezzo. La seconda azienda ha costi marginali $MC = (c + k)$ Calcolare l'equilibrio.

1 Concorrenza perfetta

$$\begin{aligned} P &= MC \\ a - bQ &= c \\ Q &= \frac{a-c}{b} \\ P &= a - b\frac{a-c}{b} \\ P &= c \end{aligned}$$

2 Monopolio

In monopolio il prezzo d'equilibrio non è più uguale ai costi marginali, ma al livello che massimizza i profitti per l'azienda. Formalmente:

$$\begin{aligned} & \max \; P \cdot Q - c \cdot Q \\ s.t.\; P &= a - bQ \end{aligned}$$

Replace P into the profit function and put the first order condition equal to zero:

$$\begin{aligned} &\max \;\; (a - bQ) \cdot Q - c \cdot Q \\ &\max \;\; (a - c)\, Q - bQ^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a - c &= 2bQ \\ Q &= \frac{a - c}{2b} \end{aligned}$$

Notare che la quantità è la metà di quella prodotta in concorrenza perfetta. Il prezzo è pari a $P = a - b\frac{a-c}{2b} = \frac{a+c}{2}$. Nota che, per costruzione, $a > c$. Infatti in caso contrario la domanda sarebbe zero, in quanto $P = a - bQ$.

Nota che i profitti sono massimizzati quando $MC = MR$, cioè i costi marginali sono uguali ai ricavi marginali. Poichè i costi marginali sono costanti e la domanda è lineare, la curva dei ricavi marginali è una retta con pendenza doppia rispetto a quella della domanda. Verifichiamolo. I ricavi totali sono pari a $R(Q) = aQ - bQ^2$ e i ricavi marginali sono $MR = a - 2bQ$, notare la pendenza di $2b$ doppia rispetto alla pendenza di b della funzione di domanda. Ponendo $MC = MR$ si ottiene:

$$\begin{aligned} c &= a - 2bQ \\ Q &= \frac{a - c}{2b} \end{aligned}$$

3 Cournot

Nel caso di Cournot, la prima azienda si comporta da monopolista solo nella domanda residuale non soddisfatta dallla seconda azienda. Definiamo la domanda della seconda azieda come $\overline{q}_2$ allora si ottiene:

$$d_1 : \;\; P = a - b(q_1 + \overline{q}_2)$$

Troviamo i ricavi totali:

$$\begin{aligned} R &= P \cdot q_1 \\ R &= a - b(q_1 + \overline{q}_2) \cdot q_1 \\ R &= a \cdot q_1 - b \cdot q_1^2 - b \cdot q_1 \cdot \overline{q}_2 \end{aligned}$$

Ricavi marginali:

$$MR = a - 2bq_1 - b\overline{q}_2$$

Condizione di equilibrio: $MC = MR$ quindi:

$$\begin{aligned} a - 2bq_1 - b\overline{q}_2 &= c \\ q_1 &= \frac{a - c}{2b} - \frac{\overline{q}_2}{2} \end{aligned}$$

Questa si chiama Curva di Reazione. Se la seconda azienda decide di giocare $\overline{q}_2$, allora la prima giocherà q_1. Analogamente, poichè il problema è simmetrico, la curva di reazione della seconda azienda sarà data da $q_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{\overline{q}_1}{2}$.

A questo punto posso mettere a sistema le due curve per trovare il punto di equilibrio, cioè dove nessuna delle due aziende cambierà la propria scelta stante quella del concorrente.

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{a-c}{2b} - \frac{\overline{q}_2}{2} \\ q_2 &= \frac{a-c}{2b} - \frac{\overline{q}_1}{2} \end{aligned}$$

Risolviamo:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\left(\frac{a-c}{2b} - \frac{q_1}{2}\right) \\ \frac{3q_1}{4} &= \frac{a-c}{4b} \\ q_1^* &= q_2^* = \frac{a-c}{3b} \end{aligned}$$

Mentre la quantità complessiva venduta sarà pari a $Q = \frac{2}{3}\left(\frac{a-c}{b}\right)$, che è maggiore di quella sotto monopolio ma minore di quella in concorrenza perfetta.

4 Stackelberg

Nel modello di Stackelberg la competizione è sempre sulle quantità (analogamente a Cournot) ma le scelte sono sequenziali e non simultanee: prima sceglie un'azienda (la "leader") e poi l'altra (la "follower").

La soluzione è per backward induction, ovvero si risolve al contrario partendo dalla scelta della follower (che indicheremo con "2") per poi ricavare la scelta della leader (la "1").

L'azienda 2 massimizza i profitti considerando come data la scelta $q_1 = \overline{q}_1$ dell'altra azienda.

$$\begin{aligned} &\max \ P \cdot q_2 - c \cdot q_2 \\ &\max \ (a - b(\overline{q}_1 + q_2))\, q_2 - c \cdot q_2 \\ &\max \ (a - b \cdot \overline{q}_1 - c)\, q_2 - b \cdot q_2^2 \end{aligned}$$

Condizione di prim'ordine:

$$\begin{aligned} a - b \cdot \overline{q}_1 - c &= 2b \cdot q_2 \\ q_2 &= \frac{a - b \cdot \overline{q}_1 - c}{2b} \end{aligned}$$

La funzione di reazione del follower è analoga al caso di Cournot. Ma questa volta inserisco tale funzione di reazione direttamente nel problema di massimizzazione dei profitti della prima azienda:

$$\begin{aligned}
&\max\ P \cdot q_1 - c \cdot q_1 \\
&\max\ \left(a - b\left(q_1 + \overline{q}_2\right)\right) q_1 - c \cdot q_1 \\
&\max\ \left(a - b \cdot \frac{a - b \cdot q_1 - c}{2b} - c\right) q_1 - b \cdot q_1^2 \\
&\max\ \left(\frac{a-c}{2}\right) q_1 - \frac{b}{2} \cdot q_1^2
\end{aligned}$$

Condizione di primo ordine:

$$\begin{aligned}
\frac{a-c}{2} &= b \cdot q_1 \\
q_1 &= \frac{a-c}{2b}
\end{aligned}$$

Sostituisco dentro la funzione di reazione del follower e trovo:

$$q_2 = \frac{a-c}{4b}$$

In questo caso il leader produce (e guadagna) di più rispetto a Cournot mentre il follower produce e guadagna di meno. La quantità totale venduta è maggiore rispetto al caso di Cournot.

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{a-c}{2b} + \frac{a-c}{4b} \\
Q &= \frac{3}{4}\left(\frac{a-c}{b}\right)
\end{aligned}$$

Schema. In Concorrenza perfetta si vende $Q = \frac{a-c}{b}$, con Stackelberg $Q = \frac{3}{4}\left(\frac{a-c}{b}\right)$, con Cournot si ha $Q = \frac{2}{3}\left(\frac{a-c}{b}\right)$ e infine con un monopolio si ha $Q = \frac{1}{2}\left(\frac{a-c}{b}\right)$. Al diminuire della quantità venduta sale il prezzo (lo si vede dalla funzione di domanda).

5 Bertrand

Nel modello di Betrand la variabile strategica scelta dalle aziende è il prezzo. La scelta è simultanea e dà luogo, come in Cournot, a due funzioni di reazione (*"se tu, azienda 1, scegli tale prezzo allora io, azienda 2, farò questa scelta"*).

Assumiamo che líazienda 2 abbia scelto p2.

- Se $p_1 < p_2$ allora líntera domanda sarà servita dalla prima azienda.

- Se $p_1 > p_2$ allora líntera domanda sarà servita dalla seconda azienda
- Se $p_1 = p_2$ allora la domanda sarà divisa a metà tra le due aziende.

Prendiamo il caso della prima azienda, che prende $\overline{p}_2$ come dato. Per l'azienda 1 sarà conveniente scegliere un livello appena minore di $\overline{p}_2$, tecnicamente $p_1 = \overline{p}_2 - \varepsilon$ con $\varepsilon \to 0$ tranne che: (1) se $\overline{p}_2 \leq c$ allora $p_1 = c$ (non posso vendere a profitti negativi) oppure se $p_2 > \frac{a+c}{2}$, cioè il prezzo di monopolio, allora $p_1 = \frac{a+c}{2}$ perchè qua sono massimizzati i profitti.

La seconda azienda si comporterà allo stesso identico modo. Per esempio, se $p_1 = \overline{p}_2 - \varepsilon$ allora la seconda azienda porrà $p_2 = \overline{p}_1 - \varepsilon$ ovvero $p_2 = \overline{p}_2 - 2\varepsilon$ e così via in una guerra di prezzi che terminerà soltanto quando $p_1^* = p_2^* = c$

6 Bertrand asimmetrico

E se i costi marginali fossero diversi?

Semplicemente, il mercato andrebbe allíazienda con costi marginali inferiori (per esempio la 1) e il livello di equilibrio vedrebbe un prezzo pari ai costi marginali dellíazienda meno efficiente (per esempio la 2) "meno ε". Unica eccezione, se l'azienda meno efficiente ha costi marginali superiori a quelli di monopolio.

Nel nostro caso avremo:

1. $p_1^* = \frac{a+c}{2}$, $p_2^* = c + k$ se $c + k \geq \frac{a+c}{2}$ ovvero se $k \geq \frac{a-c}{2}$
2. $p_1^* = c + k - \varepsilon$, $p_2^* = c + k$ se $k < \frac{a-c}{2}$

Da un punto di vista di surplus sociale, la seconda azienda è importante! A patto che i suoi costi marginali siano minori del prezzo di monopolio, la sua semplice presenza (minaccia di entrare) garantisce che l'equilibrio nel mercato si sposti da quello di monopolio e si avvicini a quello di concorrenza perfetta.