Esercitazione 1

Esercizio 1

La funzione di utilità di un consumatore è

$$U = ax_1 + bx_2$$

dove x_1 e x_2 sono le quantità di bene 1 e bene 2. Siano i prezzi del bene 1 e del bene 2 rispettivamente $p_1 = 2$ e $p_2 = 4$. Il reddito del consumatore è pari a 1000.

a) determinare la *scelta* del consumatore al variare dei parametri (a, b)

b) supponete che il prezzo del bene 1 cresca e diventi $p_1 = 4$. Determinare la scelta del consumatore al variare dei parametri (a, b)

c) fissate $a = 5$ e $b = 4$. Siano inizialmente i prezzi pari a $p_1 = 2$ e $p_2 = 4$. Il governo impone un'accisa sul bene 1 per cui il prezzo diventa $p_1 = 4$. Quale sarà il gettito per il governo? Visti i risultati, le forze politiche spingono per un ulteriore aumento dell'accisa che porterebbe il prezzo a $p_1 = 5$. Uno studente di economia di Padova è scettico riguardo a questa manovra e avverte il governo che i risultati in termini di gettito potrebbero essere deludenti. Perché?

Soluzione Esercizio 1

a) se $a/b < \frac{1}{2}$ si sceglie l'intercetta verticale ($x_1 = 0, x_2 = 250$); se $a/b > \frac{1}{2}$ si sceglie l'intercetta orizzontale ($x_1 = 500, x_2 = 0$); se $a/b = \frac{1}{2}$ si è indifferenti rispetto a ogni punto sul VdB.

b) se $a/b < 1$ si sceglie l'intercetta verticale ($x_1 = 0, x_2 = 250$); se $a/b > 1$ si sceglie l'intercetta orizzontale ($x_1 = 250, x_2 = 0$); se $a/b = 1$ si è indifferenti rispetto a ogni punto sul VdB.

c) $SMS_{x_2x_1} = \frac{a}{b} = \frac{5}{4}$. Ai prezzi $p_1 = p_2 = 4$ si sceglie l'intercetta orizzontale ($x_1 = 250, x_2 = 0$). Il gettito per il governo è pari a 500. Se $p_1 = 5$, allora $SMS = p_1/p_2$ e il consumatore è indifferente a tutti i punti sul VdB. Potrebbe quindi consumare meno x_1 e questo potrebbe ridurre il gettito per il governo.

Esercizio 2

Un consumatore ha un reddito pari a 15.000 euro. Ogni periodo paga un ammontare di 3.000 euro per le tasse e acquista due beni. Il prezzo del primo bene è $p_1 = 120$ euro mentre per il secondo ha stipulato un contratto di questo tipo: se acquista una quantità minore o uguale a 30 unità il prezzo unitario è $p_2 = 160$ euro, mentre se acquista più di 30 unità il prezzo unitario è $p_2' = 120$. Si rappresenti il vincolo di bilancio. Supponete che la funzione di utilità del consumatore sia $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$. Determinate il paniere di consumo ottimale.

Soluzione Esercizio 2

Il vincolo di bilancio è tale che:

$$\begin{cases} 120x_1 + 160x_2 & = & 12000 & \text{per} & x_2 \leq 30 \\ 120x_1 + 120x_2 & = & 12000 & \text{per} & x_2 > 30 \end{cases}$$

Nota bene che il reddito netto che rimane per il consumo è pari a $15000 - 3000 = 12000$. Per risolvere l'esercizio, partiamo con l'ipotesi che il prezzo del bene 2 pari a 120. In questo caso il problema è :

$$Max\sqrt{x1} + \sqrt{x2}$$

$$s.t.120x_1 + 120x_2 \leq 12000$$

Siccome si tratta di un problema in cui le curve di indifferenza sono convesse, possiamo utilizzare il metodo del langrangiano per risolverlo. Il problema viene impostato come:

$$Max_{\{x1,x1\}}L(x_1, x_2, \lambda) = \sqrt{x1} + \sqrt{x2} + \lambda(120x_1 + 120x_2 - 12000)$$

Derivando rispetto ad ogni variabile e uguagliando a zero (condizioni di primo ordine), si ricava un sistema e la soluzione: $(x_1, x_2) = (50, 50)$.

Il paniere (50,50) è preferito a qualsiasi paniere per cui $120x_1 + 120x_2 \leq 12000$. Si noti che il paniere (50,50) appartiene al "vero" VdB del consumatore (ossia il vincolo con prezzi distinti a seconda della quantità domandata di x_2).

Siccome l'insieme dei panieri che il consumatore può acquistare dato il suo "reale" VdB è un sottoinsieme dell'insieme dei panieri determinato dal vincolo $120x_1 + 120x_2 \leq 12000$ il paniere (50,50) è preferito a qualsiasi altro paniere appartenente al vero insieme di panieri che sono acquistabili del consumatore ed è quindi la soluzione del problema.

Esercizio 3

Un individuo dispone dispone di T_0 ore di tempo nel corso della sua vita che può dedicare al lavoro o al tempo libero. Inoltre riceve dai genitori un'eredità pari a $M = 1000$. Esiste una tecnologia che consente di trasformare M in T (ad esempio investimento in "salute"). Questa tecnologia è lineare e possiamo scriverla come $T = T_0 + m$. Questa relazione indica che investendo m, con $0 \leq m \leq M$ il tempo totale a dispozione passa da T_0 a $T_0 + m$. Il salario orario prevalente sul mercato del lavoro è $w = 10$ e la funzione di utilità dell'individuo è $U(c, l) = c^{0.6}l^{0.4}$, dove c indica consumo e l tempo libero.

a) sia $m = 500$. Rappresentare il vincolo di bilancio del consumatore

b) sia $m = 500$. Deteminare la scelta del consumatore

c) quale sarà la scelta ottima di m che massimizza l'utilità del consumatore? (hint: è sufficiente scrivere il vincolo di bilancio per poter rispondere alla domanda)

Soluzione Esercizio 3

a) Sia L l'ammontare di ore lavorando. Il vincolo di bilancio per $m = 500$ deriva da:

$$\begin{aligned} c &= 10L + 500 \\ l + L &= T_0 + 500 \end{aligned}$$

(la prima equazione dice che la spesa per consumo è pari al reddito da lavoro più la parte di eredità che non è stata investita; la seconda equazione dice che tempo libero + lavoro devono essere pari al tempo complessivo a disposizione). Per cui il vincolo è

$$c + 10l = 10T_0 + 5500 \text{ con } l \leq T_0 + 500$$

Nota: il paniere delle dotazioni è $(T_0 + 500, 500)$

b) La scelta del consumatore per $m = 500$ deriva dal solito sistema

$$\begin{cases} SMS_{cl} = \frac{2}{3}\frac{c}{l} = 10 = w \\ \\ c + 10l = 10T_0 + 5500 \end{cases}$$

Notate che nel punto delle dotazioni il SMS_{cl} (ovvero il salario di riserva del consumatore) vale $\frac{2}{3}\frac{500}{T_0+500}$ che è sicuramente minore del salario di mercato (10). Quindi la scelta del consumatore sarà interna e vale:

$$\begin{cases} l^* = \frac{2}{5}T_0 + 220 \\ \\ c^* = 6T_0 + 3300 \end{cases}$$

c) Riscriviamo il VdB per m parametrico. Abbiamo

$$\begin{aligned} c &= 10L + (M - m) \\ l + L &= T_0 + m \end{aligned}$$

da cui

$$c + 10l = 10T_0 + 9m + M$$

con

$$l \leq T_0 + m$$

Si vede immediatamente che all'aumentare di m l'insieme delle opportunità per il consumatore si espande (il VdB si sposta verso l'esterno). Quindi la scelta ottima del consumatore deve essere $m = M = 1000$, ovvero tutta l'eredità viene investita.

Esercizio 4

Un consumatore deriva utilità dal consumo di bene 1 e bene 2, le cui quantità sono indicate da x_1 e x_2. Precisamente, la sua funzione di utilità è $U(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$. I prezzi dei due beni sono p_1, p_2 e il consumatore dispone di I euro. Il governo emana un decreto secondo cui l'acquisto di ogni unità di bene 1 è condizionato all'acquisto di almeno a unità di bene 2. Sia $a = 2$.

a) Determinare le curve di domanda dei due beni

b) Determinare la curva prezzo-consumo al variare del prezzo p_1

c) Determinare la curva reddito-consumo al variare del reddito I

d) Per quali valori di a il decreto del governo sarebbe neutrale, ovvero non altererebbe le libere scelte del consumatore?

Soluzione Esercizio 4

Il decreto del governo impone un ulteriore vincolo al consumatore ovvero che $x_1 < \frac{1}{a}x_2$. Definiamolo come "vincolo di composizione" del paniere.

a) Poichè $a = 2$, il punto d'angolo delle curve di indifferenza che appartiene simultaneamente alla bisettrice del primo quadrante e al vincolo di bilancio non è raggiungibile. Il punto scelto allora dal consumatore (quello che si avvicina di più alla scelta in assenza del vincolo di composizione) è il punto che appartiene simultanemente al vincolo di bilancio e al vincolo di composizione. Tale punto quindi soddisfa

$$\begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 = I \\ \\ x_2 = 2x_1 \end{cases}$$

per cui

$$x_1^* = \frac{I}{p_1 + 2p_2}$$

$$x_2^* = 2\frac{I}{p_1 + 2p_2}$$

b) curva prezzo consumo.

Si ricava p_1 dalla prima equazione e lo si sostituisce nella seconda ottendo $x_2 = 2x_1$.

Notate che si poteva ottenere il risultato senza fare calcoli: se cambia p_1 ruota il vincolo di bilancio ma non cambia il vincolo di composizione. Per ogni possibile p_1 la scelta ottima sarà sempre lungo il vincolo di composizione per cui il luogo geometrico delle scelte ottime (ovvero la curva prezzo consumo) coinciderà col vincolo di composizione.

c) curva reddito consumo.

Si ricava I dalla prima equzione e si sostituisce nella seconda ottenendo $x_2 = 2x_1$.

Come nel punto precedente si poteva concludere senza calcoli. Al variare del reddito il vincolo di bilancio si sposta parallelamente ma la scelta rimane sempre sul vincolo di composizione.

d) il vincolo di composizione distorce le scelte del consumatore nel senso che lo costringe a consumare bene 2 in una proporzione superiore a quella ottima suggerita dalla curva di utilità, cioè 1:1. Quindi per tutti i valori $a < 1$ il vincolo di composizione non distorce la scelta del consumatore.

Esercizio 5

Per un dato consumatore l'assioma che impone la decrescenza del SMS non vale. Le sue curve di indifferenza pertanto non saranno convesse, ma concave. La funzione di utilità di questo consumatore è data da $U(x, y) = x^2 + y^2$. I prezzi dei beni sono rispettivamente $p_x = 2$ e $p_y = 1$. Il reddito a disposizione è I.

a) Rappresentare graficamente alcune curve di indifferenza del consumatore e il vincolo di bilancio corrispondere a $I = 100$. (hint: l'equazione corrispondete a una circonferenza con centro nell'origine e di raggio r è $x^2 + y^2 = r^2$)

b) Determinare la scelta del consumatore per $I = 100$

c) Determinare la curva reddito consumo.

Soluzione Esercizio 5

a) Le curve di indifferenza del consumatore sono archi di circonferenza con centro nell'origine degli assi. Ad utilità maggiori corrispondo archi più esterni. In particolare per utilità pari a U, le intercette orizzontale e verticale della curva di indifferenza sono date da $(\sqrt{U}, 0)$ e $(0, \sqrt{U})$. Il vincolo di bilancio è $2x+y = I$.

b) la scelta del consumatore è l'intercetta verticale del vincolo di bilancio. Infatti è per questo punto che passa la curva di indifferenza più elevata del consumatore. Quindi la scelta è $(x = 0, y = 100)$.

c) lasciando I implicito, la scelta del consumatore è $(x = 0, y = I)$, ovvero all'aumentare del reddito di sceglie sempre l'intercetta verticale. Ne consegue che la curva reddito consumo coincide con l'asse delle ordinate, ovvero $x = 0$.

Esercizio 6

1) Per un consumatore il bene 1 e il bene 2 sono perfetti sostituti. Egli è sempre disposto a scambiare una unità di bene 1 con una unità di bene 2,

mantenendo invaritata la sua utilità. Supponiamo che il bene 1 sia un bene meritorio, il cui consumo è importante nella prospettiva del governo, per cui il governo paga al consumatore un sussidio percentuale pari a s per unità acquistata fino a un massimo di 10 unità. Ad esempio se il consumatore acquistasse 15 unità di bene 1, riceverebbe il sussidio sulle prime 10 e pagherebbe il prezzo pieno sulle ulteriori 5 unità. Siano p_1 e $p_2 = 1/2$ i prezzi di mercato dei beni e sia $I = 20$ il reddito del consumatore. Il prezzo delle unità di bene 1 sussidiate è quindi $(1 - s)p_1$.

a) scrivere il vincolo di bilancio e poi, supponendo $p_1 = 1$ e $s = 1/2$, rappresentarlo graficamente.

b) sia $s = 1/2$. Determinare la curva di domanda del bene 1 al variare di p_1

c) sia $p_1 = 1$. Determinare la curva di domanda del bene 1 al variare di s

d) sia $p_1 = 1$. Per finanziare il sussidio il governo impone una tassa proporzionale sul reddito del consumatore di aliquota pari a t. Quale combinazione di sussidio e tassa massimizza l'utilità del consumatore, imponendo il vincolo di bilancio pubblico in pareggio?

Soluzione Esercizio 6

a) il vincolo di bilancio è rappresentabile come una funzione lineare e continua con un punto angoloso in $x_1 = 10$. L'intercetta verticale è data dal punto $(0, 40)$ e non dipende né da p_1 né dal sussidio. La pendenza è pari a $2p_1(1-s)$ nell'intervallo $0 \leq x_1 \leq 10$ e pari a $2p_1$ per $x_1 > 1$. Al crescere di s, il punto angoloso si sposta in alto lungo la retta verticale $x_1 = 10$. Formalmente, l'equazione del vincolo di bilancio è

$$(1 - s)p_1x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 20 \quad per \quad 0 \leq x_1 \leq 10$$

$$p_1x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 20 + 10p_1s \quad per \quad x_1 > 10$$

Il punto angoloso ha allora coordinate $(10, 20(2 - p_1(1 - s)))$ e l'intercetta orizzontale è $(20/p_1 + 10s, 0)$.

Se $p_1 = 1$ e $s = 1/2$, l'intercetta orizzontale ha coordinate $(25, 0)$, l'intercetta verticale ha coordinate $(0, 40)$ e il punto angoloso ha coordinate $(10, 30)$.

b) I beni 1 e 2 sono perfetti sostituti, di conseguenza il SMS_{x_1,x_2} è costante e pari a 1 in questo caso. Si può scrivere la funzione di utilità del consumatore come

$$U(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

Di conseguenza le curve di indifferenza saranno delle rette con pendenza pari a -1. Supponendo $s = 1/2$ il vincolo di bilancio diventa:

$$p_1x_1 + x_2 = 40 \quad per \quad 0 \leq x_1 \leq 10$$

$$2p_1x_1 + x_2 = 40 + 10p_1 \quad per \quad x_1 > 10$$

Il vincolo di bilancio ha quindi le seguenti caratteristiche:

- intercetta orizzontale con coordinate $(5+20/p_1, 0)$
- intercetta verticale con coordinate $(0, 40)$
- punto angoloso con coordinate $(10, 40-10p_1)$
- la pendenza del segmento superiore pari a (p_1)
- la pendenza del segmento inferiore pari a $(2p_1)$

La scelta del consumatore dipende dal confronto tra la pendenza del vincolo di bilancio e il SMS_{x_1,x_2} nel seguente modo:

- Se la pendenza delle curve di indifferenza è inferiore alla pendenza del segmento superiore del vincolo di bilancio $[SMS_{x_1,x_2} < p_1]$, la soluzione è l'intercetta verticale e quindi $x_1 = 0$
- Se la pendenza delle curve di indifferenza è pari alla pendenza del segmento superiore del vincolo di bilancio $[SMS_{x_1,x_2} = p_1]$, qualsiasi paniere su quel segmento del vincolo di bilancio è indifferente per il consumatore
- Se la pendenza delle curve di indifferenza è superiore alla pendenza del segmento inferiore del vincolo di bilancio $[SMS_{x_1,x_2} > 2p_1]$, la soluzione è l'intercetta orizzontale e quindi $x_1 = 5 + 20/p_1$
- Se la pendenza delle curve di indifferenza è pari alla pendenza del segmento inferiore del vincolo di bilancio $[SMS_{x_1,x_2} = 2p_1]$, qualsiasi paniere su quel segmento del vincolo di bilancio è indifferente per il consumatore
- Se la pendenza della curva di indifferenza è maggiore rispetto alla pendenza del segmento superiore del vincolo del bilancio ma inferiore rispetto alla pendenza del segmento inferiore del vincolo di bilancio $[p_1 < SMS_{x_1,x_2} < 2p_1]$, $x_1 = 10$, cioè il punto angoloso

Siccome in questo caso sappiamo a priori che la pendenza delle curve di indifferenza è costante e pari a -1, si possono riscrivere i precedenti criteri in funzione di p_1 ricavando quindi la curva di domanda del bene 1 al variare di p_1:

$$x_1 = \begin{cases} 5+20/p_1 \ \ se \ \ p_1 < 1/2 \\ (10,45] \ \ se \ \ p_1 = 1/2 \\ 10 \ \ se \ \ 1/2 < p_1 < 1 \\ [0,10] \ \ sep_1 = 1 \\ 0 \ \ se \ \ p_1 > 1 \end{cases}$$

c) la soluzione è simile a quella del punto precendente. Per $p_1 = 1$ il vincolo di bilancio diventa

$$(1-s)x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 20 \ \ per \ \ 0 \le x_1 \le 10$$

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 20 + 10s \;\; per \;\; x_1 > 10$$

che ha

- pendenza pari a $2(1-s)$ nel primo tratto
- pendenza pari a 2 nel secondo tratto
- il punto angoloso è $(10, 20(1+s))$
- l'intercetta orizzontale $(20 + 10s, 0)$.

Il secondo tratto del vincolo è sempre più pendente delle curve di indifferenza, di conseguenza l'intercetta orizzontale non sarà mai una soluzione. Il primo tratto è più pendente del SMS_{x_1,x_2} per $s < 1/2$ e meno pendente per $s > 1/2$. Infine per $s = 1/2$ tutti i punti sul primo tratto del vincolo di bilancio possono essere scelte del consumatore. Ne consegue che la scelta del consumatore sarà l'intercetta verticale per $s < 1/2$ e il punto angoloso per $s > 1/2$. Formalmente, la curva di domanda del bene 1 è quindi

$$x_1 = \begin{cases} 10 \;\; per \;\; s > 1/2 \\ 0 \;\; per \;\; s < 1/2 \\ [0, 10] \;\; per \;\; s = 1/2 \end{cases}$$

d) Il pareggio del bilancio pubblico si raggiunge quando i proventi derivanti dalla tassazione uguagliano i trasferimenti effettuati sotto forma di sussidi, quindi $x_1 s = 20t$.

Sostituendo direttamente le tasse da pagare e supponendo $p_1 = 1$, il vincolo di bilancio dei consumatori diventa:

$$(1-s)x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 20(1-t) \;\; per \;\; 0 \leq x_1 \leq 10$$

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 20(1-t) + 10s \;\; per \;\; x_1 > 10$$

Sulla base dei risultati del punto precedente, sappiamo che la domanda del consumatore sarà nulla per $s < 1/2$. In questo caso non ci saranno uscite ma solo entrate fiscali e il bilancio pubblico non sarà in pareggio.
Quindi consideriamo il caso $s > 1/2$. In questo caso il consumo ottimo sarà $x_1 = 10$. Le spese per sussidi saranno quindi $10s$ e le entrate fiscali saranno pari a $20t$. La condizione di bilancio in pareggio è

$$s = 2t$$

che sostituita nel vincolo di bilancio produce

$$(1-s)x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 20(1 - \frac{1}{2}s) \;\; per \;\; 0 \leq x_1 \leq 10$$

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 20(1 - \frac{1}{2}s) + 10s \quad per \quad x_1 > 10$$

Essendo $s > 1/2$, la scelta sarà il punto angoloso che vale $(10, 20)$ e che quindi è indipendente da s. Ne consegue che ogni combinazione (s, t) tale che $s > 1/2$ e $t = 1/2s$ è equivalente dal punto di vista del consumatore. Si noti che per $s = 1$ (massimo sussidio) si ha $t = 1/2$ (massima aliquota fiscale), una combinazione che consente comunque di acquistare $x_1 = 10$.

Esercizio 7

1) Un consumatore dispone di una dotazione iniziale di 2 unità di bene x e 10 unità di bene y. I prezzi dei beni sono p_x e p_y. Le sue preferenze sono descritte dalla funzione di utilità $U(x, y) = \min(x, y)$.

a) determinare la curva di domanda del bene x al variare del suo prezzo.

b) determinare la curva prezzo-consumo al variare del prezzo del bene x.

c) supponete che per garantire la sopravvivenza, il consumo di bene y non possa essere inferiore a 4 unità. Questa condizione limita le possibilità di scambio del consumatore, ma non ha effetto sulle sue preferenze che rimangono quelle descritte. Come cambia la risposta del punto a)?

Soluzione Esercizio 7

a) Il vincolo di bilancio del consumatore deve passare per il paniere delle dotazioni (2,10) qualsiasi siano i prezzi. Formalmente il vincolo è

$$p_x x + p_y y = 2p_x + 10p_y \tag{1}$$

Le preferenze rappresentano il caso "perfetti complementi". La scelta del consumatore si avrà quindi sull'angolo della curva di indifferenza di livello più elevato che tange il vincolo di bilancio. Il luogo dei punti d'angolo delle curve di indifferenza è $y = x$ per cui la scelta del consumatore per dato p_x è

$$x = \frac{2p_x + 10p_y}{p_x + p_y} \quad y = \frac{2p_x + 10p_y}{p_x + p_y} \tag{2}$$

b) la curva prezzo-consumo al variare di p_x è il luogo geometrico dei panieri scelti, fissato p_y. Variando p_x il vincolo di bilancio ruota, ma la scelta rimane sempre sul luogo $y = x$ dei punti d'angolo. Quindi la curva prezzo consumo è

$$y = x \quad perx \geqslant 2ey \leqslant 10 \tag{3}$$

(la condizione $x \geqslant 2$ riflette la condizione $p_x < +\infty$ e la condizione $y \leqslant 10$ riflette $p_x \geqslant 0$)

c) Tenendo in considerazione la forma delle curve di indifferenza del consumatore si inizia considerando il paniere $(4,4)$ che soddisfa contemporaneamente anche il vincolo $y \geqslant 4$. Sostituendo tale condizione nel vincolo di bilancio si ha che:

$$p_x 4 + p_y 4 = 2p_x + 10p_y \tag{4}$$

Per cui:

$$\frac{p_x}{p_y} = 3 \tag{5}$$

- Se $\frac{p_x}{p_y} \geqslant 3$ il vincolo di bilancio è così inclinato da non consentire la scelta di un punto d'angolo delle curve di indifferenza che verifichi sia il vincolo di bilancio che il vincolo $y \geqslant 4$. In questo caso la scelta del consumatore è $y = 4$ e $x = \frac{2p_x+10p_y-4p_y}{p_x}$ ovvero un punto che verifica i vincoli ma che non è angolo delle curve di indifferenza.

- Se $\frac{p_x}{p_y} < 3$ il vincolo di bilancio è sufficientemente inclinato da consentire che la scelta sia un punto d'angolo e soddisfi sempre il vincolo $y \geqslant 4$. La scelta rimane quindi quella trovata nel punto a).